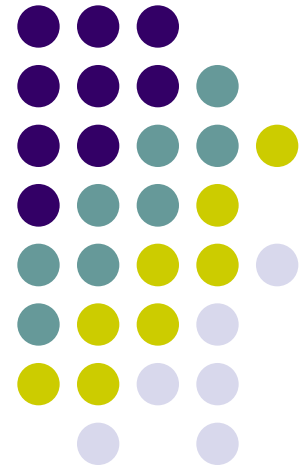


# Гиперсфера

Работу выполнил:  
ученик 11б класса  
Мартыненко Александр

Учитель:  
Черемисина Г. А.





✓ *Отражение в мозгу человека окружающего реального («объективного») мира есть **субъективное восприятие пространства** человеком. Нарушение субъективных характеристик приводит к иллюзиям.*

✓ *Что такое **размерность пространства** и как узнать, какова размерность пространства, в котором мы живем?*

✓ *Согласно предложенной модели, наше пространство является четырехмерной сферой.*

*Отсюда следует **насуцная необходимость образного представления**, если уж не самой сферы, то **хотя бы ее свойств**.*

*Нижеследующие размышления имеют цель помочь читателю интуитивно приблизиться к пониманию этой геометрической формы.*

# Содержание



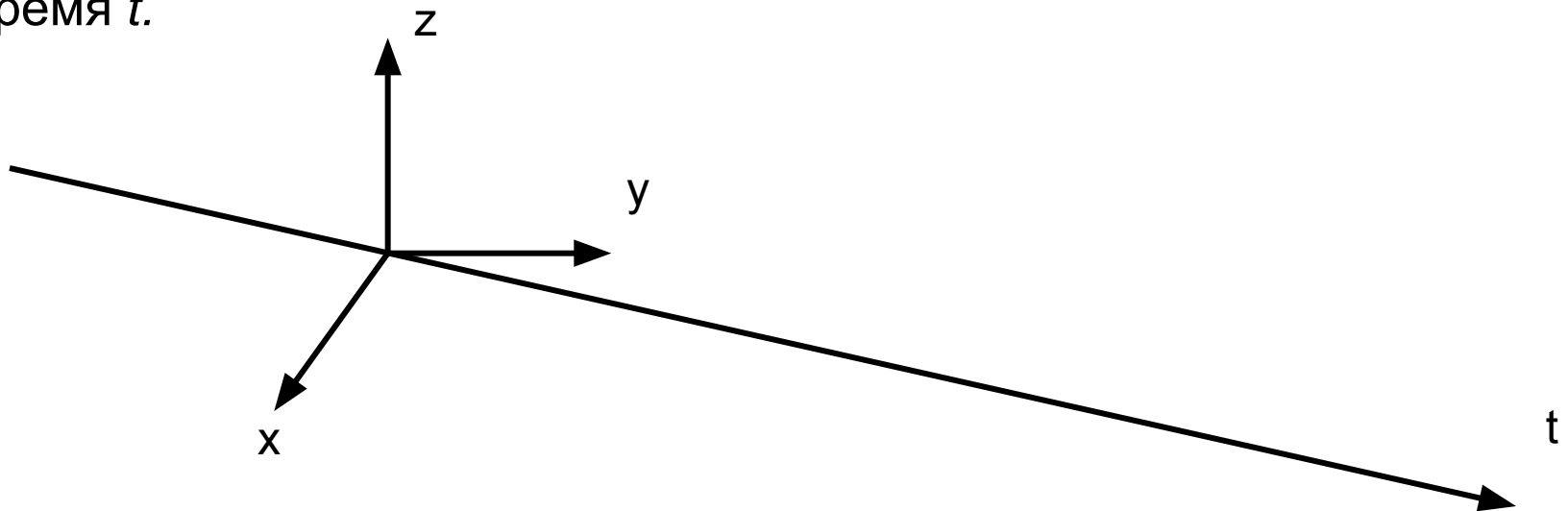
- Введение
- Основная часть
- Заключение
- Используемые ресурсы

# Введение

## Четырёхмерное пространство



Минковский и Эйнштейн считали, что трёхмерное пространство и время в отдельности не существуют и что реальный мир является четырёхмерным. Для этого они объединили трёхмерное евклидово пространство со временем в четырёхмерное пространство, взяв в качестве четвёртой оси системы координат расстояние, которое свет проходит за время  $t$ .



# Цель:



- Интуитивно приблизиться к пониманию этой геометрической формы гиперсферы
- Дать первоначальное знакомство с четырёхмерным пространством на примере гиперсферы (познакомится с определением гиперсферы, её уравнением и наглядным изображением).

Для создания моделей четырёхмерных фигур в работе были использованы аналогии и закономерности фигур низших размерностей: точка, отрезок, окружность.



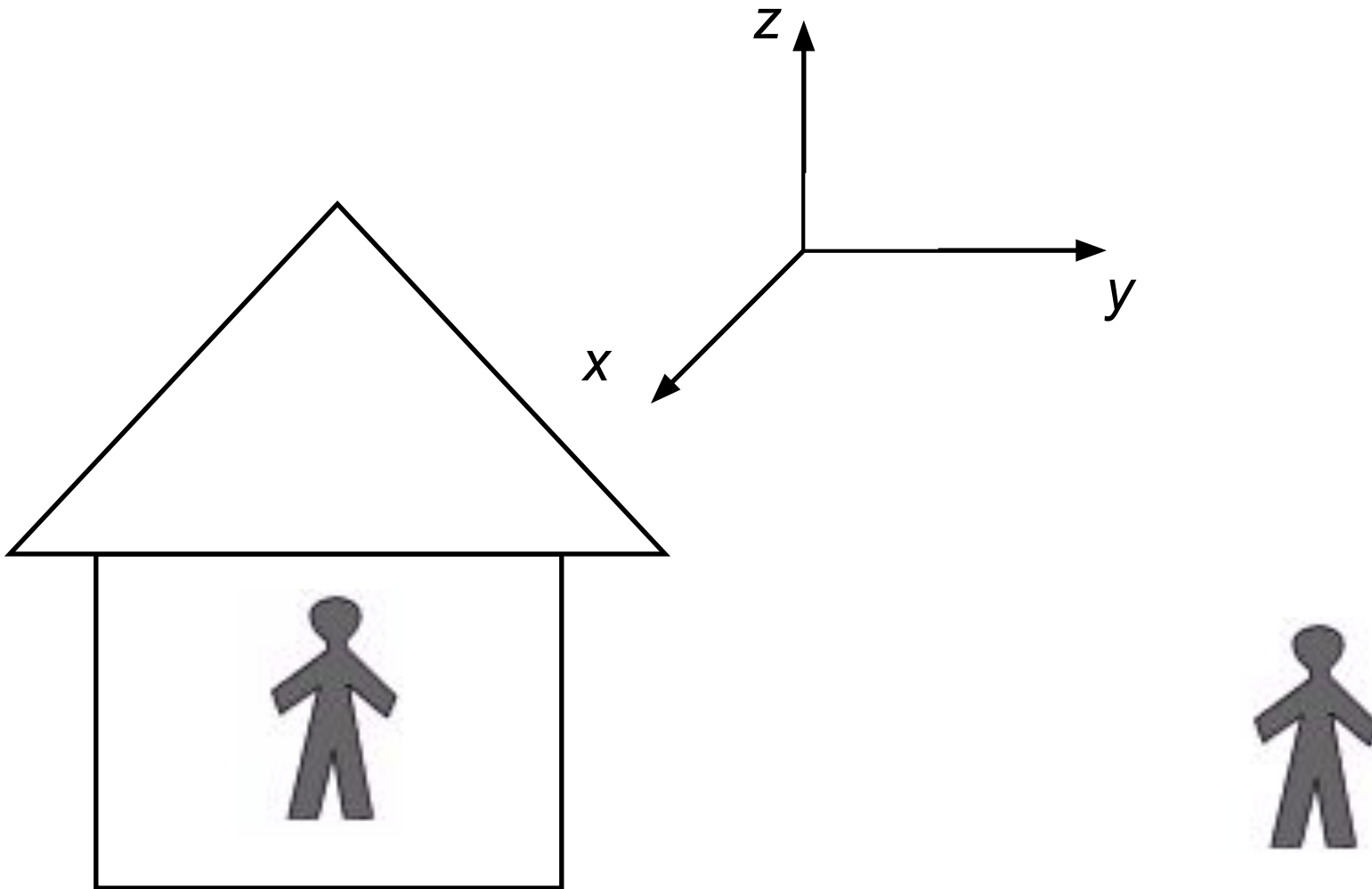
# Основная часть

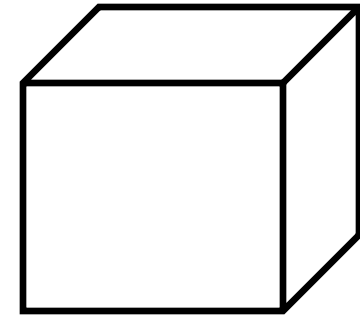
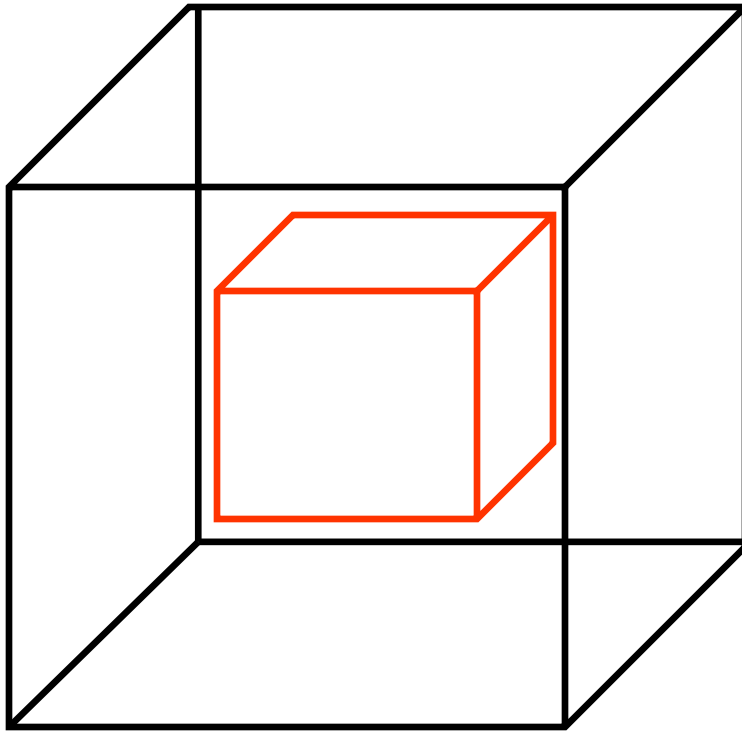


- Четырехмерное пространство
  - ✓ Физический способ измерения размерности
  - ✓ Изменение симметрии
  - ✓ Вместимость пространства
- Гиперсфера
  - ✓ Определение
  - ✓ Способы представления гиперсферы
    - Аналитическая модель гиперсферы
    - Динамическая модель гиперсферы
- Гипершар
  - ✓ Определение
  - ✓ Гиперобъем гипершара
  - ✓ Объем границы гипершара



# Физический способ измерения размерности

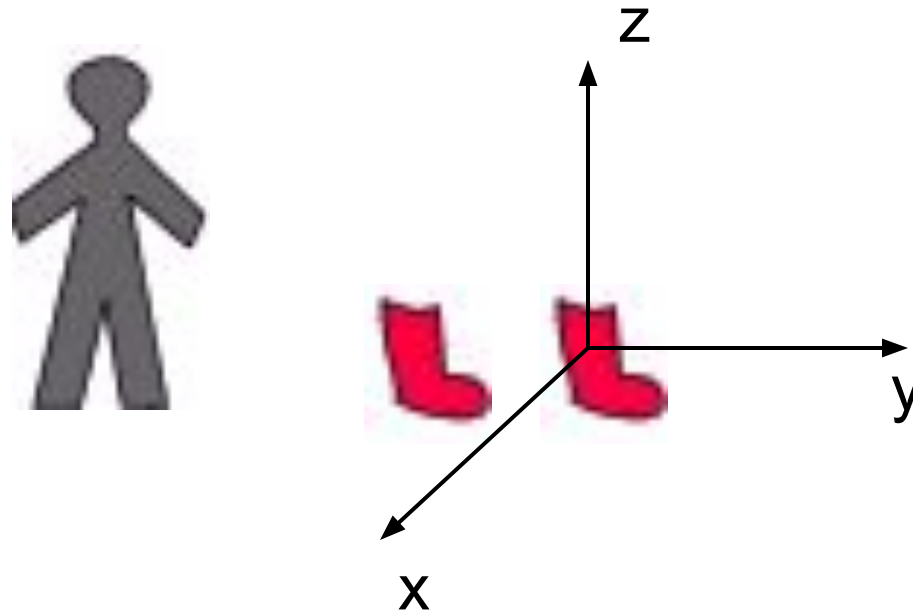




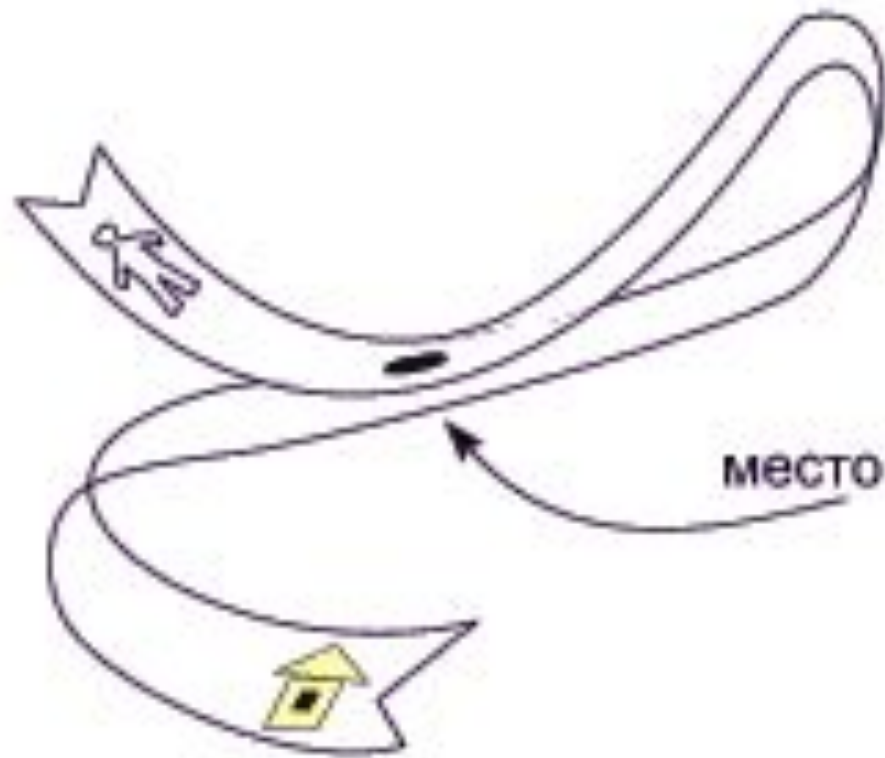
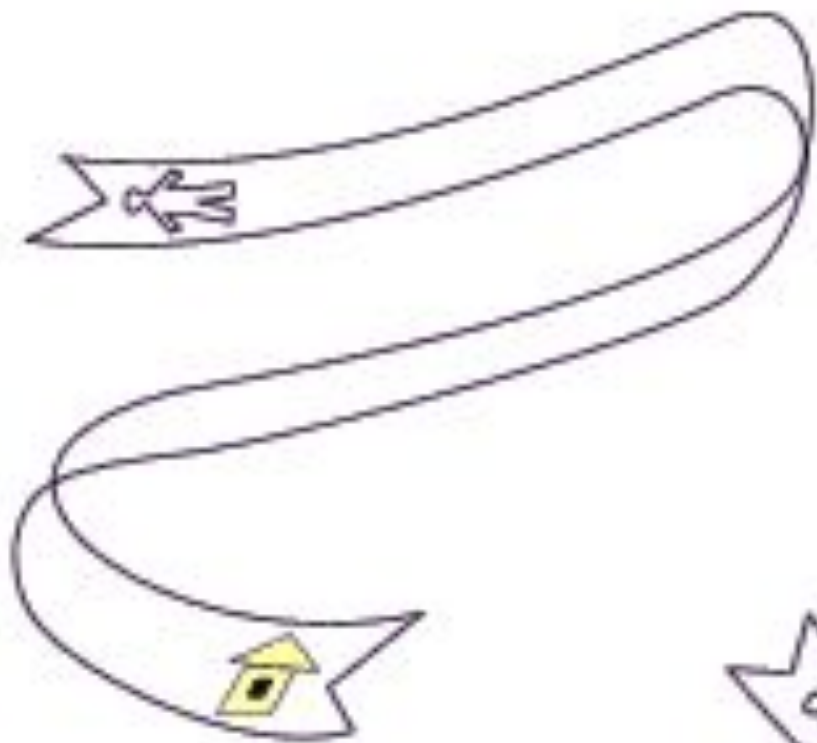
Можно нарушить замкнутость контура при помощи увеличения *мерности пространства*.



# Изменение симметрии

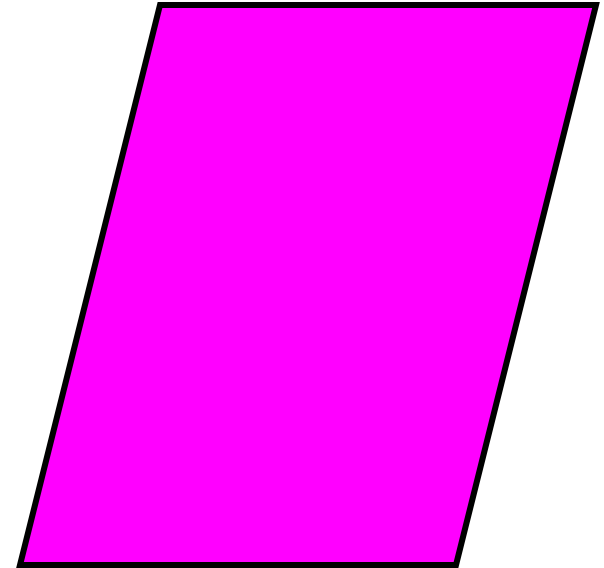
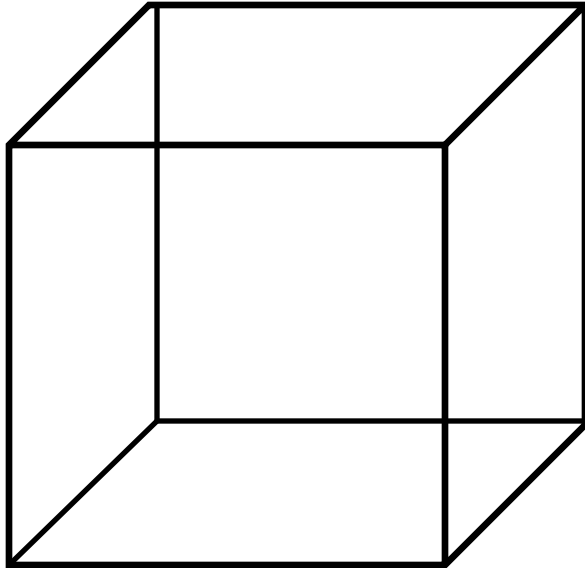


В пространстве размерности  $(n+1)$  можно менять симметрию объектов, взятых из пространства размерности  $n$ .



место склейки

# Вместимость пространства



Пространство с увеличением размерности  $n$  становится все более вместительным.



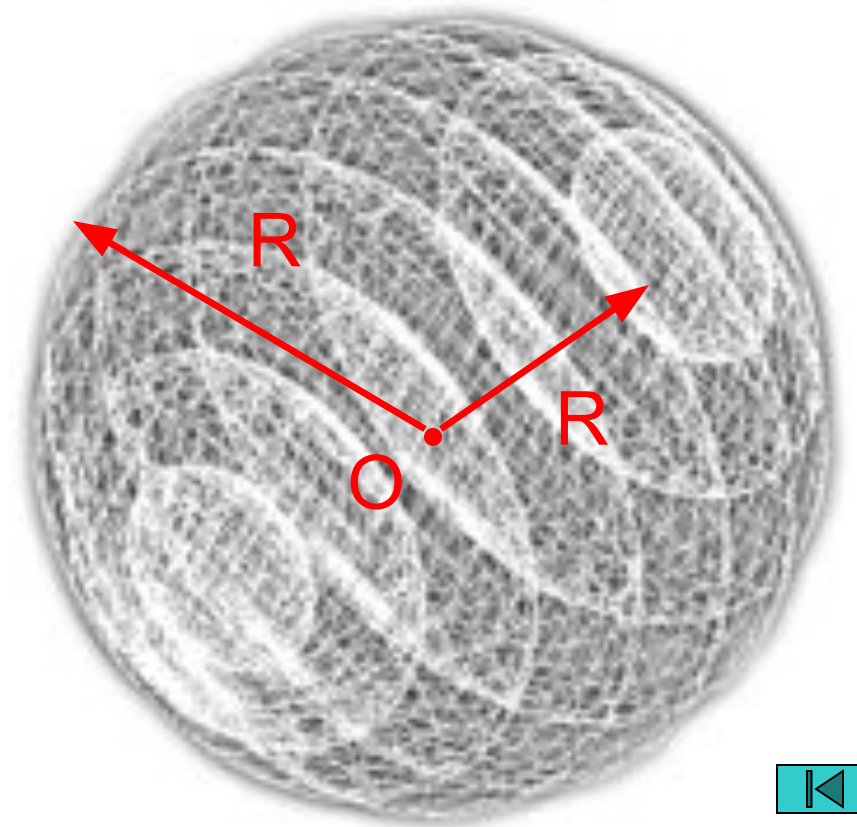
# Гиперсфера



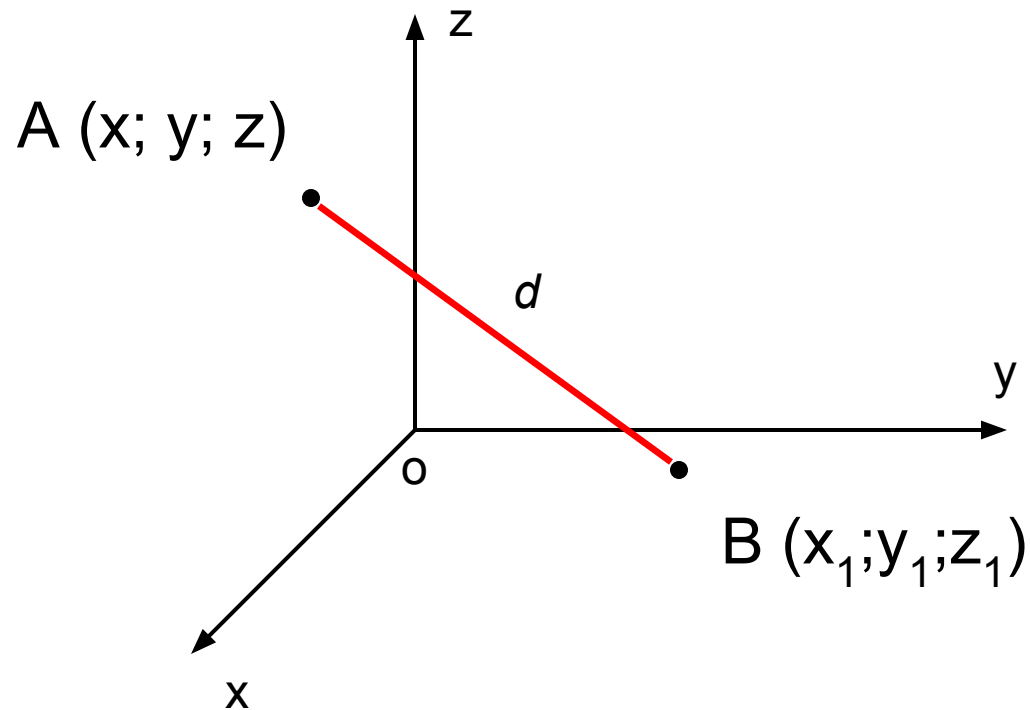
*Гиперсфера* – геометрическая фигура, состоящая из всех точек четырехмерного пространства, расположенных на данном расстоянии от данных точек.

**O** – центр гиперсферы

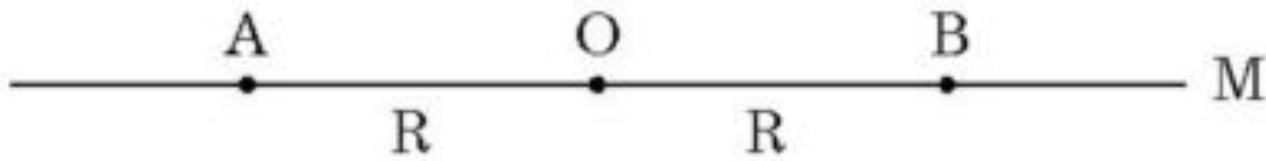
**R** – радиус гиперсферы



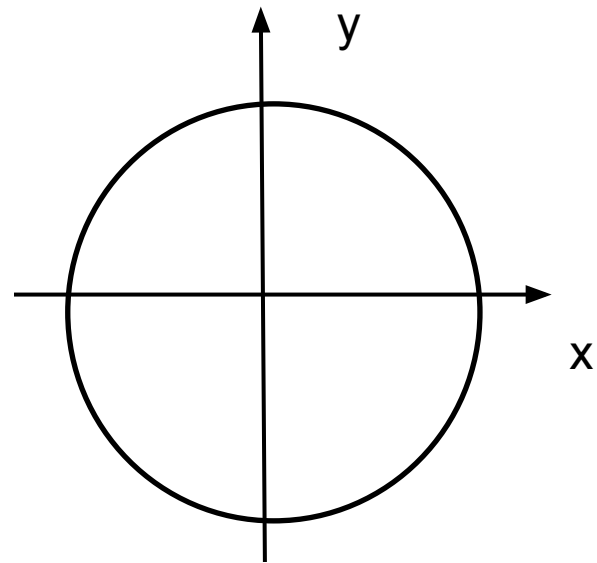
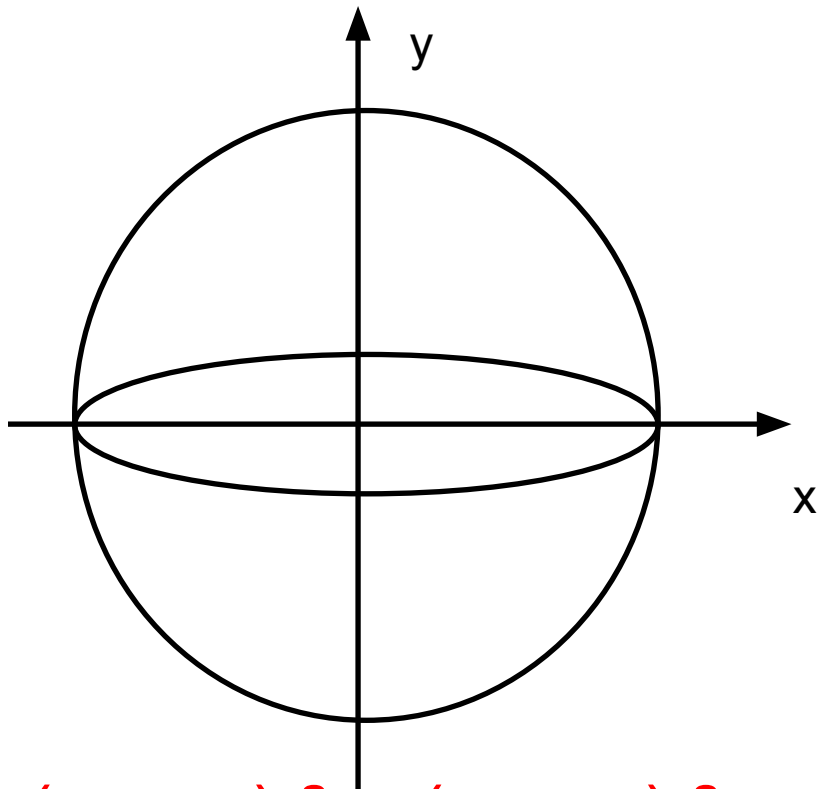
# Аналитическая модель гиперсферы



$$d = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$$

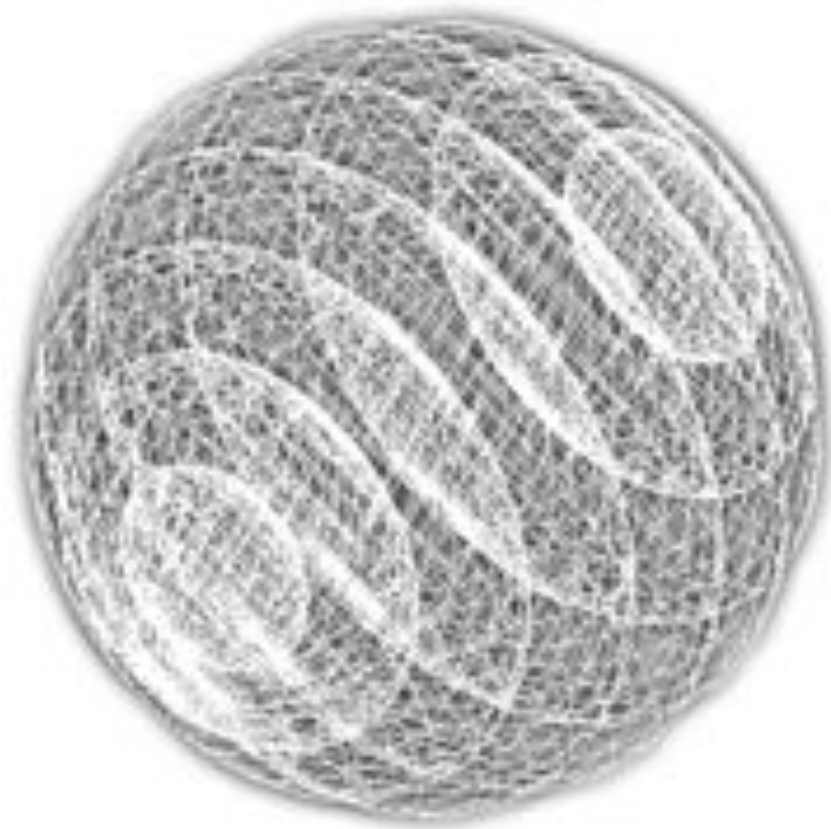


$$(x - x_1)^2 = R^2$$



$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R^2$$

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = R^2$$



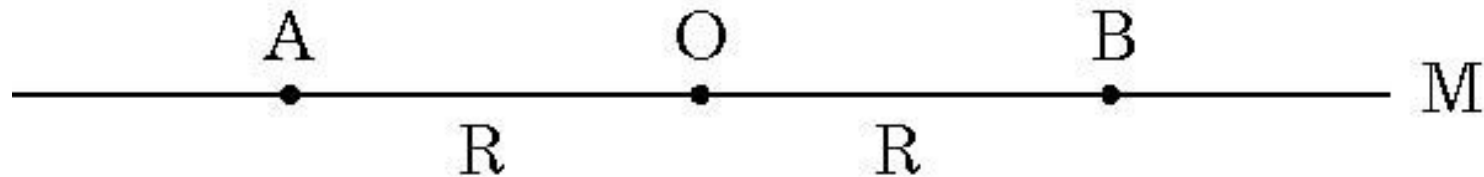
$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 + (t - t_1)^2 = R^2$$



# Динамическая модель гиперсферы



## Способ 1



$\angle AOB = 180^\circ$  – одномерная сфера

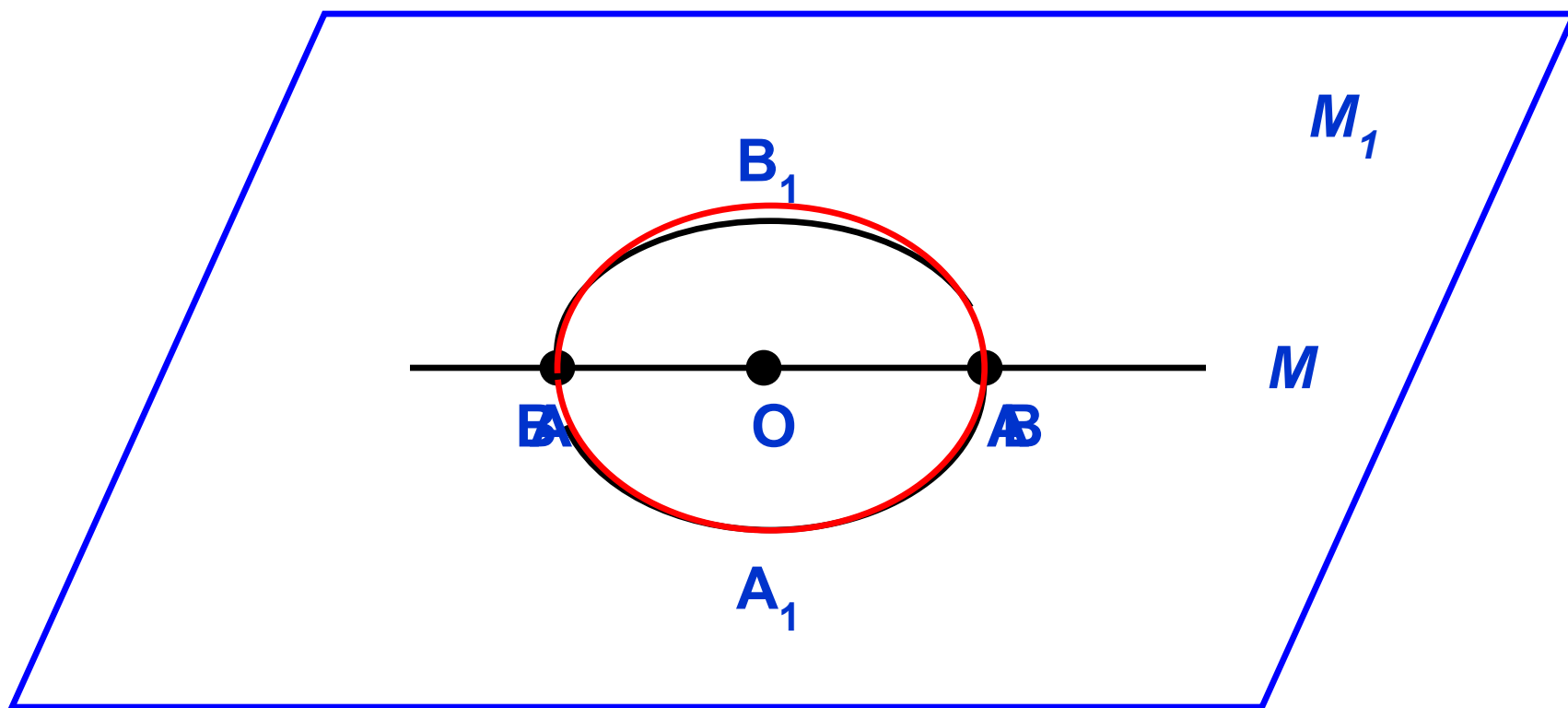
**M** – прямая, модель одномерного пространства

**O** – центр одномерной сферы

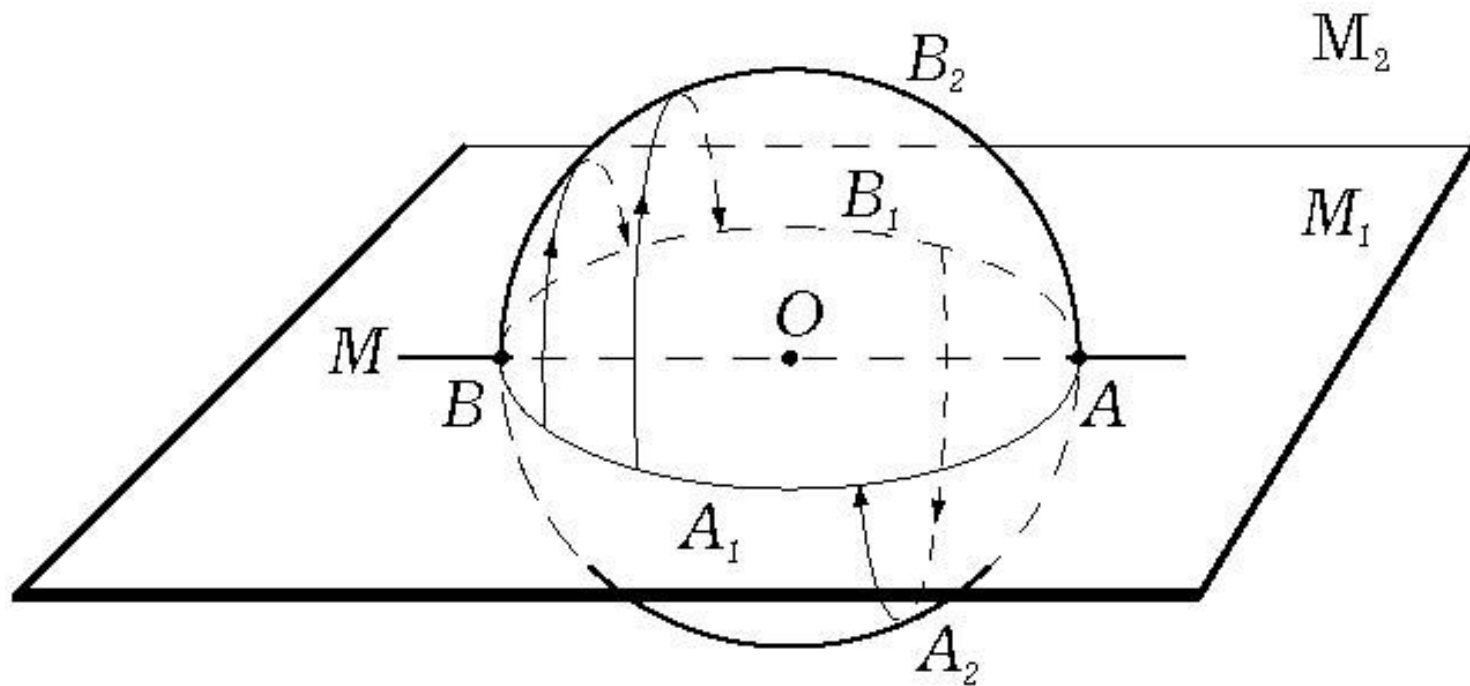
**R** – радиус одномерной сферы



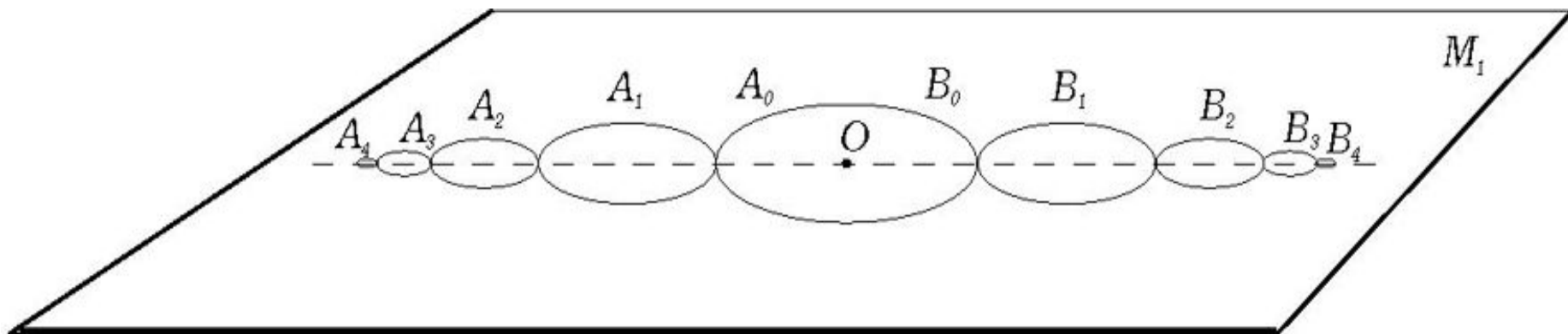
# Способ 1



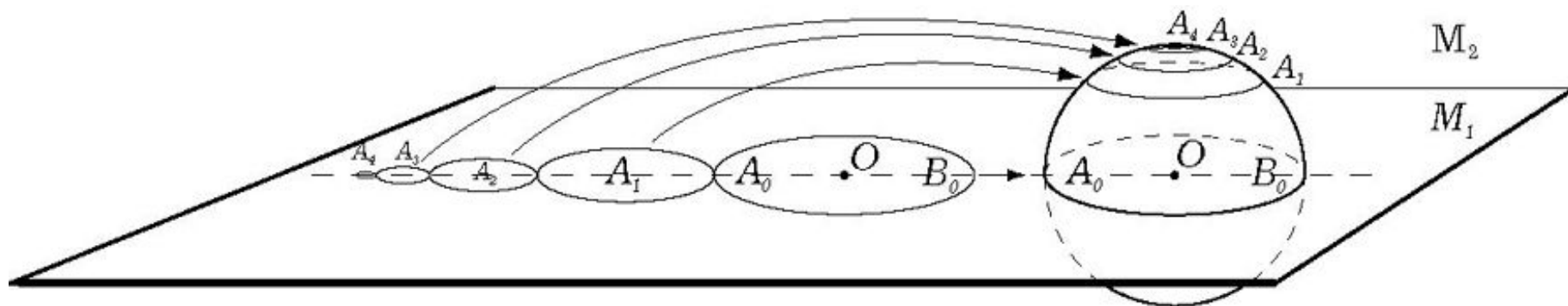
# Способ 1



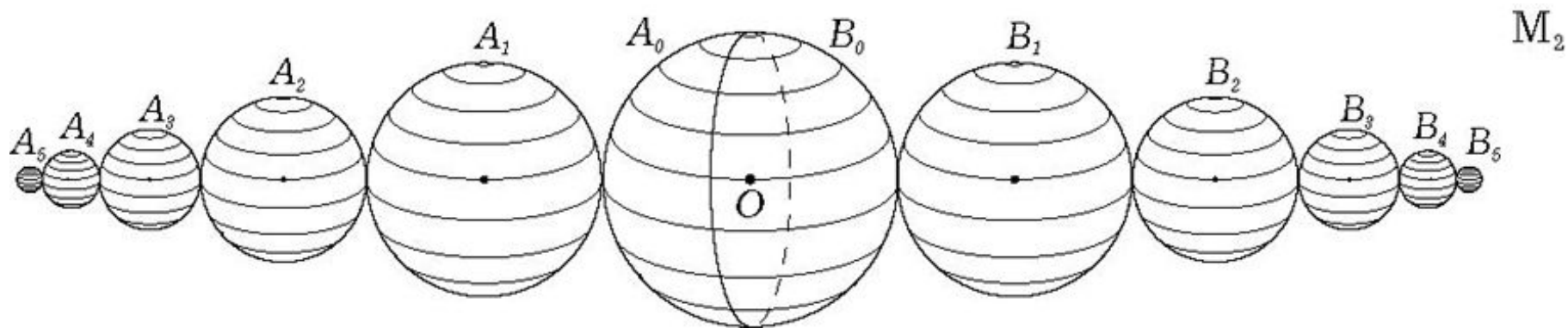
## Способ 2



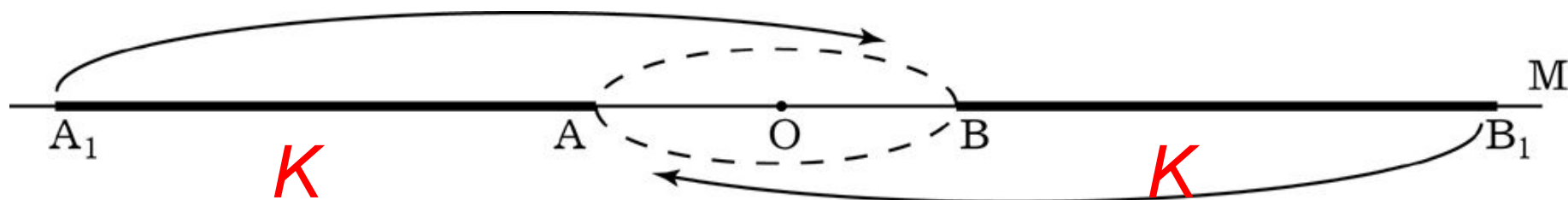
# Способ 2



# Способ 2

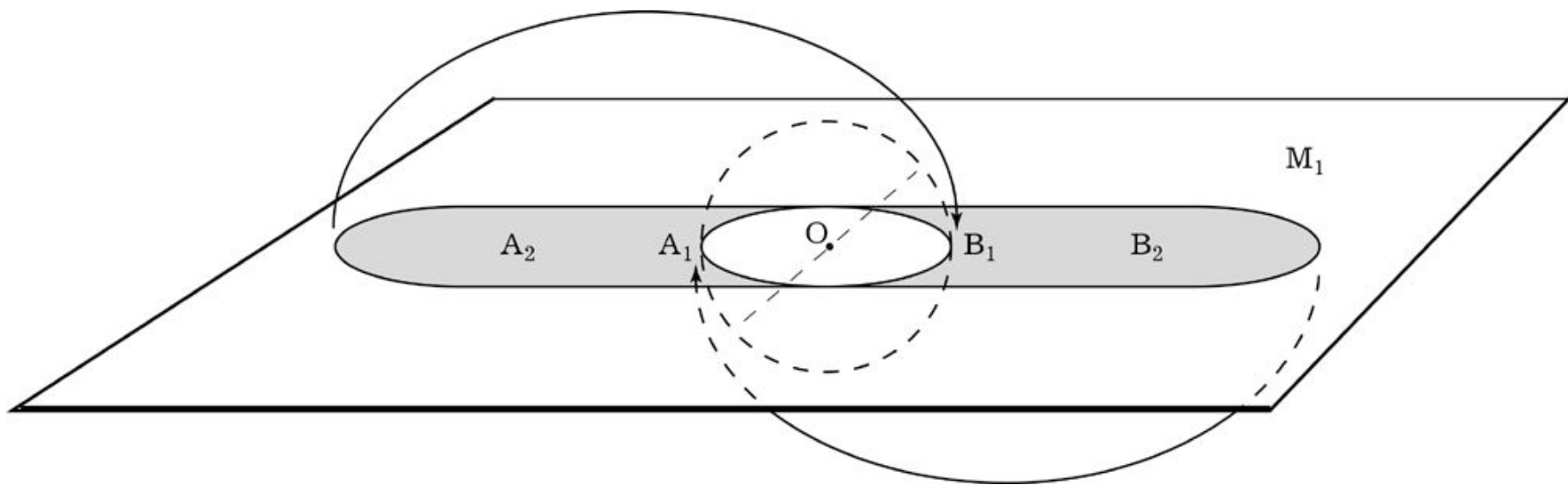


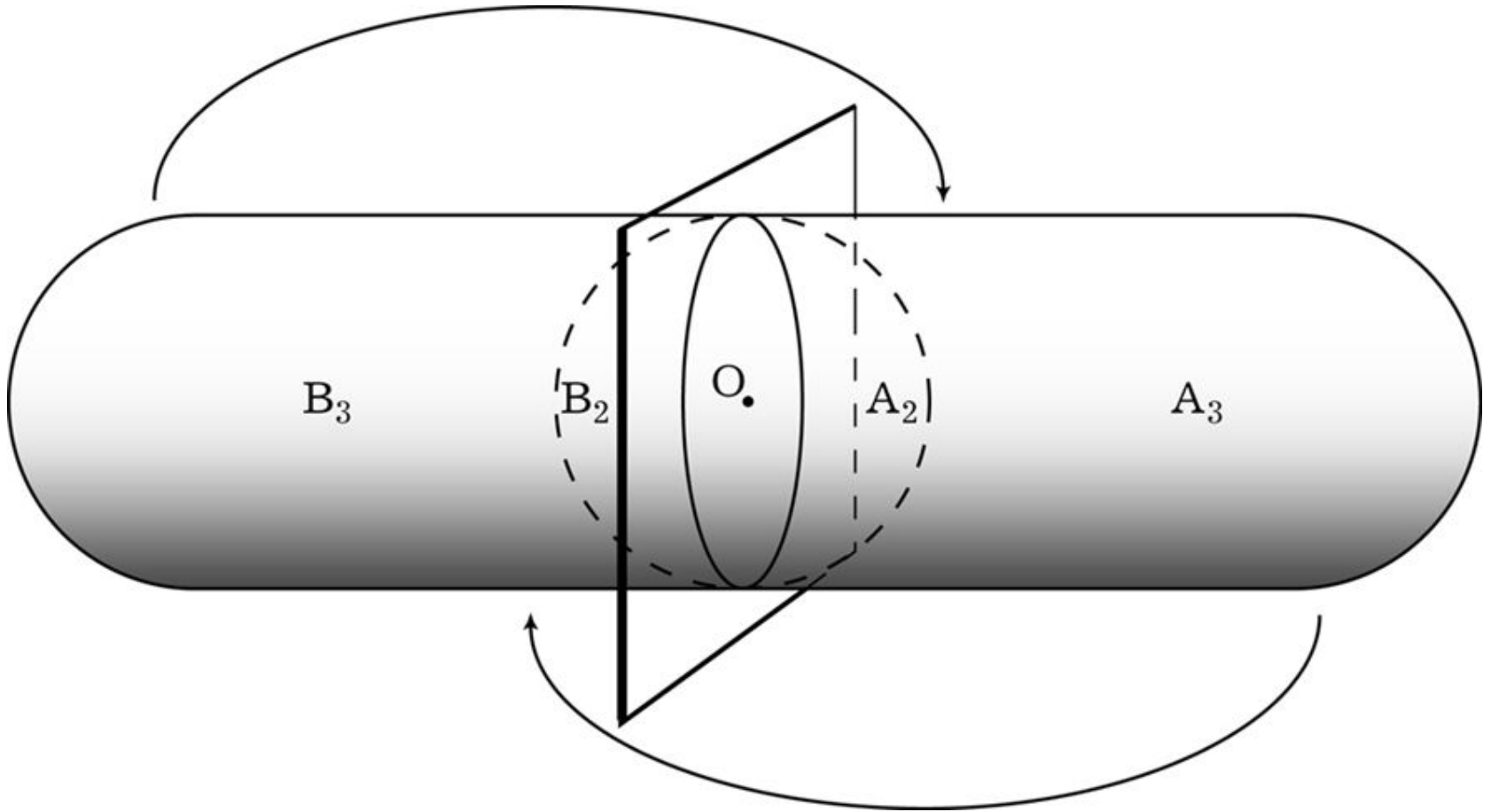
# Относительные размеры четырёхмерной сферы



$$AO=R$$

$$K=3R$$







# Гипершар



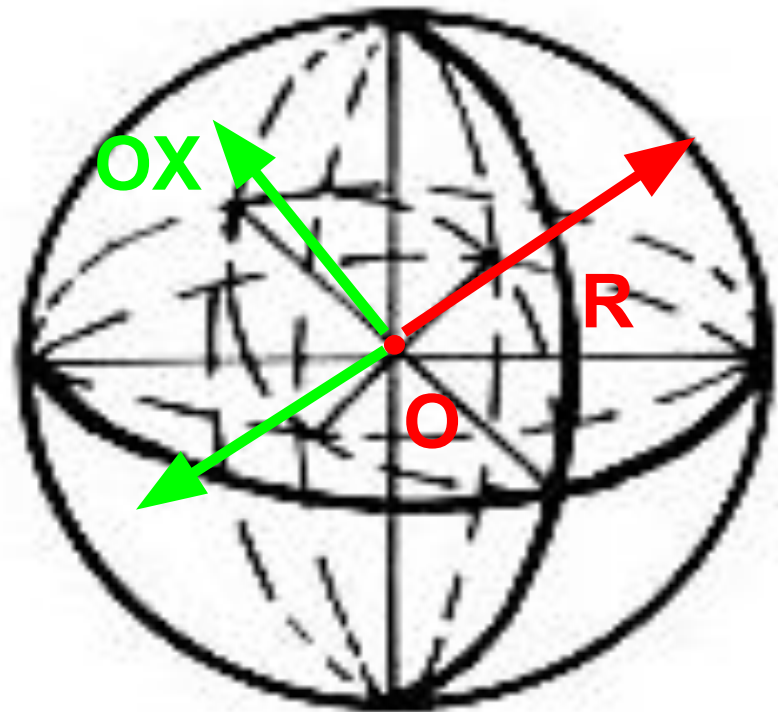
*Гипершар* – геометрическое тело, состоящее из всех точек четырехмерного пространства, для которых верно неравенство

$$OX \leq R$$

**O** – центр гипершара,

**R** – его радиус,

**OX** – расстояние от точки **O** до произвольной точки гипершара.



# Гиперобъем гипершара



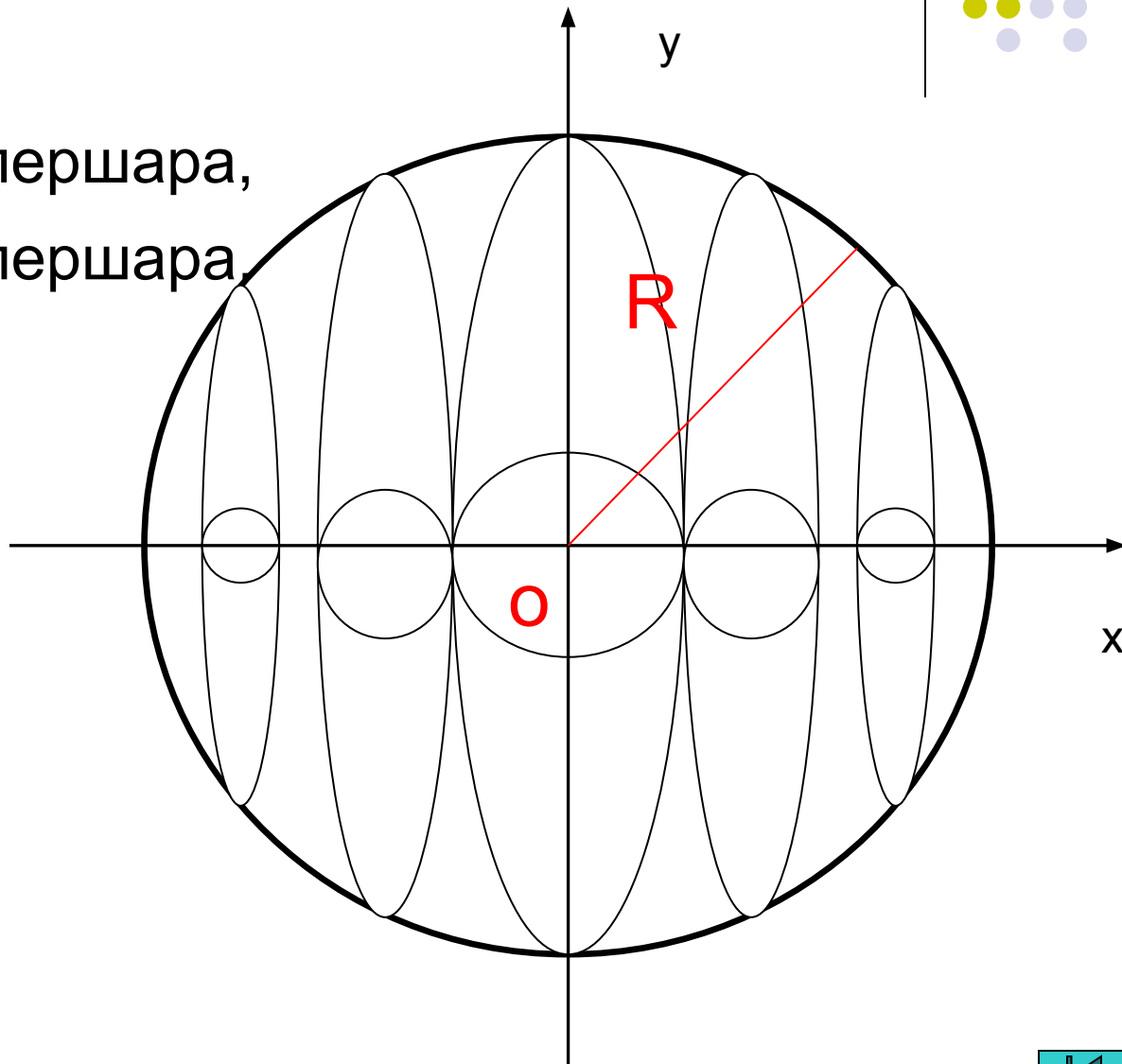
Теорема.

Если  $R$  – радиус гипершара,

$W$  – гиперобъем гипершара,

то

$$W = \frac{\pi^2 R^4}{2}$$



[Доказательство](#)



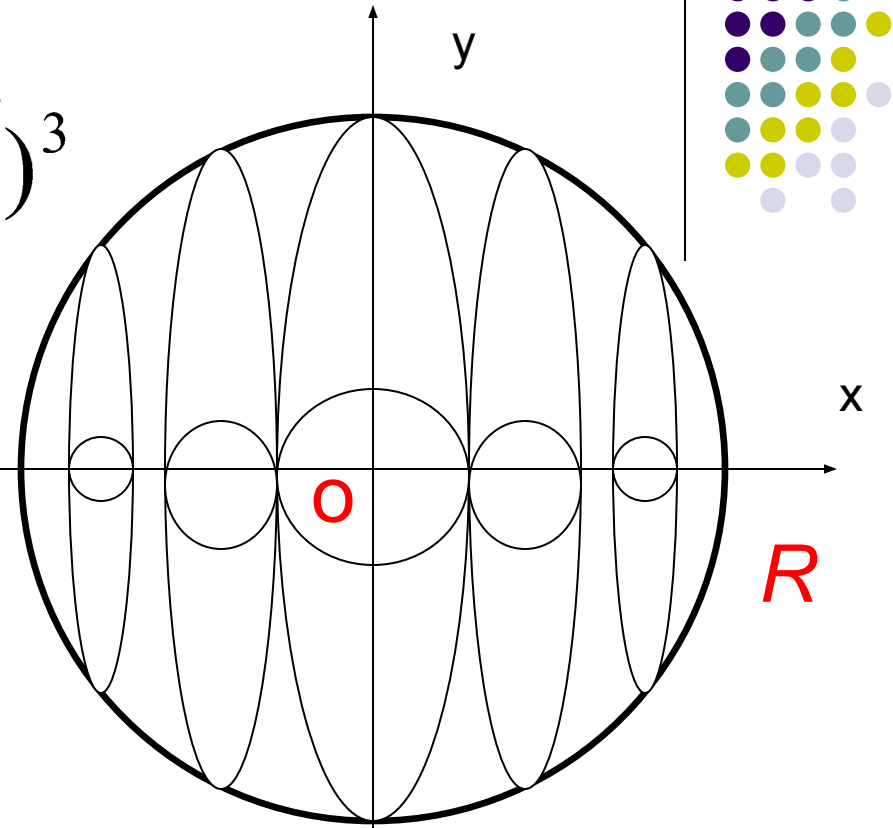
$$V(x) = \frac{4}{3} \pi (\sqrt{R^2 - x^2})^3$$

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$W = \int_{-R}^R V(x) dx = \int_{-R}^R \frac{4}{3} \pi (\sqrt{R^2 - x^2})^3 dx =$$

$$= \frac{4}{3} \pi \int_{-R}^R (\sqrt{R^2 - x^2})^3 dx$$



$$W = \frac{4}{3} \pi \int_{-R}^R (\sqrt{R^2 - x^2})^3 dx$$



$$x = R \sin t \quad dx = R \cos t dt$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{R^2 - x^2})^3 &= (\sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 t})^3 = \\ &= (\sqrt{R^2(1 - \sin^2 t)})^3 = (\sqrt{R^2 \cos^2 t})^3 = \\ &= (R \cos t)^3 = R^3 \cos^3 t \end{aligned}$$



$$\text{a) } -R = R \sin t, \quad -1 = \sin t, \quad t = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{b) } R = R \sin t, \quad 1 = \sin t, \quad t = \frac{\pi}{2}$$

$$W = \frac{4}{3} \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^3 \cos^3 t \cdot R \cos t \, dt = \frac{4}{3} \pi R^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \, dt$$



$$W = \frac{4}{3} \pi R^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \, dt$$

$$W = \frac{4}{3} \pi R^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \, dt = \frac{4}{3} \pi R^4 \cdot \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi^2 R^4}{2}$$
$$\cos^4 t = \frac{1}{8} (3 + 4 \cos 2t + \cos 4t)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8} (3 + 4 \cos 2t + \cos 4t) \, dt = \frac{3\pi}{8}$$
$$\frac{\pi^2 R^4}{2} = \frac{\pi^2 R^4}{2}$$





# Объем границы гиперсферы

Если **R** – радиус гипершара,  
**V** – объем границы гиперсферы,  
то

$$V = 2\pi^2 R^3$$

$$W_{\text{ГП}} = \frac{1}{4} V_{\text{осн}} \cdot h$$

$$W_{\text{ГМП}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4} V_i \cdot h_i$$

**n** – количество гиперпирамид,

**V<sub>i</sub>** – объем основания *i*-й гиперпирамиды,

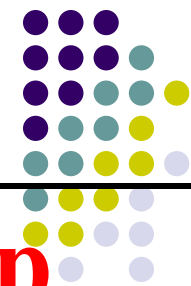
**h<sub>i</sub>** – высота *i*-й гиперпирамиды.

$$W = \frac{1}{4} VR$$

$$W = \frac{\pi^2 R^4}{2}$$

$$V = 2\pi^2 R^3$$





Фигура	Шар	Гипершар
Размерность	Трехмерная	Четырехмерная
Граница	Сфера	Гиперсфера
Мера границы	Площадь	Объем
Формула	$S=4\pi R^2$	$V=2\pi R^3$
Мера фигуры	Объем	Гиперобъем
Формула	$V = \frac{4}{3} \pi R^3$	$W = \frac{\pi^2 R^4}{2}$





*Как видим, четырёхмерные фигуры можно изучать и познавать так же, как и трёхмерные, хотя в четырёхмерном пространстве существуют фигуры, аналогов которых нет в пространствах низших размерностей.*

# Список используемых ресурсов



- <http://stratum.ac.ru/textbooks/kgrafic/lection16.html>
- <http://metaphysic.narod.ru/etud.htm>
- <http://fizika3000.narod.ru/prwr.htm>
- <http://ru.wikipedia.org/wiki>
- Газета “Математика” приложение «1 сентября» 2005 г.