

Проект по теме «Формула Пика»

Автор:

Усольцев М.А. 10Е класс

Георг Пик

Георг Александр Пик (10 августа 1859 — 13 июля 1942) — австрийский математик, родился в еврейской семье.

Мать — Йозефа Шляйзингер.
Отец — Адольф Йозеф Пик.



Образование и работы

- ◆ Его обучал отец, возглавлявший частный институт
- ◆ В 16 лет он окончил школу и поступил в Венский университет
- ◆ В 20 лет получил право преподавать физику и математику
- ◆ 16 апреля 1880 года защитил докторскую диссертацию «О классе абелевых интегралов»
- ◆ Им написано более 50 работ. Широкую известность получила открытая им в 1899 году теорема Пика для расчёта площади многоугольника. В Германии эта теорема включена в школьные учебники

Преподавательская деятельность

- ◇ В Немецком университете в Праге в 1888 году Пик получил место экстраординарного профессора математики, затем в 1892-м стал ординарным профессором. В 1900—1901 годах занимал пост декана философского факультета.
- ◇ В 1910 году Георг Пик был в комитете, созданном Немецким университетом Праги для рассмотрения вопроса о принятии Альберта Эйнштейна профессором в университет.



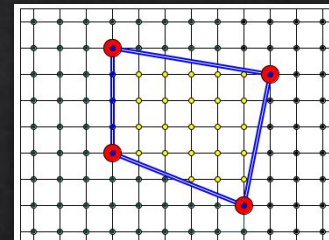
Формула Пика

Теорема Пика:

Пусть L - число целочисленных точек внутри многоугольника, B - количество целочисленных точек на его границе, S — его площадь. Тогда справедлива формула Пика:

$$S = L + B/2 - 1$$

Для многоугольника на рисунке
 $L = 23$ (желтые точки),
 $B = 7$ (синие точки), значит
 $S = 23 + 3,5 - 1 = 25,5$ клеток



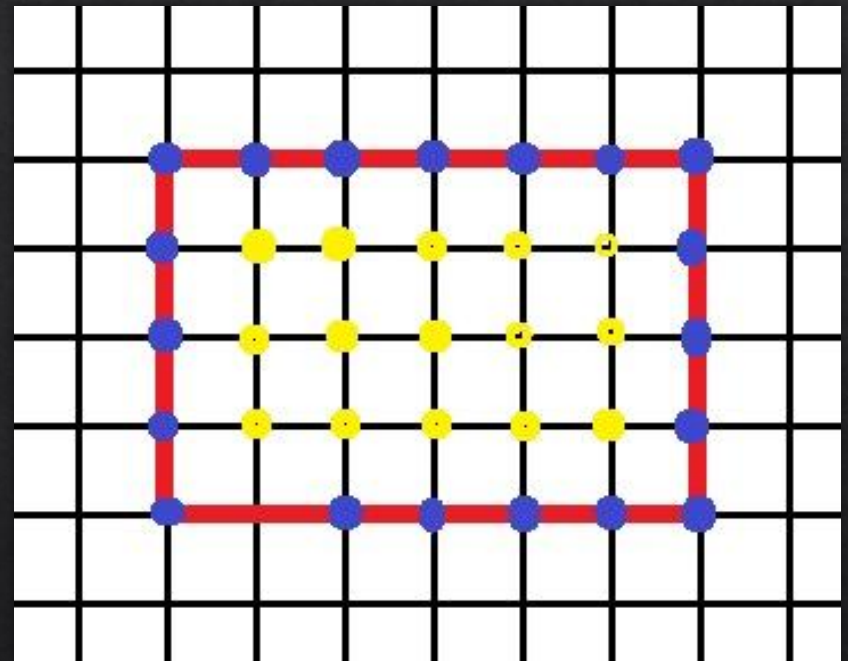
Доказательство

- ◆ Рассмотрим прямоугольник со сторонами, лежащими на линиях решетки. Пусть длины его сторон равны X и Y . Имеем в этом случае:

- ◆ $L = (X-1)(Y-1)$

- ◆ $B = 2X + 2Y$

- ◆ $S = XY - X - Y + 1 + X + Y - 1 = XY$



Доказательство

- ◇ Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами, Π осям координат
- ◇ Такой треугольник получается при разрезании прямоугольника по диагонали
- ◇ Пусть на диагонали лежит C точек.

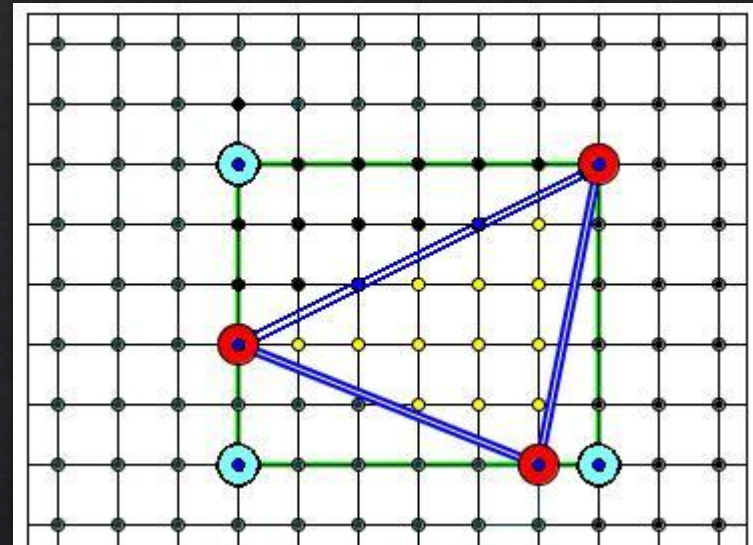
- ◇ $L = ((X-1)(Y-1) - C + 2) / 2$

- ◇ $B = X + Y + C - 1$

- ◇ $S = 0,5XY - 0,5X - 0,5Y + 0,5 - 0,5C + 1 + 0,5X + 0,5Y + 0,5C - 0,5 - 1$

- ◇ $S = 0,5XY - 0,5X - 0,5Y + 0,5 - 0,5C + 1 + 0,5X + 0,5Y + 0,5C - 0,5 - 1$

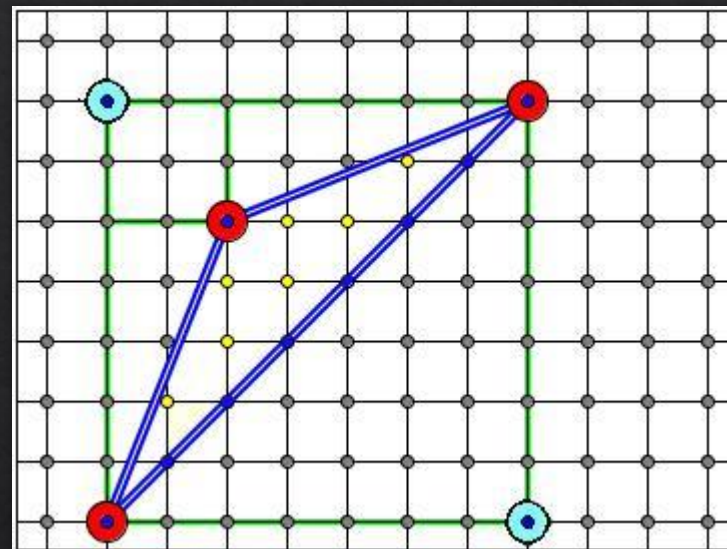
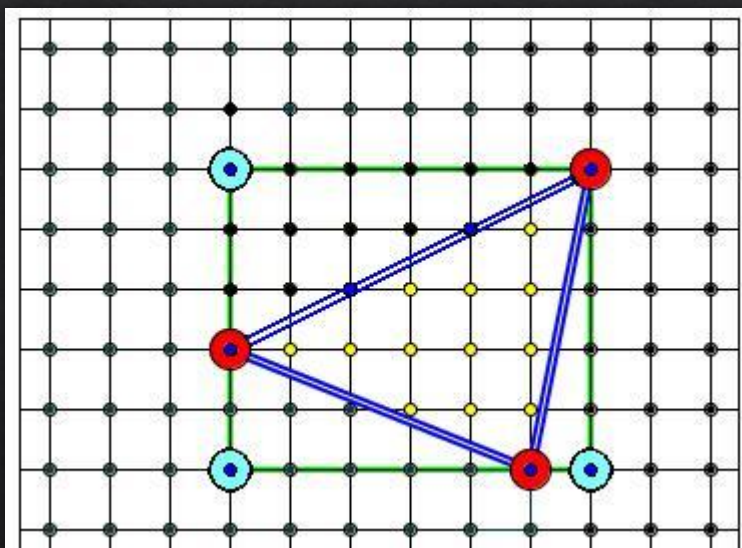
- ◇ $S = 0,5XY$



Доказательство

Произвольный треугольник можно получить, отрезав от прямоугольника прямоугольные треугольники и, возможно, прямоугольник.

Поскольку и для прямоугольника, и для треугольника формула Пика верна, мы получаем, что она будет справедлива и для произвольного треугольника.



Доказательство для многоугольника

Пусть многоугольник M и треугольник T имеют общую сторону. Предположим, что для M формула Пика справедлива, докажем, что она будет верна и для многоугольника, полученного из M добавлением T . Так как M и T имеют общую сторону, то все целочисленные точки, лежащие на этой стороне, кроме двух вершин, становятся внутренними точками нового многоугольника. Вершины же будут граничными точками. Обозначим число общих точек через c и получим

$L_{MT} = L_M + L_T + (c - 2)$ — число внутренних целочисленных точек нового многоугольника,

$V_{MT} = V_M + V_T - 2(c - 2) - 2$ — число граничных точек нового многоугольника.

Из этих равенств получаем

$$L_M + L_P = L_{MT} - (c - 2), V_M + V_P = V_{MT} + 2(c - 2) + 2.$$

Доказательство для многоугольника

Так как мы предположили, что теорема верна для M и для T по отдельности, то

$$S_{MT} = S_M + S_T = (L_M + B_M/2 - 1) + (L_T + B_T/2 - 1) =$$

$$= (L_M + L_T) + (B_M + B_T)/2 - 2 =$$

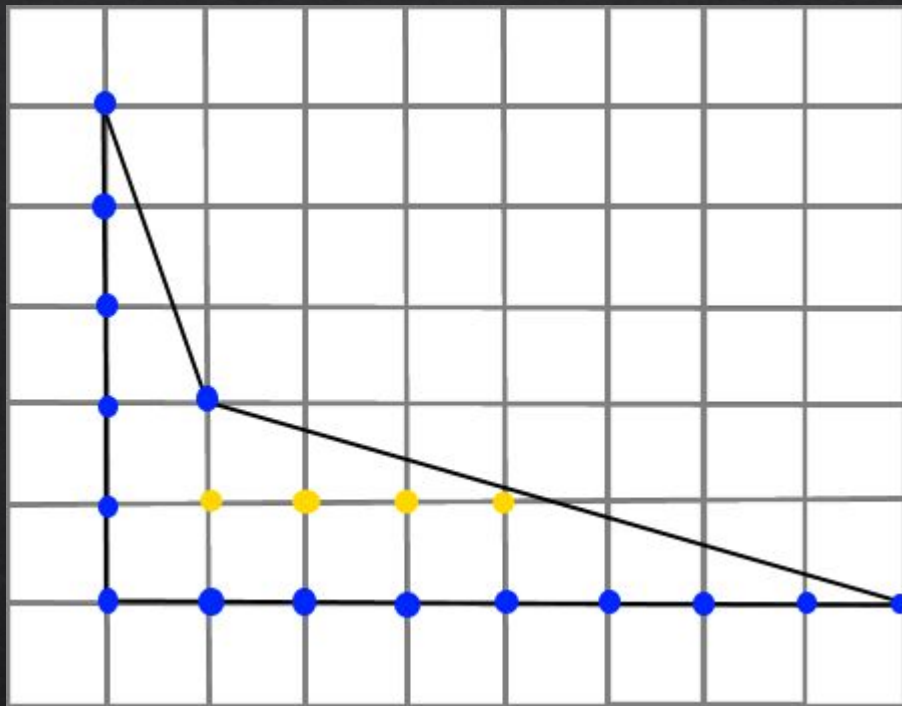
$$= L_{MT} - (c - 2) + (B_{MT} + 2(c - 2) + 2)/2 - 2 =$$

$$= L_{MT} + B_{MT}/2 - 1 .$$

Тем самым, формула Пика доказана.

Применение

(Задания ОГЭ и ЕГЭ)



Желтые точки – точки внутри фигуры

(4)

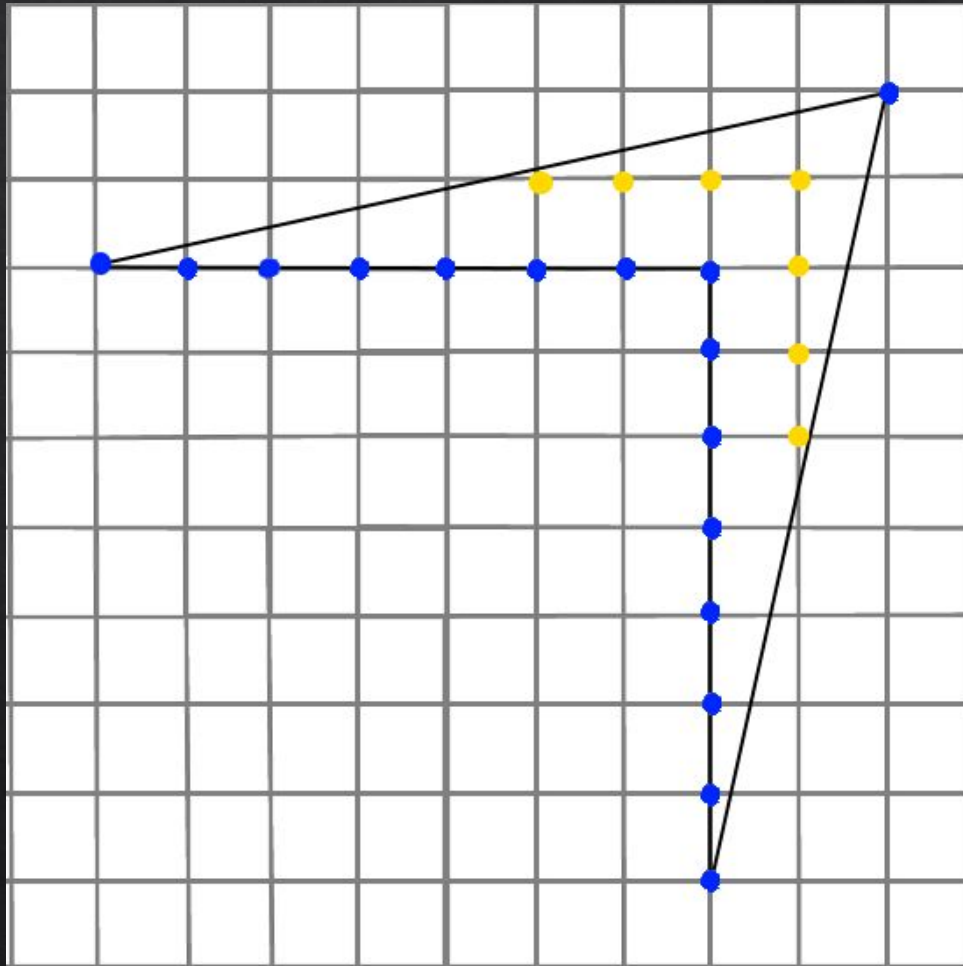
Синие точки – точки на границах

(15)

$$4 + 15/2 - 1 = 4 + 7,5 - 1 = 10,5$$

Применение

(Задания ОГЭ и ЕГЭ)



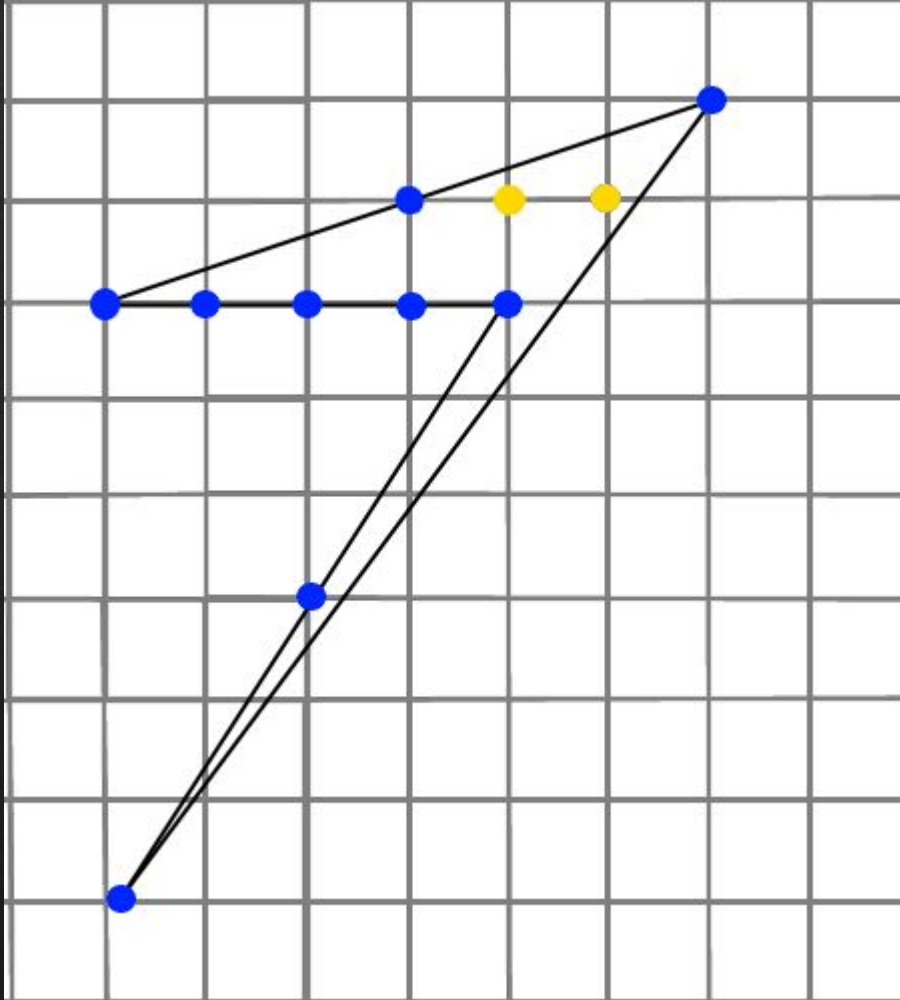
Желтые точки – точки
внутри

фигуры (7)
Синие точки – точки на границах

$$(16) \\ 7 + 16/2 - 1 = 7 + 8 - 1 = \\ 14$$

Применение

(Задания ОГЭ и ЕГЭ)



Желтые точки – точки
внутри

Фигуры (2) – точки на границах

(9)

$$2 + 9/2 - 1 = 2 + 4,5 - 1 = 5,5$$