

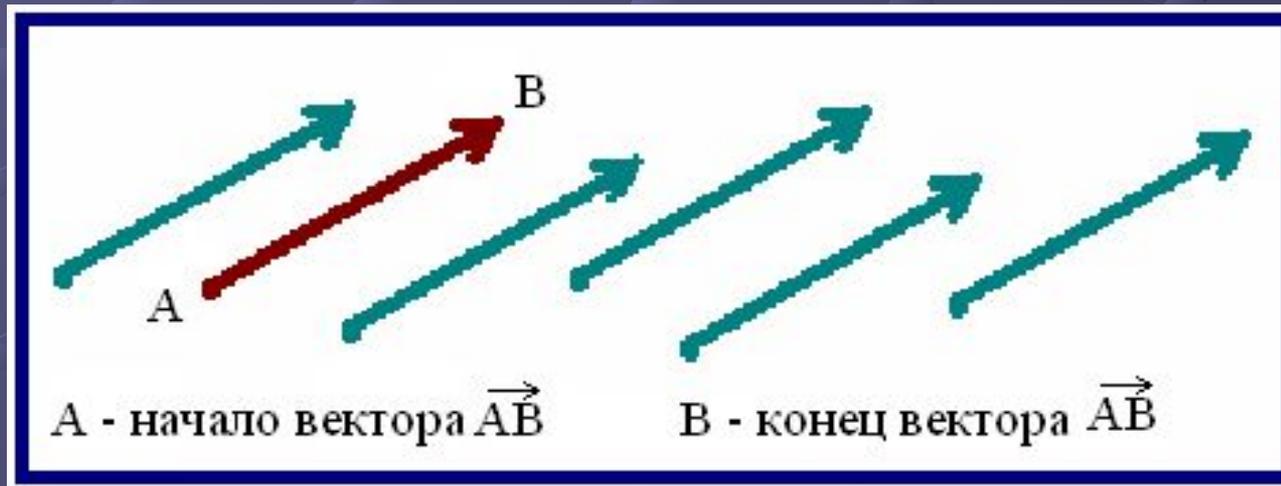
Векторы на плоскости.

Возникновение понятия вектора.

- Векторный характер сил, скоростей, перемещений был знаком ещё в IV веке. Аристотель изображал вектор направленным отрезком. Понятие вектора (лат. vector, несущий) появилось в работах немецкого математика XIX века Г.Грассмана и ирландского математика У.Гамильтона; затем оно было охотно воспринято многими математиками и физиками. В современной математике и её приложениях это понятие играет важнейшую роль. Векторы применяются в различных областях математики, в классической механике Галилея – Ньютона (в её современном изложении), в трудах Максвелла по электромагнетизму, в теории относительности, в квантовой физике, в математической экономике, во многих разделах естествознания. Примерами физических величин, которые имеют векторный характер, могут служить скорость (поступательно движущего тела), ускорение, сила.

Определение вектора.

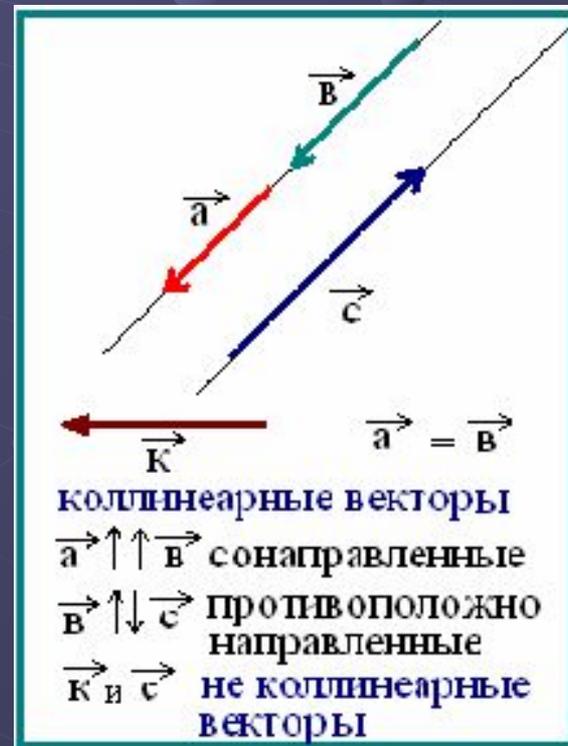
- Вектор – одно из основных геометрических понятий. Вектор характеризуется числом (длиной) и направлением. Наглядно его можно представить себе в виде направленного отрезка, хотя, говоря о векторе, правильнее иметь в виду целый класс направленных отрезков, которые все параллельны между собой, имеют одинаковую длину и одинаковое направление.



Равенство векторов.

- Любая точка является нулевым вектором. Длиной или модулем ненулевого вектора \overrightarrow{AB} называется длина AB .
- Ненулевые векторы называют коллинеарными если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.
- Коллинеарные векторы могут быть сонаправленными и противоположно направленными.

- Векторы называются равными, если они сонаправлены и их длины равны.



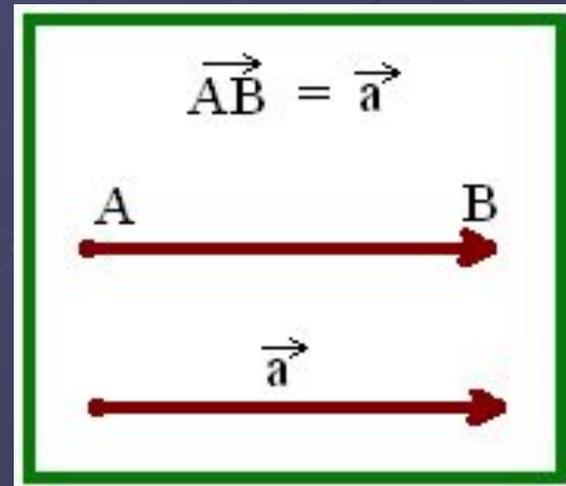
Основные операции с векторами.

- I. Откладывание вектора от точки.

Пусть дан некоторый вектор \vec{a} и точка A . Среди направленных отрезков, являющихся представителем вектора \vec{a} имеется направленный отрезок, с началом в точке A и концом в точке B . В результате откладывания вектора \vec{a} от точки A получился вектор \vec{AB} , равный вектору \vec{a} .

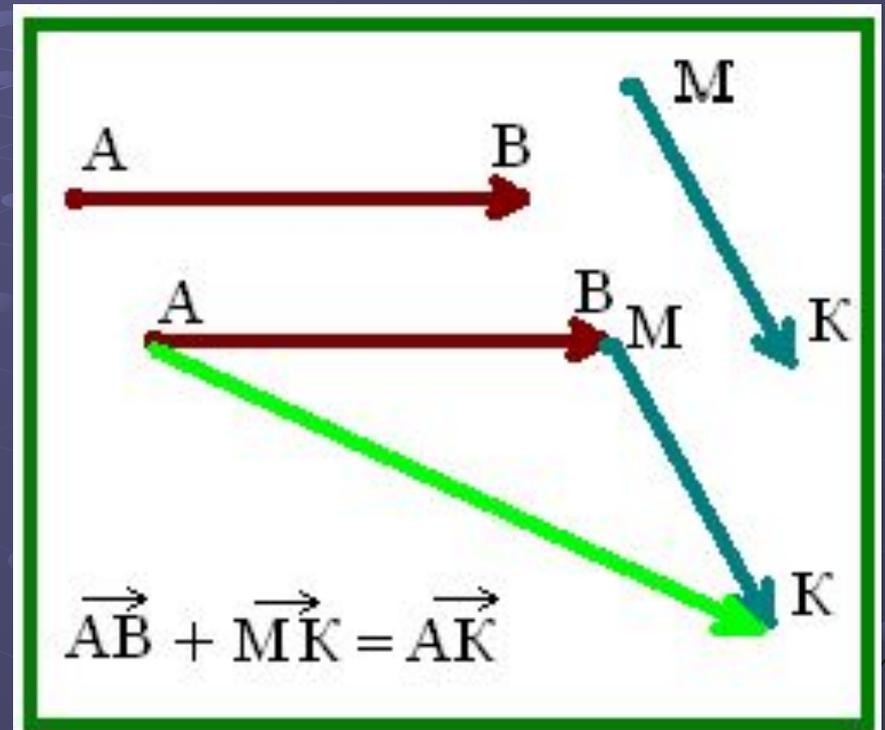
- Эта операция обладает свойством:

I₁ Для любой точки A и любого вектора \vec{a} существует, и притом только одна, точка B , для которой



Сложение двух векторов по правилу треугольника.

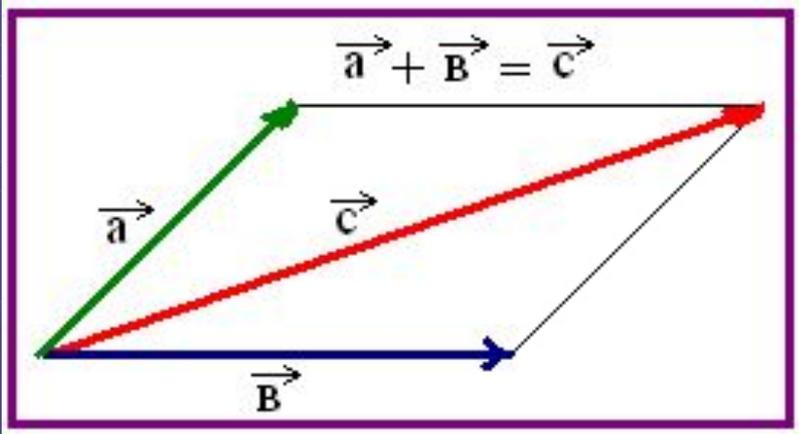
II. Правило треугольника. Для сложения двух векторов \vec{a} и \vec{b} по правилу треугольника оба эти вектора переносятся параллельно самим себе так, чтобы начало одного из них совпадало с концом другого. Тогда вектор суммы задаётся третьей стороной образовавшегося треугольника, причём его начало совпадает с началом первого вектора, а конец с концом второго вектора.



Сложение двух векторов по правилу параллелограмма.

III. Если ненулевые векторы не параллельны, то их сумму удобно находить с помощью правила параллелограмма.

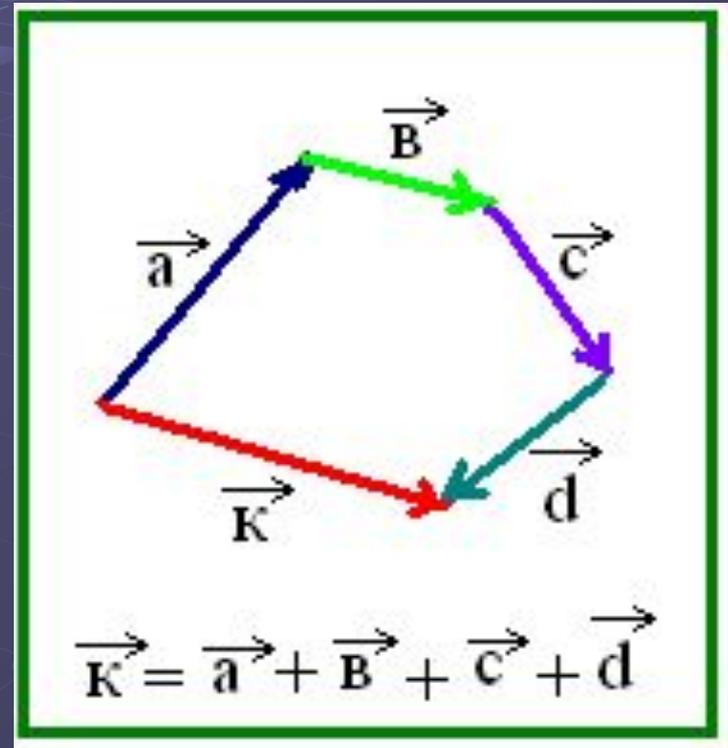
Свойства суммы векторов.



- 1 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- 2 $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
- 3 $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- 4 $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Сумма нескольких векторов.

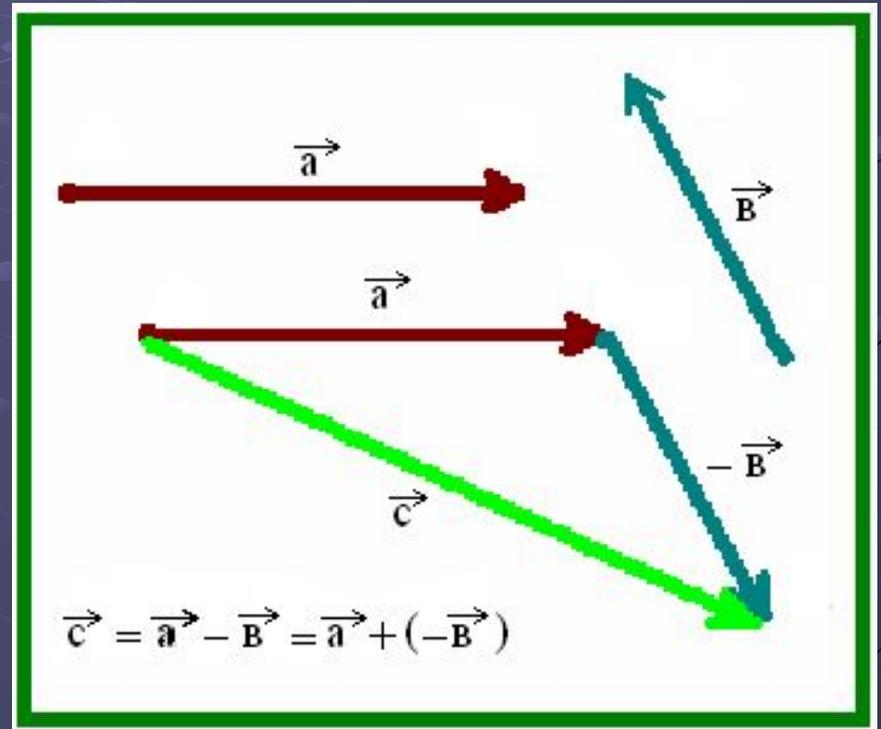
- Геометрическая сумма нескольких векторов может быть получена последовательным отложением векторов друг за другом, т.е. так, чтобы начало второго вектора совпадало с концом первого, начало третьего – с концом второго и т. д.; вектор, соединяющий начало первого вектора с концом последнего, будет суммой данных векторов.



Вычитание векторов.

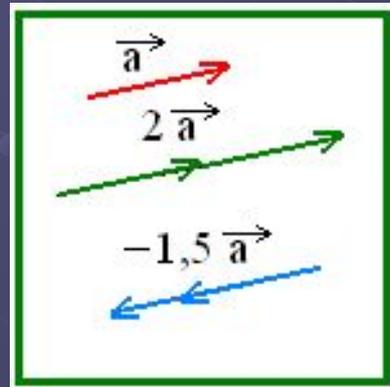
Пусть вектор \mathbf{a} ненулевой вектор, вектор \mathbf{a}_1 называется противоположным вектору \mathbf{a} если векторы \mathbf{a} и \mathbf{a}_1 имеют равные длины и противоположно направлены.

IV. Операция вычитания вектора из вектора сводится к сложению первого вектора и вектора, противоположного второму.



Умножение вектора на число.

V. Произведением ненулевого вектора \vec{a} на число k называется такой вектор \vec{b} , длина которого равна $|k| \cdot |\vec{a}|$, причём векторы \vec{a} и \vec{b} сонаправлены при $k \geq 0$ и противоположно направлены при $k < 0$. Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор



Свойства умножения.

V₁

V₂

V₃

$$(kn) \vec{a} = k(n \vec{a})$$

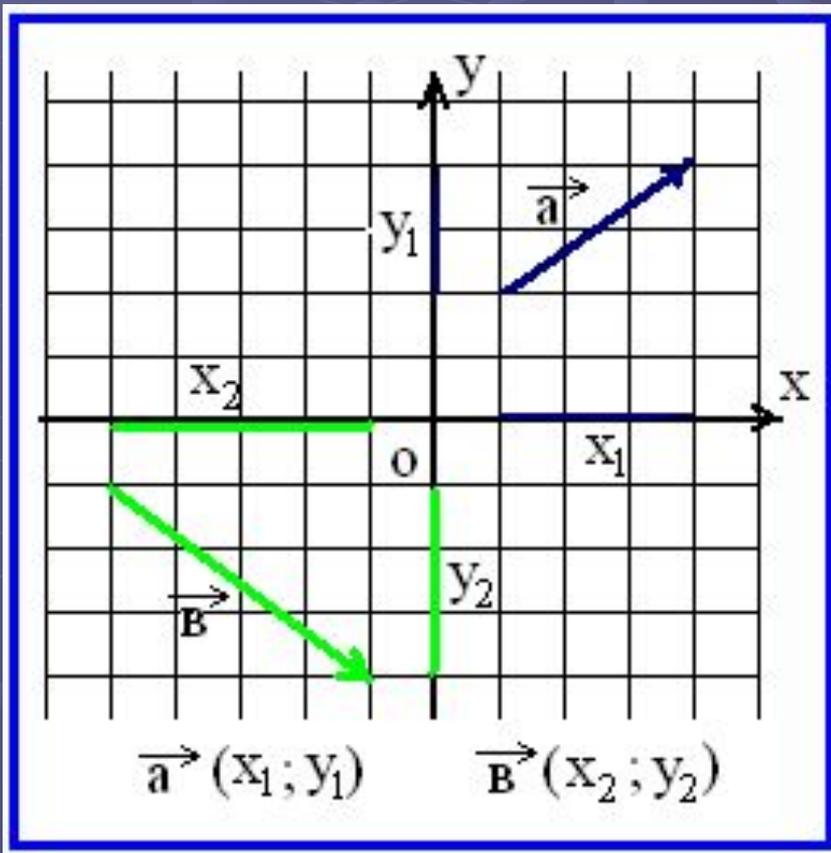
$$(k+n) \vec{a} = k \vec{a} + n \vec{a}$$

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k \vec{a} + k \vec{b}$$

k, n - числа,

\vec{a}, \vec{b} - векторы

Координаты вектора в плоскости.

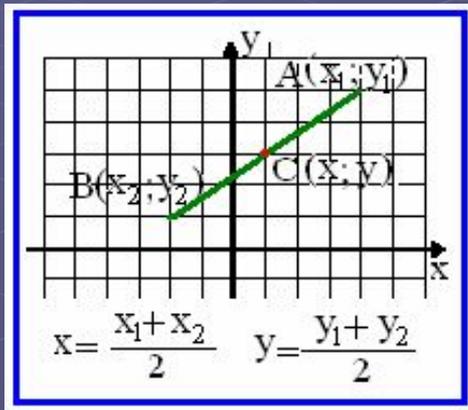


1. Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов.
2. Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов.
3. Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число.

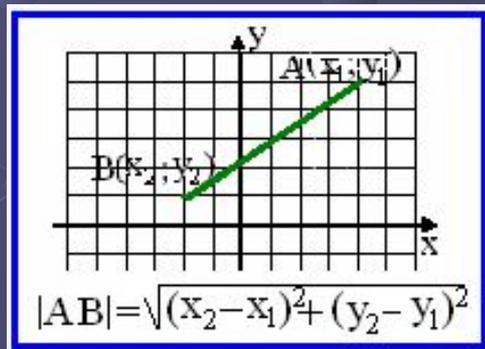
$$\begin{aligned} 1. \quad & \vec{a} (x_1; y_1) + \vec{b} (x_2; y_2) = \vec{c} (x_1 + x_2; y_1 + y_2) \\ 2. \quad & \vec{a} (x_1; y_1) - \vec{b} (x_2; y_2) = \vec{c} (x_1 - x_2; y_1 - y_2) \\ 3. \quad & k \vec{a} (x_1; y_1) = \vec{a} (kx_1; ky_1) \end{aligned}$$

Задачи в координатах.

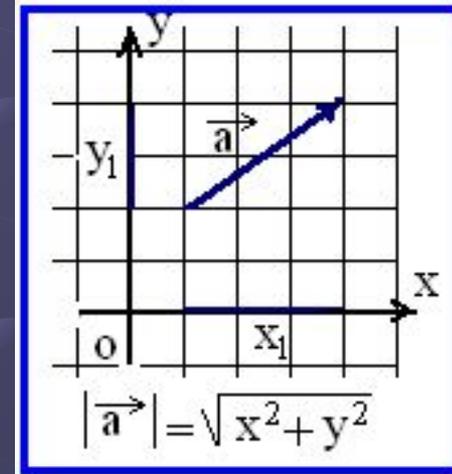
Координаты середины отрезка.



Расстояние между двумя точками.



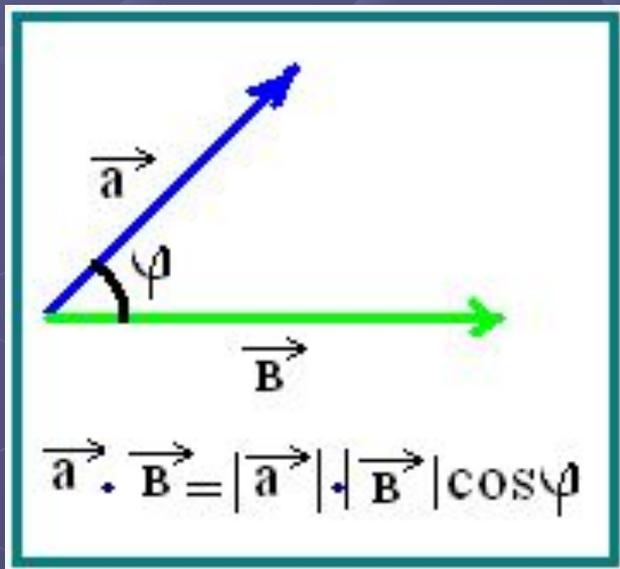
Вычисление длины вектора по его координатам.



Скалярное произведение векторов.

- Определение.

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.



- Скалярное произведение в координатах.

В прямоугольной системе координат скалярное произведение векторов выражается формулой.

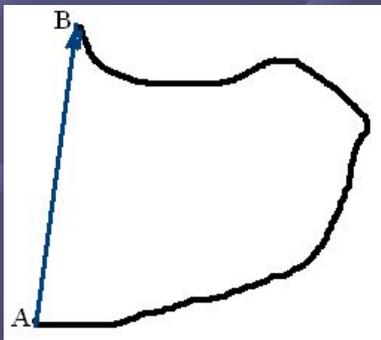
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

Векторы в физике.

- В физике практически всегда речь идёт не о математических объектах (обладающих теми или иными формальными свойствами) вообще, а об определённой их конкретной физической привязке. В физике, в отличие от математики, под словом вектор без дополнительных уточнений обычно понимается не какой-то вектор, а прежде всего вектор, связанный с некоторой физической величиной. Если необходимо измерить такую величину, как скорость точки, то для этого знать два числа (путь и время) недостаточно. Необходимо ещё знать, куда двигается точка, то есть её направление движения. В физике точку приложения можно перемещать вдоль самого вектора (например, сила, приложенная к твёрдому телу) или точка приложения должна быть зафиксирована (например, сила, действующая на жидкость). Изучение векторов в физике можно свести к изучению векторов в геометрии.

Перемещение.

- Для решения различных практических задач в разных сферах деятельности (например, в диспетчерской службе наземного и воздушного транспорта, в космонавтике, астрономии и др.) необходимо уметь рассчитывать, где будет находиться движущееся тело в заданный момент времени. Для нахождения положения тела введена физическая величина, называемая перемещением. Перемещением тела (материальной точки) называется вектор, соединяющий начальное положение тела с его последующим положением. Знать вектор перемещения – это значит знать его направление и модуль.



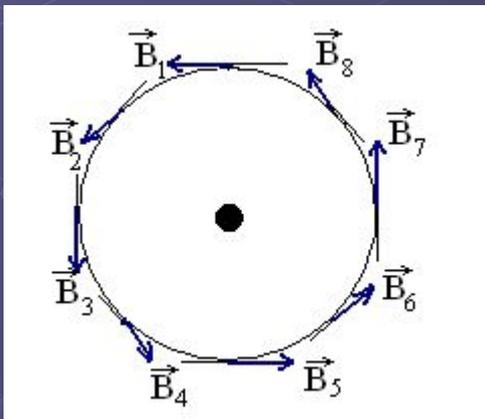
Ускорение.

- Ускорением тела при его равноускоренном движении называется величина, равная отношению изменения скорости к промежутку времени, за которое это изменение произошло.
- Ускорение - векторная величина, которая характеризуется не только модулем, но и направлением. Модуль вектора ускорения показывает, на сколько меняется модуль вектора скорости в каждую единицу времени.

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}$$

Магнитная индукция.

- Многие замечали, что одни магниты создают в пространстве более сильные поля, чем другие. Магнитное поле характеризуется векторной физической величиной, которая называется индукцией магнитного поля.
- Проводник с током расположен перпендикулярно к плоскости чертежа. Окружность вокруг проводника представляет собой одну из линий индукции магнитного поля, созданного протекающим по проводнику током. На рисунке видно, что проведённые к этой окружности касательные в любой точке совпадают с вектором магнитной индукции.



Заключение.

- Вектор является одним из фундаментальных понятий современной математики. Эволюция понятия вектора осуществлялась благодаря широкому использованию этого понятия в различных областях математики и других науках. Понятие вектора возникает там, где приходится иметь дело с объектами, которые характеризуются величиной и направлением.
- В современной математике и её приложениях это понятие играет важнейшую роль. Векторы применяются в различных областях математики и других науках.