12.9. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Применение формулы Ньютона-Лейбница бывает сложным, так как бывает трудно найти первообразную функции.

Поэтому используются численные методы, позволяющие найти приближенное значение определенного интеграла с заданной точностью.

Основной принцип построения формул приближенного вычисления определенного интеграла состоит в замене частичных криволинейных трапеций, образующихся при разбиении отрезка интегрирования, на более простые фигуры.

1. Формула трапеций

Пусть на отрезке [a,b] задана непрерывная неотрицательная функция y=f(x).

Тогда интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

равен площади под кривой y=f(x) на отрезке [a,b].

Мы получим приближенное значение этого интеграла, если вместо площади под кривой возьмем площадь под ломаной, подходящей достаточно близко к этой кривой.

Для этого разобьем [a,b] на n равных частей длиной

$$h = \frac{b-a}{n}$$

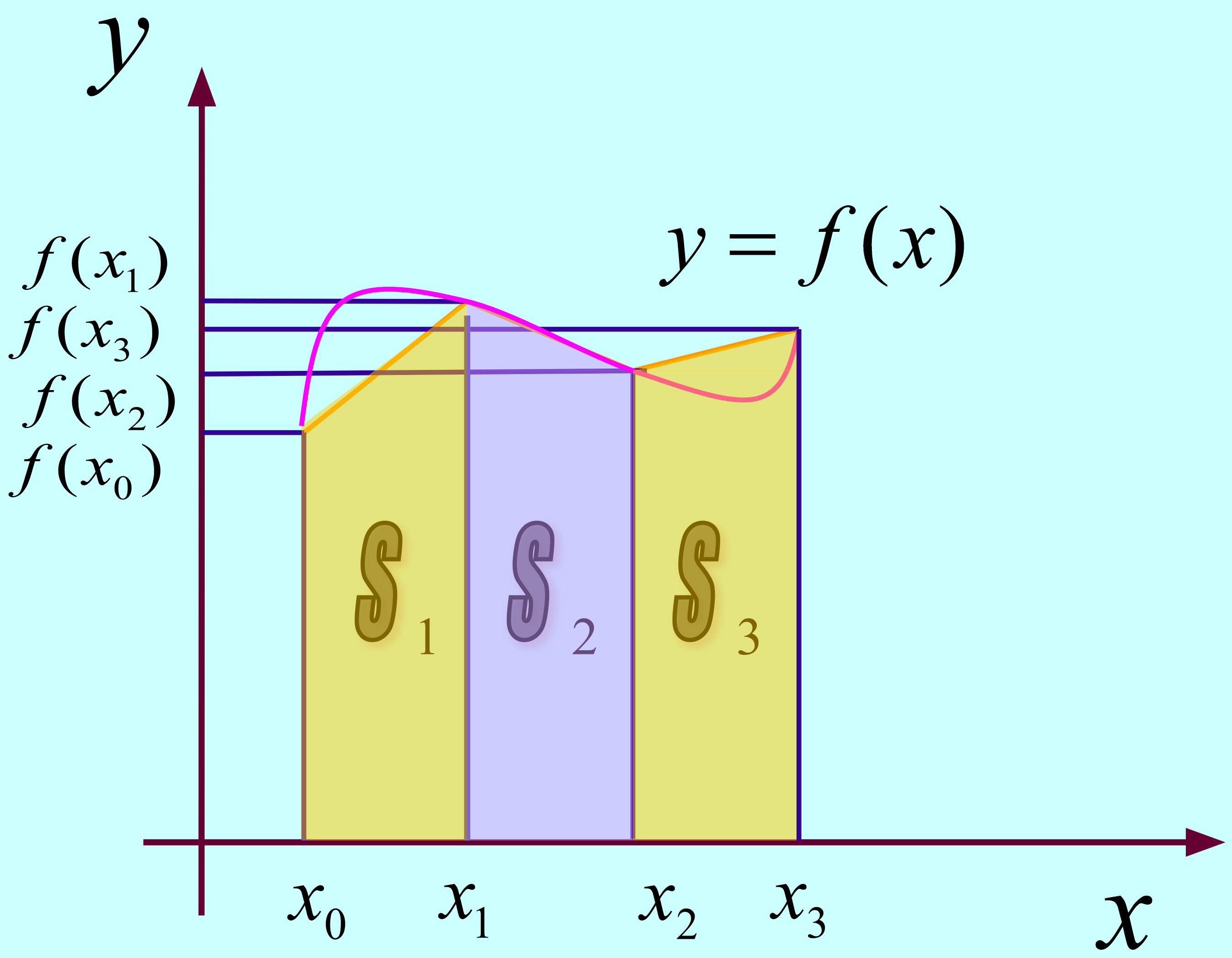
и на каждом из отрезков разбиения

$$[x_{i-1}, x_i]$$

где

$$i = 1,2,\ldots,n$$

заменим участок кривой y=f(x) хордой, стягивающей концевые точки.



y
$y = f(x)$
$f(x_1)$
$f(x_3)$
$f(x_2)$
$f(x_0)$
S_1
S_2
S_3
x_0
x_1
x_2
x_3
x

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_1 + S_2 + \ldots + S_n$$

где каждое слагаемое представляет собой площадь трапеции:

$$S_1 = \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} \cdot h$$

$$S_2 = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \cdot h \qquad \ldots$$

$$S_n = \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \cdot h$$

Тогда

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\cdot h+\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\cdot h+$$

$$+\ldots+\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\cdot h=$$

$$=h\cdot\left(\frac{f(x_0)}{2}+\frac{f(x_1)}{2}+\frac{f(x_1)}{2}+\frac{f(x_2)}{2}+\ldots+\frac{f(x_n)}{2}\right)$$

Все слагаемые, кроме первого и последнего повторяются дважды.

Учитывая, что $h = \dfrac{b-a}{n}$ получаем

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \ldots\right)$$

формула трапеций

Обозначим выражение в правой части как S(n). Тогда абсолютная погрешность от применения формулы трапеций составит

$$\Delta = \left| \int_a^b f(x)dx - S(n) \right|$$

Пусть M_2 - максимальное значение модуля второй производной подынтегральной функции на [a,b]:

$$M_2 = \max_{x \in [a,b]} \left| f''(x) \right|$$

Доказано, что

$$\Delta \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M_2$$

Пример.

Вычислить

$$\int_{1}^{1.5} \frac{1}{x}\,dx$$

при n=5. Оценить погрешность.

Решение.

n=5, следовательно длина отрезков разбиения

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1.5-1}{5} = 0.1$$

$$x_0 = a = 1, \quad x_1 = 1.1, \quad x_2 = 1.2,$$

$$x_3 = 1.3, \quad x_4 = 1.4, \quad x_5 = b = 1.5$$

$$\int_1^{1.5} \frac{1}{x} dx \approx 0.1 \cdot \left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1.5}\right) + \frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.4} \right) \approx 0.4059$$

Найдем погрешность:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

Эта функция монотонно убывает на данном отрезке, следовательно она достигает своего максимального значения в крайней левой точке при x=1.

$$M_2 = f''(1) = \frac{2}{1^3} = 2$$

$$\Delta \le \frac{0.5^3}{12 \cdot 5^2} \cdot 2 = 0.84 \cdot 10^{-3}$$

2. Формула Симпсона

В основе формулы Симпсона лежит замена двух соседних частичных криволинейных трапеций, ограниченных сверху функцией y=f(x) на криволинейную трапецию, ограниченную сверху параболой вида

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

Поэтому формулу Симпсона часто называют формулой парабол.

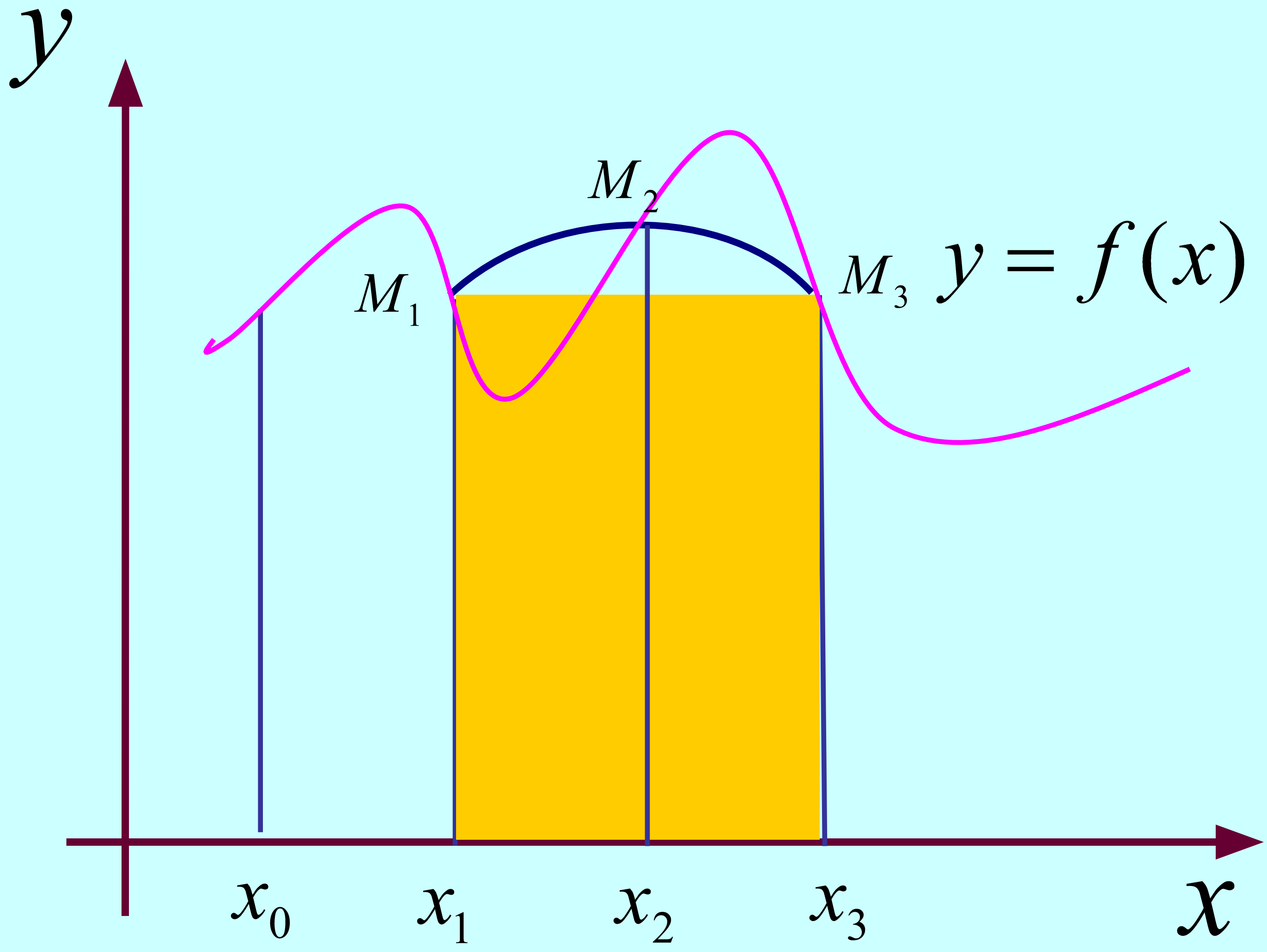
Разобьем [a,b] на 2n равных частей. Тогда кривая разобьется прямыми

$$x = x_i$$

на 2n частей точками M_0, M_1,...M_{2n}.

Через каждую тройку точек M_0, M_1, M_2… проведем параболу. Коэффициенты A,B,C находятся из условия ее прохождения через тройку точек.

Таким образом, криволинейная трапеция, ограниченная сверху функцией y=f(x), заменяется составной фигурой, ограниченной сверху n параболами.



y
M_2
M_1
M_3
$y = f(x)$
x_0
x_1
x_2
x_3
x

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2}) \right)$$

формула Симпсона

Пусть M_4 - максимальное значение модуля четвертой производной подынтегральной функции на [a,b]:

$$M_4 = \max_{x \in [a,b]} \left| f^{(4)}(x) \right|$$

Тогда погрешность вычислений по формуле Симпсона оценивается как:

$$\Delta \le \frac{(b-a)^5}{2880 n^4} \cdot M_4$$

Пример.

Вычислить

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

при n=2.

Решение.

n=2, следовательно полное число узлов равно 5.

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0.25	0.5	0.75	1
y_i	1	0.941176	0.8	0.64	0.5

Тогда

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \approx$$

$$\approx \frac{1}{12}\cdot\left(1+0.5+2\cdot 0.8+4\cdot(0.941176+0.64)\right)\approx 0.785392$$