Матрицы и их свойства

Прямоугольная числовая таблица из m строк и n столбцов называется ***матрицей*** размерности $m \times n$:

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Пример:

$$\underset{3\times 3}{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & -8 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Числа, составляющие матрицу, называются ***элементами*** матрицы. Если $m=n$, то матрица называется ***квадратной матрицей порядка n.***

1. Вектор-столбец - матрица размера $m\times1$: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$

2. Вектор-строка - матрица размера $1\times n$: $A=(a_1\ a_2\ldots a_n)$

В квадратной матрице

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

элементы a_{11}, $a_{22},\ldots a_{nn}$ образуют ***главную диагональ***, а элементы a_{n1}, $a_{n-1\,2},\ldots a_{1n}$ – ***побочную диагональ*** матрицы.

3. Матрица, у которой все элементы $a_{ij}=0$, называется ***нулевой*** матрицей (обозначение $\tilde{0}$).

4. ***Диагональной*** матрицей называется квадратная матрица, в которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны 0.

5. Квадратная матрица $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ называется ***единичной***.

6. Матрица $-A$(mxn) называется матрицей ***противоположной*** матрице A (mxn).

Операции над матрицами

1. *Сравнение*

Две матрицы А и В одинаковой размерности равны, если у них равны элементы, расположенные на соответствующих местах.

2. *Сложение*

Суммой двух матриц A и B одинаковой размерности называется матрица С той же размерности, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц А и В.

Для того, чтобы найти ***разность матриц*** одинаковой размерности A и B нужно из каждого элемента матрицы A вычесть соответствующий элемент матрицы B.

Свойства:

1) A + B = B + A

2) (A + B) + C = A + (B + C)

3) $A + \tilde{0} = A$

4) $A + (-A) = \tilde{0}$

Пример: Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Тогда $A + B = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -10 \\ 0 & 9 & 6 \end{pmatrix}$, $A - B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -8 \end{pmatrix}$,

$$-A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 6 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Умножение матрицы на действительное число

Произведением матрицы *A(mxn)* на число $\lambda \in R$ называется матрица той же размерности, полученная из матрицы A умножением всех элементов на число λ.

Свойства:

1) $1 \cdot A = A$

2) $(\lambda+\mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$

3) $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$

4) $(\lambda \cdot \mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A) = \mu \cdot (\lambda \cdot A)$

Пример: Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, тогда $2 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 10 & -12 \\ 0 & 8 & -2 \end{pmatrix}$.

4. *Умножение вектора-строки на вектор-столбец*

Произведением вектора-строки A(1×n) на вектор-столбец B(n×1) называется число, равное сумме произведений соответствующих элементов A и B:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} \cdot b_{i1}$$

5. Умножение двух матриц

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}$

Произведением матрицы** A ($m\times n$) **на матрицу B ($n\times k$) называется матрица C ($m\times k$) , элементы c_{ij} которой равны сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на j-ый столбец матрицы B:

$$C_{ij} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} \cdot b_{pj}$$

Свойства:

1) $A \cdot B \neq B \cdot A$

2) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

3) $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$

4) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

5) $A \cdot \vartheta = \vartheta, \qquad \vartheta \cdot A = \vartheta$

6) $A \cdot E = A, \qquad E \cdot A = A$

Пример: Найти произведение матриц $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 0 & 3 & -1\end{pmatrix}$.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1\cdot 2+(-1)\cdot 0 & 1\cdot 4+(-1)\cdot 3 & 1\cdot 1+(-1)\cdot(-1)\\ 1\cdot 2+0\cdot 0 & 1\cdot 4+0\cdot 3 & 1\cdot 1+0\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix}.$$

Степень $A^n = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A$

Свойства:

1) $A^0 = E$, если матрица A невырожденная

2) $A^p \cdot A^q = A^{p+q}$

3) $(A^p)^q = A^{pq}$

6. *Транспонирование матриц*

Матрица A^T $(n\times m)$, получаемая из данной матрицы $A(m\times n)$ путем замены i-ой строки на i-ый столбец, называется ***транспонированной к матрице А*.**

Пример:

$$\underset{2x3}{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}, \qquad \underset{3x2}{A^T}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}$$

Свойства:

1) $(\lambda \cdot \mathrm{A})^{\mathrm{T}} = \lambda \cdot \mathrm{A}^{\mathrm{T}}$

2) $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}} + \mathrm{B}^{\mathrm{T}}$

3) $(\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}$

4) $(\mathrm{A} \cdot \mathrm{B})^{\mathrm{T}} = \mathrm{B}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{A}^{\mathrm{T}}$