Случайные события

1) Интуитивное представление о вероятности

2) Пространство элементарных событий

3) Алгебра событий

4) Вероятностное пространство

5) Свойства вероятностей

6) Повторение испытаний

Интуитивное представление о вероятности

1) Апри**о**рный подход (*a priori* – до опыта)

Классическое определение вероятности события А

$$\boxed{P(A)=\frac{m}{n}}$$

Принцип равных возможностей

n - общее количество случаев

m - количество благоприятных случаев

2) Апостери**о**рный подход (*a posteriori* – после опыта)

Статистическое определение вероятности события А

$$\boxed{P(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n}}$$

n - общее количество опытов

m - количество опытов, в которых наблюдалось событие А

Пространство элементарных событий

<u>Неопределяемые понятия</u>

Вероятностный эксперимент (опыт)

Элементарное событие (исход опыта)

Вероятность элементарного события

<u>Основные определяемые понятия и обозначения</u>

$\boxed{\Omega}$ Пространство элементарных событий

$A \subseteq \Omega$ Случайное событие А

$A = \{\omega_1, \omega_2, \ ..., \omega_k\}$ Благоприятные исходы

$0\,(\phi)$ и $1(U)$ Невозможное и достоверное события

Алгебра событий

$\boxed{\Im}$ Случайное событие А $A \subseteq \Omega$

$\overline{A}$ Противоположное событие

$A + B$ и $A \cdot B$ Сумма и произведение событий

$A \cdot B = 0$ Несовместные события

<u>Аксиомы алгебры событий</u>

$$A1.\quad \Omega \in \Im$$

$$A2.\ A \in \Im \Rightarrow \overline{A} \in \Im$$

$$A3.\ A_i \in \Im \Rightarrow \sum_i A_i \in \Im$$

<u>Законы алгебры событий</u> (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность, де Моргана, идемпотентность, двойное отрицание, поглощения)

Вероятностное пространство

Ω Пространство элементарных событий

$\Im$ Алгебра событий

$\boxed{P(A)}$ Вероятность события А $\boxed{P:\Im \to [0;1]}$

P – Неотрицательная аддитивная вероятностная мера

<u>Аксиомы вероятности</u>

$A4.\quad P(A) \geq 0; \qquad A5.\quad P(\Omega) = 1$

$A6.\quad A_i \cdot A_j = 0 \quad (i \neq j) \Rightarrow$

$$P\left(\sum_i A_i\right) = \sum_i P(A_i)$$

Вероятностное пространство $\boxed{(\Omega, \Im, P)}$

Классическое вероятностное пространство

$$\boxed{\left(\Omega, \Im, P\right)}$$

1) Пространство элементарных событий конечно

$|\Omega| = n$ Все исходы равновозможны

2) Алгебра событий – все подмножества $\mathbf{\Omega}$

$$A = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m\} \in \Im$$

3) Классическое определение вероятности события A

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n}}$$

n - общее количество исходов

m - количество благоприятных исходов

Геометрическое вероятностное пространство

$$\boxed{\left(\Omega, \Im, P\right)}$$

1) Пространство элементарных событий несчетно

$\left|\Omega\right| = \aleph$ Все исходы равновозможны

2) Алгебра событий – все измеримые подмножества $\boldsymbol{\Omega}$

$A \in \Im$ измеримое множество

3) Геометрическое определение вероятности

$$\boxed{P(A) = \frac{мера(A)}{мера(\Omega)}}$$

мера – неотрицательная аддитивная функция (длина отрезка, площадь фигуры, объем тела)

Свойства вероятностей

1 $P(\phi)=0$

$$P(\Omega)\overset{(A5)}{=}1 \;\Rightarrow\; 1=P(\Omega+\phi)\overset{(A6)}{=}$$

$$=P(\Omega)+P(\phi)\Rightarrow 1=1+P(\phi)\Rightarrow \quad P(\phi)=0$$

2 $P(\overline{A})=1-P(A)$

$$P(\Omega)=P(A+\overline{A})\overset{(A6)}{=}P(A)+P(\overline{A})$$

$$1=P(A)+P(\overline{A}) \;\Rightarrow\; P(\overline{A})=1-P(A)$$

3 $A\subseteq B \Rightarrow P(A)\le P(B)$

$$B=A+B\cdot\overline{A} \overset{(A6)}{\Rightarrow}$$

$$P(B)=P(A)+P(B\cdot\overline{A}) \overset{(A4)}{\Rightarrow} P(A)\le P(B)$$

Свойства вероятностей

4 Теорема сложения

$$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)}$$

$$B=B\cdot A+B\cdot\overline{A} \qquad P(B)=P(B\cdot A)+P(B\cdot\overline{A})$$

$$A=A\cdot B+A\cdot\overline{B} \qquad P(A)=P(A\cdot B)+P(A\cdot\overline{B})$$

$$P(A)+P(B)=P(\overline{A}\cdot B)+2P(A\cdot B)+P(A\cdot\overline{B}) \qquad (1)$$

$$A+B=A\cdot\overline{B}+A\cdot B+B\cdot\overline{A}$$

$$P(A+B)=P(A\cdot\overline{B})+P(A\cdot B)+P(B\cdot\overline{A}) \qquad (2)$$

Свойства вероятностей

5 Теорема умножения

$$\boxed{P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B|A)=P(B)P(A|B)}$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cdot B)}{P(B)},\qquad P(B)>0$$

Условная вероятность

Независимые события

$$P(A|B)=P(A)$$

<u>Критерий независимости</u>

A и *B* независимы $\Leftrightarrow P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$

События, независимые в совокупности