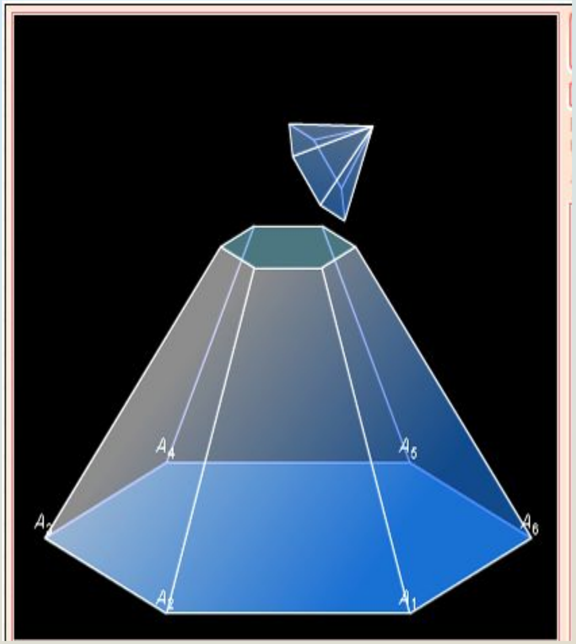
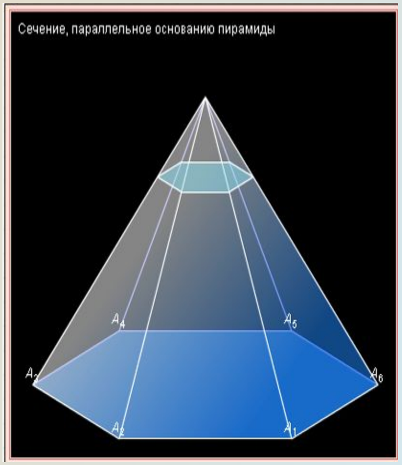
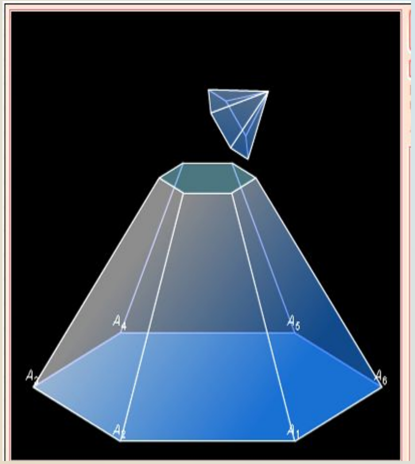
УСЕЧЁННАЯ ПИРАМИДА



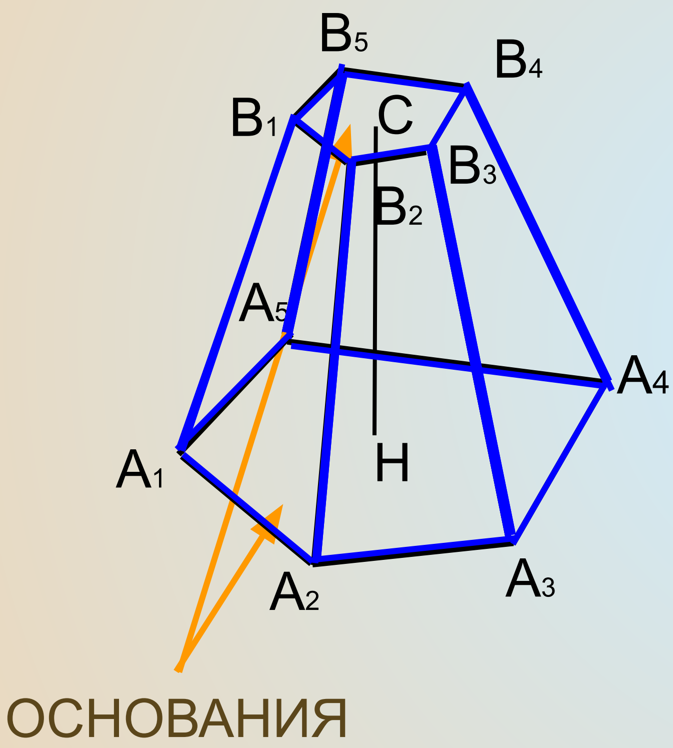
ПОНЯТИЕ УСЕЧЕННОЙ ПИРАМИДЫ





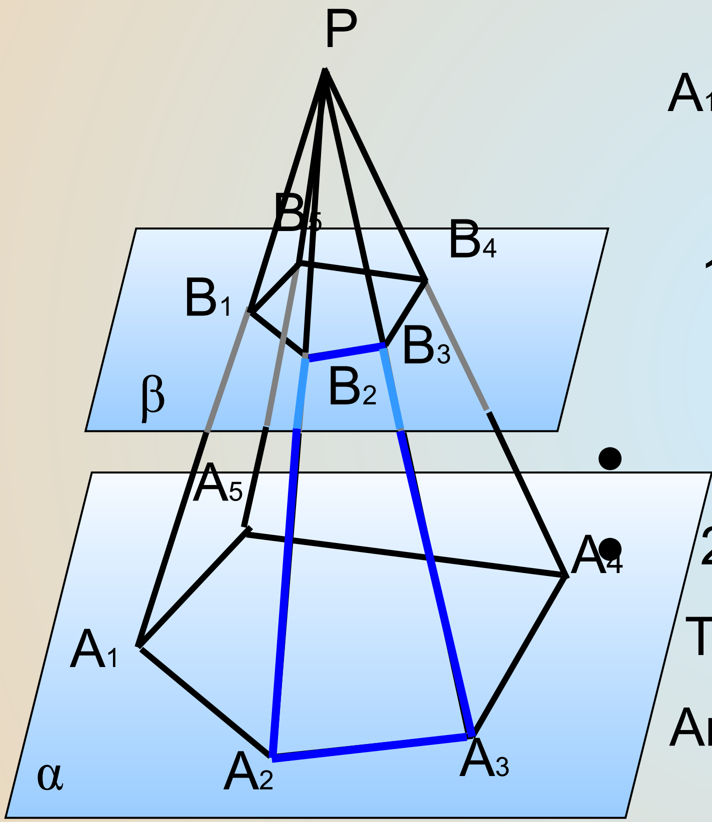
- Плоскость параллельная основанию пирамиды, разбивает её на два многогранника. Один из них является пирамидой, а другой называется усечённой пирамидой.
- *Усеченная пирамида* – это часть полной пирамиды, заключенная между её основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию данной пирамиды

ПОНЯТИЕ УСЕЧЕННОЙ ПИРАМИДЫ



- Многоугольники $A_1A_2A_3A_4A_5$ и $B_1B_2B_3B_4B_5$ *- нижнее и верхнее основания* усечённой пирамиды
- Отрезки A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3… - *боковые ребра* усечённой пирамиды
- Четырёхугольники $A_1B_1B_2A_2$, $A_2B_2B_3A_3$ … - *боковые грани* усечённой пирамиды. Можно доказать, что все они являются трапециями.
- Отрезок CH – перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки верхнего основания к нижнему основанию – называется *высотой* усечённой пирамиды.

УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА



Докажем, что боковые грани $A_1A_2A_3A_4A_5B_1B_2B_3B_4B_5$ являются трапециями.

Рассмотрим четырехугольник $A_1B_1B_2A_2$.

1. $\boldsymbol{\alpha} \parallel \boldsymbol{\beta}$

$(PA_2A_3) \cap \boldsymbol{\alpha} = A_2A_3$ значит $A_2A_3 \parallel B_2B_3$

$(PA_2A_3) \cap \boldsymbol{\beta} = B_2B_3$

2. $A_2P \cap A_3P = P$, значит $A_2B_2 \nparallel A_3B_3$

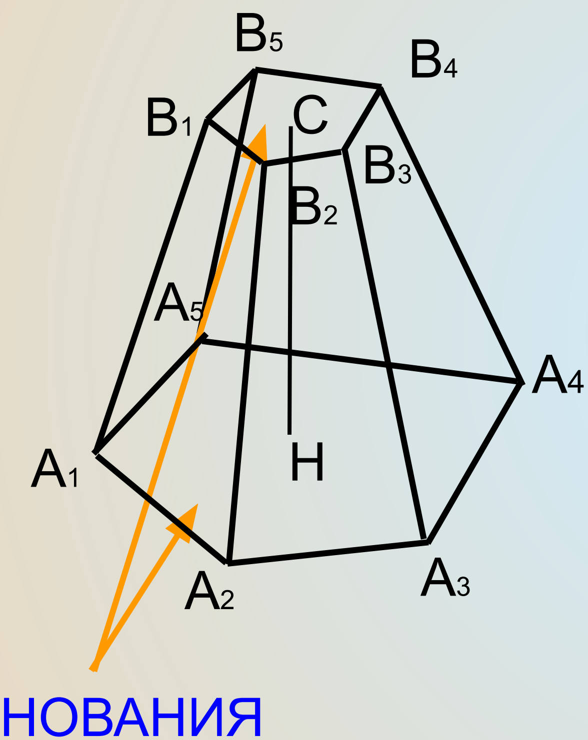
Т.о. $A_1B_1B_2A_2$ – трапеция по определению

Аналогично доказывается и про остальные боковые грани.

ПИРАМИДА

СОДЕРЖАНИЕ

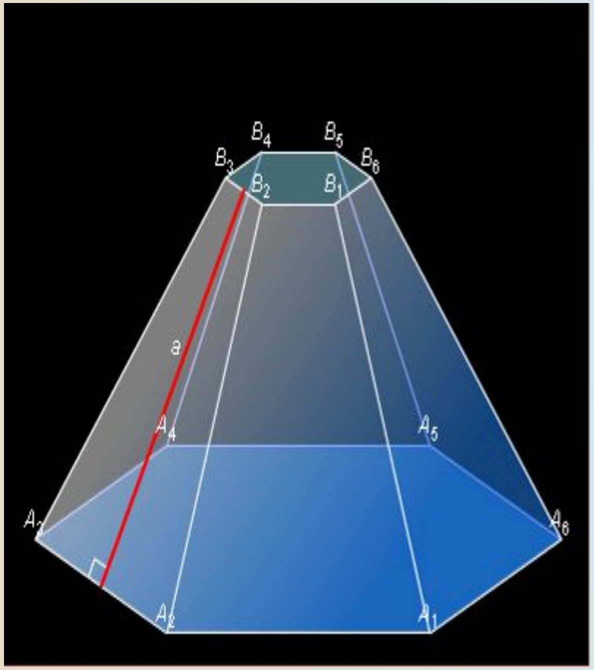
ПОНЯТИЕ УСЕЧЕННОЙ ПИРАМИДЫ



- Многоугольники $A_1A_2A_3A_4A_5$ и $B_1B_2B_3B_4B_5$ - *нижнее и верхнее основания* усечённой пирамиды
- Отрезки A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3… - *боковые ребра* усечённой пирамиды
- Четырёхугольники $A_1B_1B_2A_2$, $A_2B_2B_3A_3$ … - боковые грани усечённой пирамиды. Можно доказать, что все они являются трапециями.
- Отрезок CH – перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки верхнего основания к нижнему основанию – называется *высотой* усечённой пирамиды

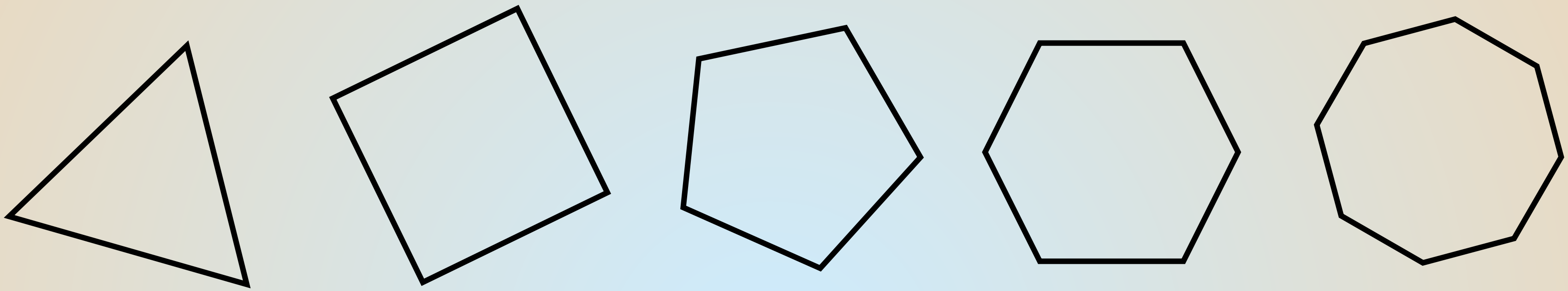
ПИРАМИДА
СОДЕРЖАНИЕ

ПРАВИЛЬНАЯ УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА

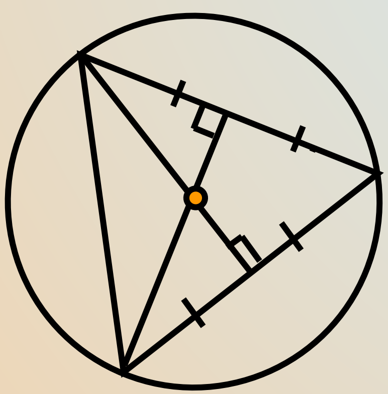


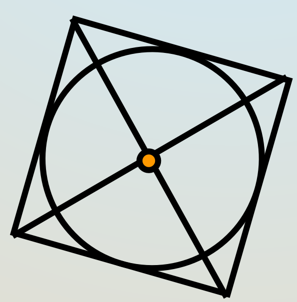
- Усеченная пирамида называется *правильной*, если она получена сечением правильной пирамиды плоскостью, параллельной основанию.
- Основания - правильные многоугольники .
- Боковые грани – равные равнобедренные трапеции (?).
- Высоты этих трапеций называются *апофемами*.

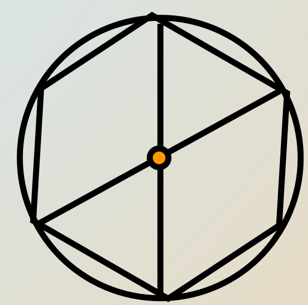
Правильным многоугольником называется многоугольник, у которого все стороны равны и все углы равны.



Центр окружности, описанной около правильного многоугольника совпадает с центром окружности, вписанной в тот же многоугольник, и называется *центром правильного многоугольника*. Для его нахождения достаточно определить в какой точке находится центр либо вписанной либо описанной окружности.

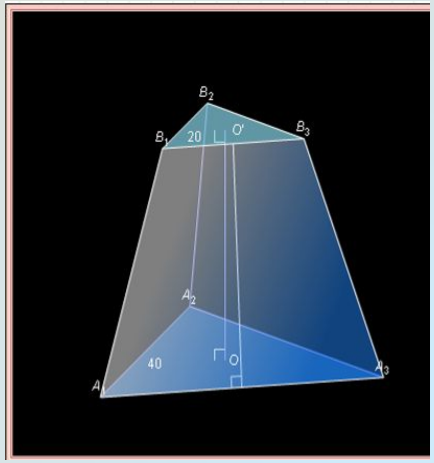


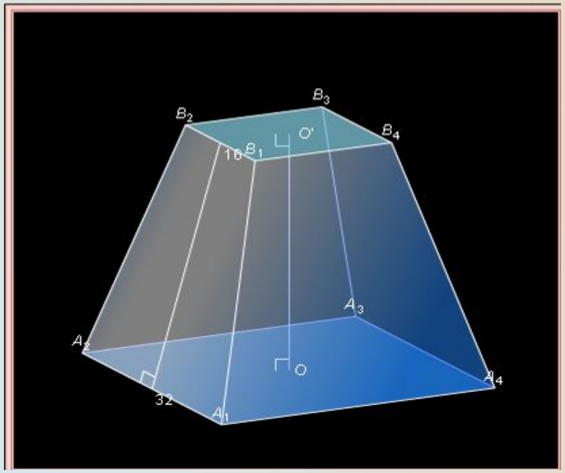


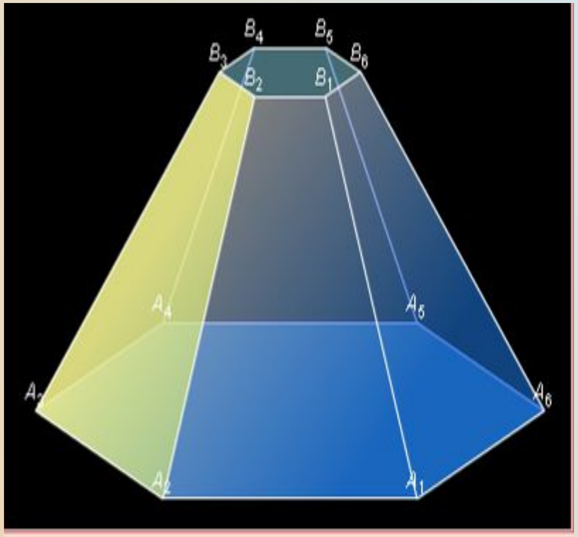


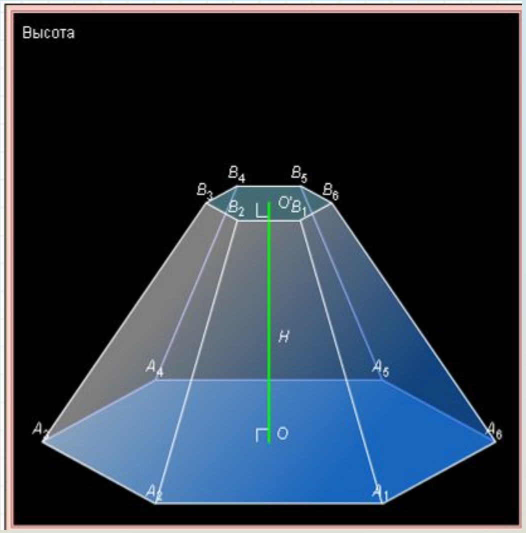
ПИРАМИДА

УСЕЧЕННЫЕ ПИРАМИДЫ









ПИРАМИДА

СОДЕРЖАНИЕ

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ УСЕЧЁННОЙ ПИРАМИДЫ

- *Площадью полной поверхности* (Sполн) пирамиды называется сумма площадей всех её граней: основания и всех боковых граней.
- *Площадью боковой поверхности* (Sбок) пирамиды называется сумма площадей её боковых граней.

Sполн =Sбок+Sосн

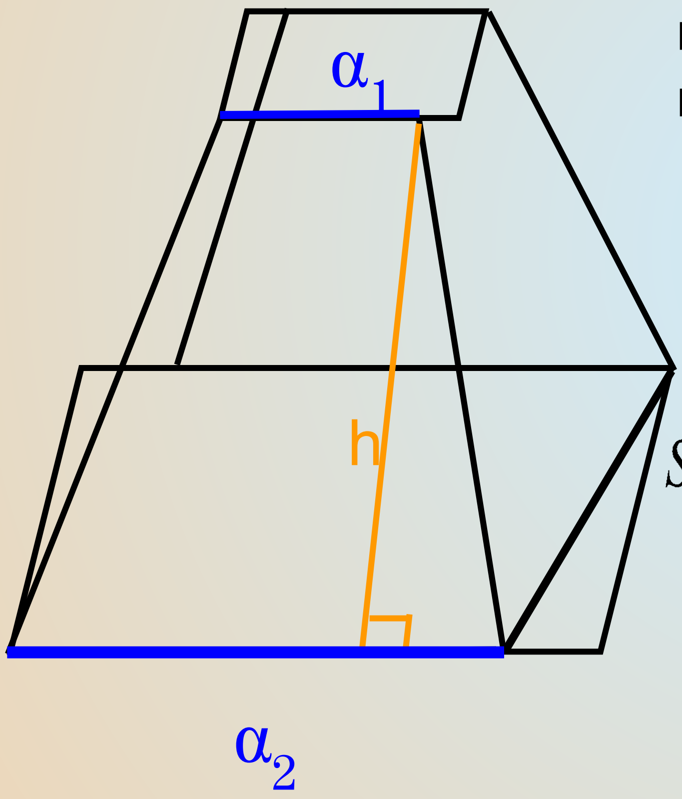
- *Площадь боковой поверхности правильной пирамиды* равна половине произведения периметра основания на апофему.
- *Площадь боковой поверхности правильной усечённой пирамиды* равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему. Доказать.

$$S_{\text{полн.усеч.}}=S_{\text{бок}}+S_{\text{верхн.осн.}}+S_{\text{нижн.осн.}}$$

ПИРАМИДА

СОДЕРЖАНИЕ

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ УСЕЧЁННОЙ ПИРАМИДЫ



Найдем площадь одной из граней правильной n-угольной усечённой пирамиды.

$$S_{грани} = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot h$$

Т.к. эта усечённая пирамида правильная, то

$$S_{бок} = S_{грани} \cdot n = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot h \cdot n = \frac{a_1 n + a_2 n}{2} \cdot h = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot h$$

$$\boxed{S_{бок} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot h}$$

ПИРАМИДА

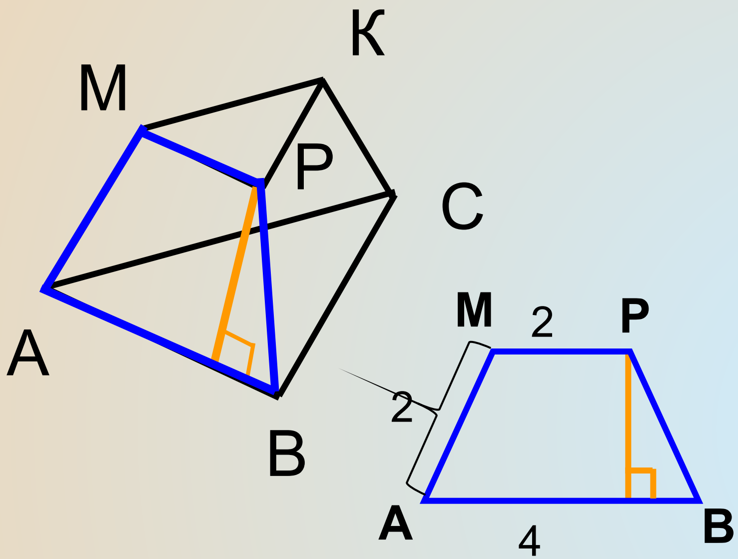
СОДЕРЖАНИЕ

ЗАДАЧА 1

Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 4 см и 2 см, а боковое ребро равно 2 см.

Найдите: 1. апофему пирамиды;
2. площадь полной поверхности.

Ход решения задачи.



Дано: *ABCMPK – правильная усечённая пирамида;*

∆ABC – нижнее основание;

∆MPK – верхнее основание;

AB = 4 см, MP = 2 см, AM = 2 см.

Найти: *1. апофему;*

2. $S_{полн}$.

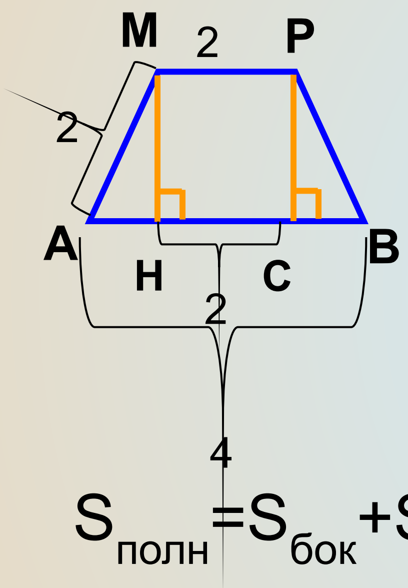
План решения:

1. *Сделать чертеж.*
2. *Построить апофему и определить многоугольник, из которого можно её найти.*
3. *Произвести необходимые вычисления.*

ПИРАМИДА

СОДЕРЖАНИЕ

РЕШЕНИЕ



$$\left.\begin{array}{l} AB=AH+AC+CB \\ CB=AH \\ HC=MP \end{array}\right\} AB=2AH+MP$$

Т.о. $2AH=2$, $AH=1$

ΔAMH – прямоугольный, $\angle AHM=90°$

$AH=\sqrt{3}$ по теореме Пифагора.

$$S_{полн}=S_{бок}+S_{верхн.осн.}+S_{нижн.осн.}$$

$$S_{бок}=\frac{3\cdot 2+3\cdot 4}{2}\cdot\sqrt{3}=9\sqrt{3}$$

$$S_{осн}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$ т.к. в основании правильные треугольники

РЕШЕНИЕ

$$S_{верхн.осн.} = \sqrt{3}$$

$$S_{нижн.осн.} = 4\sqrt{3}$$

$$S_{полн} = 9\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + \sqrt{3} = 14\sqrt{3}\left(см^2\right)$$

Ответ: $\sqrt{3}см, 14\sqrt{3}см^2.$

ЗАДАЧА 2

Плоскость, параллельная плоскости основания правильной четырехугольной пирамиды, делит высоту пирамиды в отношении 1:2, считая от вершины пирамиды. Апофема полученной усеченной пирамиды равна 4 см, а площадь её полной поверхности равна 186 см^2.

Найдите высоту усечённой пирамиды.