Лекция 6

РАСЧЕТ СООРУЖЕНИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Современная вычислительная техника позволяет проводить расчеты сооружений с более подробным описанием их внутренней структуры и с более точным учетом действующих нагрузок.

Для этого разработаны специальные методы расчета, среди которых наибольшее распространение получил метод конечных элементов (МКЭ).

1. Понятие о методе конечных элементов

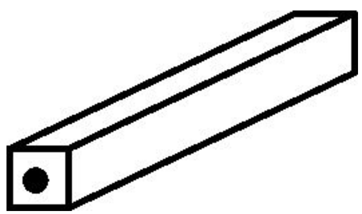
Метод конечных элементов – это метод расчета сооружений, основанный на рассмотрении сооружения как совокупности типовых элементов, называемых ***конечными элементами (КЭ)***.

Например, в МКЭ используются элементы в виде плоского стержня: ферменный КЭ и стержневой КЭ.

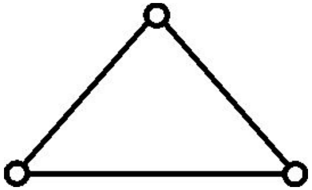
ферменный КЭ

стержневой КЭ

При расчете пространственных рам используется КЭ бруса:



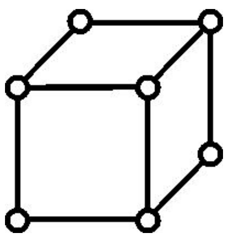
В расчетах плоских тел используются треугольный или четырехугольный КЭ:



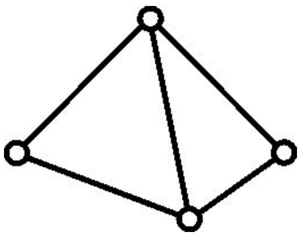
треугольный КЭ

четырехугольный КЭ

При расчете пространственных сооружений могут использоваться КЭ призмы или КЭ тетраэдра и др.



призменный КЭ



тетраэдальный КЭ

Для расчета разных сооружений разработано множество других КЭ.

МКЭ – дискретный метод, основанный на изучении НДС сооружения в ее отдельных (дискретных) точках.

В этом методе сооружение делится на определенное число КЭ, соединяемых между собой в узлах конечно-элементной модели. А нагрузка, действующая на сооружение, переносится в узлы. Это позволяет определять НДС сооружения через узловые усилия и перемещения конечно-элементной модели.

Для одной и той же расчетной схемы сооружения можно получать разные расчетные модели и реализовать различные варианты МКЭ.

В настоящее время широко используется МКЭ в форме метода перемещений.

2. Вариационные основы МКЭ

При решении многих задач статики, динамики и устойчивости сооружений определяется ***полная потенциальная энергия U***:

$$U = W - V,$$

где W – работа внешних сил, V – работа внутренних сил.

Для равновесия сооружения ее потенциальная энергия должна быть постоянной, т.е.

$$\Delta U = 0.$$

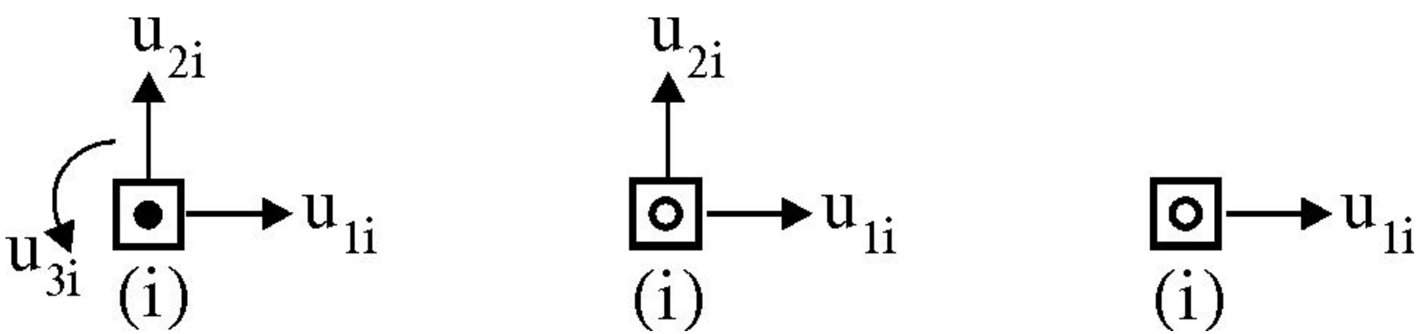
Отсюда получается ***уравнение Лагранжа***

$$\Delta V = \Delta W$$

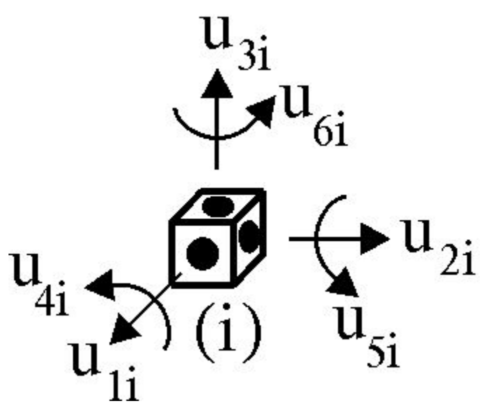
– приращение работы внутренних сил равна приращению работы внешних сил.

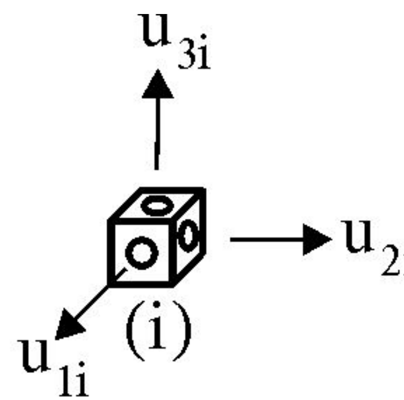
3. Аппроксимация КЭ

При выборе конечно-элементной модели сооружения можно вводить узлы с разным числом степеней свободы. Например, в плоской системе вводятся узлы с тремя, с двумя и с одной степенью свободы:



В пространственной системе узлы могут иметь шесть или три степени свободы:





Степени свободы и соответствующие перемещения узлов КЭ нумеруются в определенном порядке и собираются в общий вектор перемещений **u**.

Потом вводятся специальные аппроксимирующие функции, связывающие перемещения внутренних точек КЭ через перемещения ее узлов. Тогда получаются:

$\acute{\mathbf{u}} = \mathbf{H}\mathbf{u}$ − формула для определения перемещений внутренних точек КЭ;

$\mathbf{P} = \mathbf{H}\,\mathbf{P}$ − формула для определения усилий во внутренних точках.

Здесь $\mathbf{H}$ − матрица форм КЭ.

Далее, используя уравнение Лагранжа $\Delta V = \Delta W$ получается уравнение, связывающее вектор узловых перемещений $\mathbf{u}$ с вектором узловых усилий $\mathbf{P}$ КЭ:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{P},$$

где $\mathbf{K}$ − матрица жесткости КЭ.

Размер квадратной матрицы $\mathbf{K}$ равняется числу степеней свободы всех узлов КЭ, а физический смысл любого ее элемента k_{ij} – это реакция (реактивная сила), возникающая в *i*-ом направлении от заданного единичного перемещения в *j*-ом направлении.

Например,

− матрица жесткости ферменного элемента (n=2):

$$\mathbf{K} = \frac{EF}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

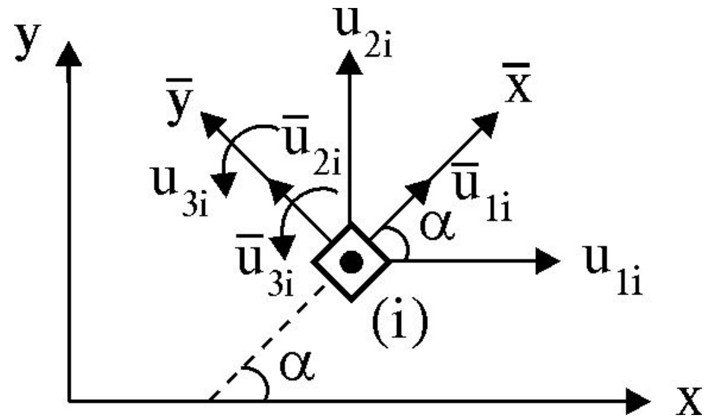
− матрица жесткости стержневого элемента (n=6):

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{l}\begin{bmatrix} F/I & 0 & 0 & -F/I & 0 & 0 \\ 0 & 12/l^2 & 6/l & 0 & -12/l^2 & 6/l \\ 0 & 6/l & 4 & 0 & -6/l & 2 \\ -F/I & 0 & 0 & F/I & 0 & 0 \\ 0 & -12/l^2 & -6/l & 0 & 12/l^2 & -6/l \\ 0 & 6/l & 2 & 0 & -6/l & 4 \end{bmatrix}$$

4. Переход к общей системе координат

Каждый КЭ в МКЭ вначале рассматривается в местной системе координат. Затем осуществляется переход к глобальной (общей) системе координат.

Для этого формируется матрица направляющих косинусов $\mathbf{L}$ КЭ, необходимая для поворота всех его узловых осей.



Тогда по формуле

$$\mathbf{K} = \mathbf{L}^{t}\,\bar{\mathbf{K}}\,\mathbf{L}$$

определяется матрица жесткости КЭ в общей системе координат.

5. Объединение конечных элементов

Если в расчетной модели сооружения имеется *m* КЭ, то матрицы жесткостей и вектора узловых нагрузок всех ее КЭов объединяются с помощью матрицы индексов в общую матрицу жесткости **K** и общий вектор нагрузки **P** для всего сооружения.

В результате формируется ***разрешающее уравнение МКЭ***

$$\mathbf{K}\,\mathbf{u} = \mathbf{P}.$$

Матрицу **K** часто называют ***глобальной матрицей жесткости***.

8. Учет граничных условий

Разрешающее уравнение МКЭ

$$\mathbf{K}\,\mathbf{u} = \mathbf{P}$$

нельзя решить относительно перемещений $\mathbf{u}$, т.к. матрица жесткости $\mathbf{K}$ является вырожденной (ее определитель равен нулю). Для того чтобы избежать этого, специальным образом учитывают граничные условия закрепления сооружения в опорах.

9. Определение перемещений, усилий и напряжений

После решения разрешающего уравнения и определения вектора узловых перемещений $\mathbf{u}$, из этого вектора можно выбирать перемещения отдельных КЭов и определять перемещения в интересующих точках любого *i*-го КЭ по формуле:

$$\acute{\mathbf{u}}^{\mathrm{i}} = \mathbf{H}^{\mathrm{i}}\mathbf{u}^{\mathrm{i}}.$$

Усилия в узлах и напряжения внутри КЭ вычисляются по следующим формулам:

$$\mathbf{S}^{\mathrm{i}} = \mathbf{K}^{\mathrm{i}}\mathbf{u}^{\mathrm{i}},$$

$$\breve{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{i}} = \tilde{\mathbf{B}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{H}\mathbf{u}^{\mathrm{i}}.$$

10. Алгоритм расчета сооружений МКЭ

Состоит из следующих этапов:

1. Выбор расчетной модели.
2. Перенос нагрузки в узлы.
3. Определение матриц жесткостей КЭов.
4. Перевод матриц жесткостей КЭов в общую систему координат.
5. Сборка глобальной матрицы жесткости $\mathbf{K}$.
6. Учет граничных условий.
7. Решение разрешающего уравнения $\mathbf{K}\,\mathbf{u} = \mathbf{P}$.
8. Вычисление внутренних усилий.
9. Обработка результатов расчета.

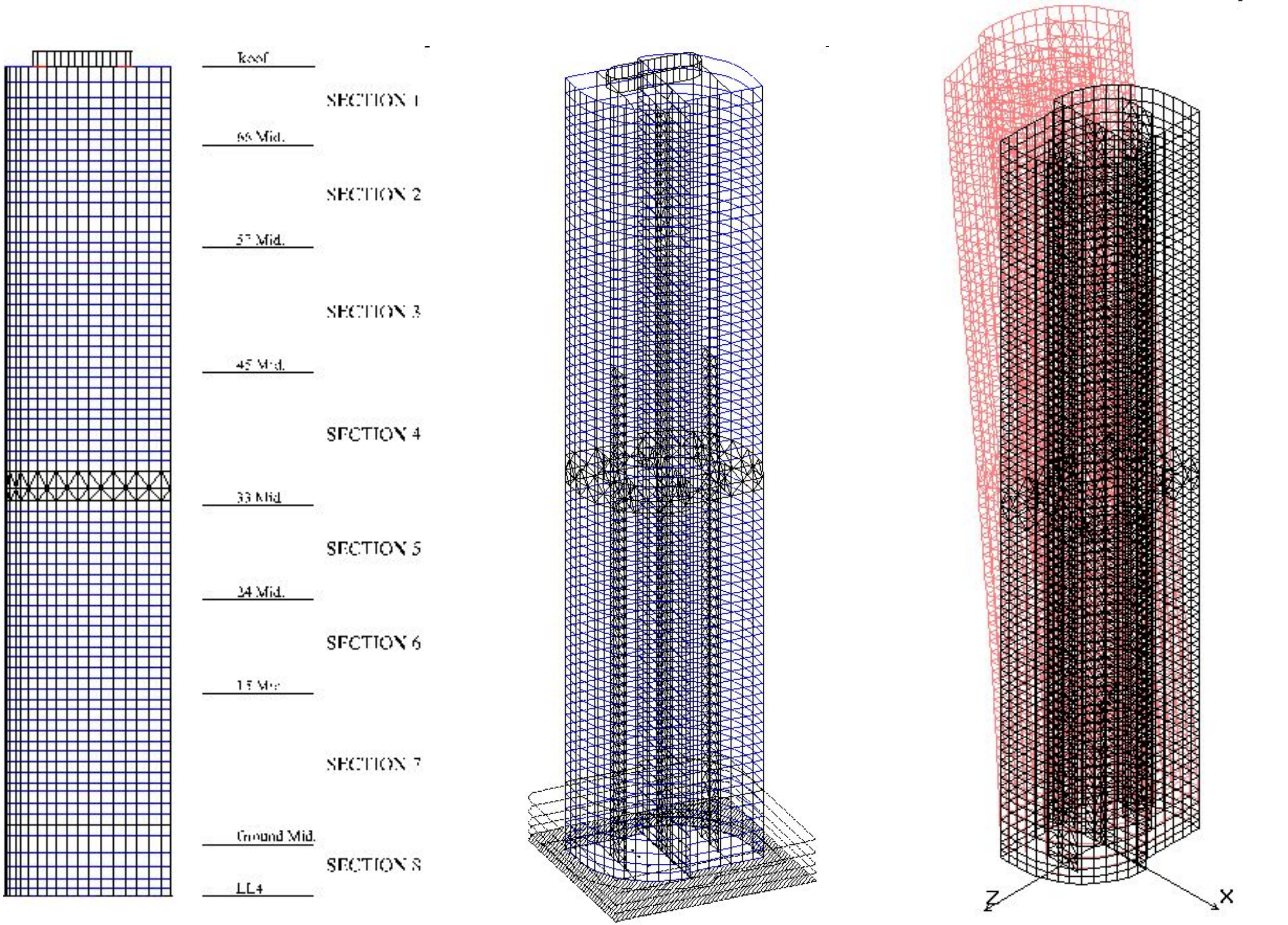
11. Порядок расчета по МКЭ

В настоящее время разработаны вычислительные комплексы NASTRAN, ANSIS, ЛИРА, СУМРАК и др., позволяющие рассчитывать сложные и разнообразные сооружения на различные воздействия. Они рассчитаны на использование мощных компьютеров, разнообразной вспомогательной аппаратуры, сложных компьютерных программ, и в основном состоят из следующих трех частей:

1. **Препроцессор** – предназначен для подготовки и ввода исходных данных в компьютер. Используется для формирования расчетной модели сооружения, определения координат узлов, геометрических и физических характеристик КЭов, проверки правильности и полноты исходных данных. Дает возможность обзора расчетной модели в разных ракурсах на мониторе.

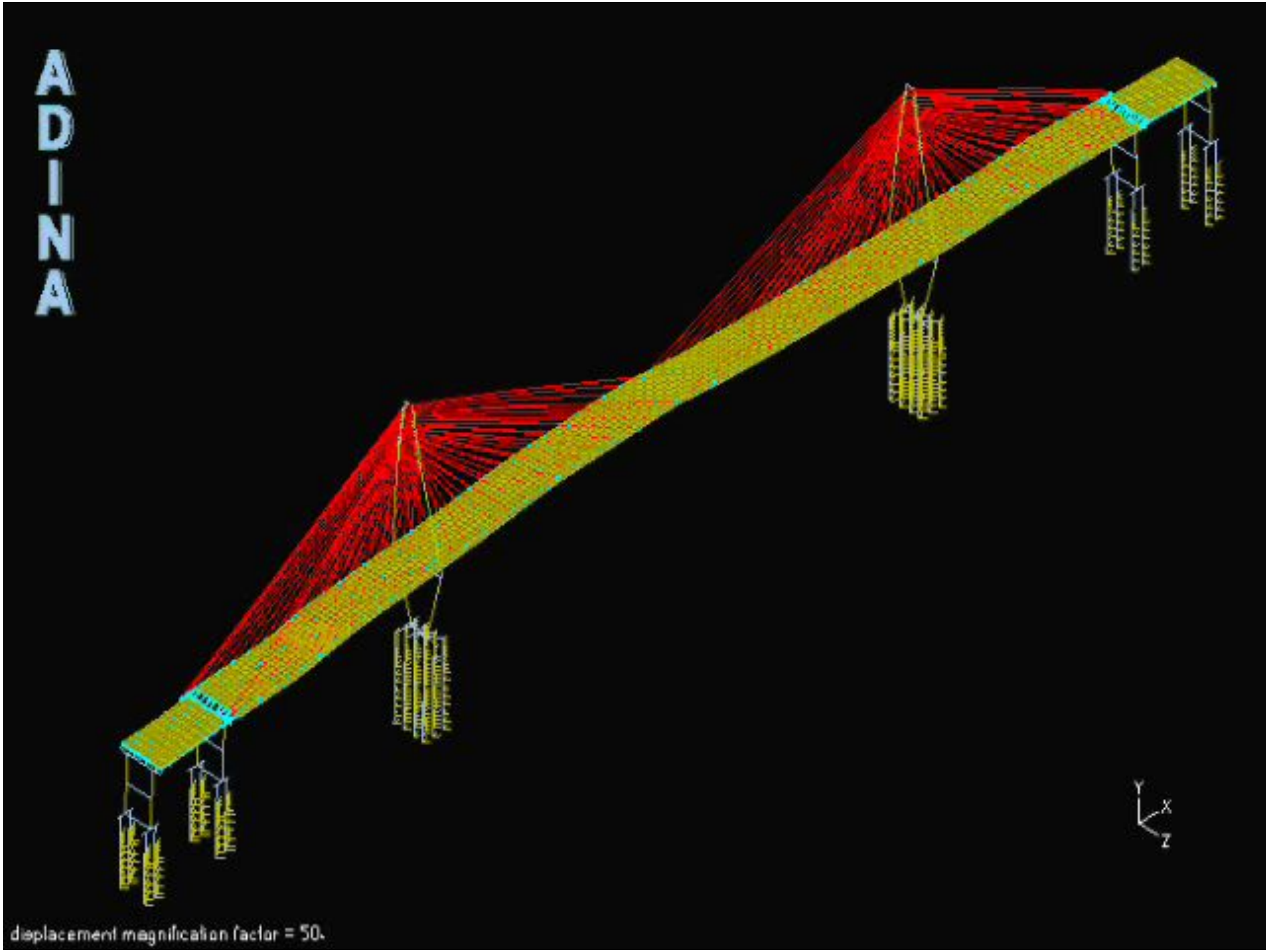
2. **Процессор** – блок математического расчета МКЭ. Входящие в него компьютерные программы предназначены для: составления и решения разрешающего уравнения; вычисления перемещений и деформаций, внутренних усилий и напряжений; проверки на прочность и жесткость; решения задач динамики и устойчивости.

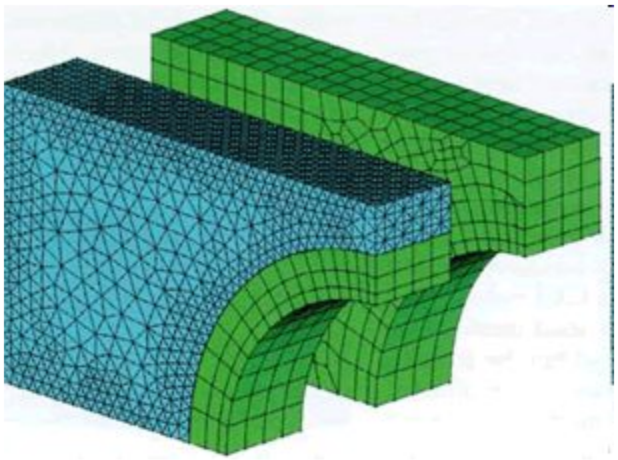
3. **Постпроцессор** – предназначен для компьютерной обработки результатов расчета, представления их в виде эпюр, в удобной для анализа табличной, графической и анимационной формах.

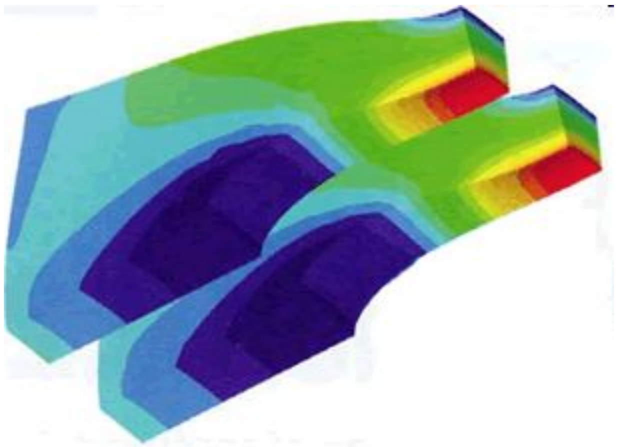


Небоскреб высотой 301 м, построен в 1980 г. в США (Техас, Хьюстон)

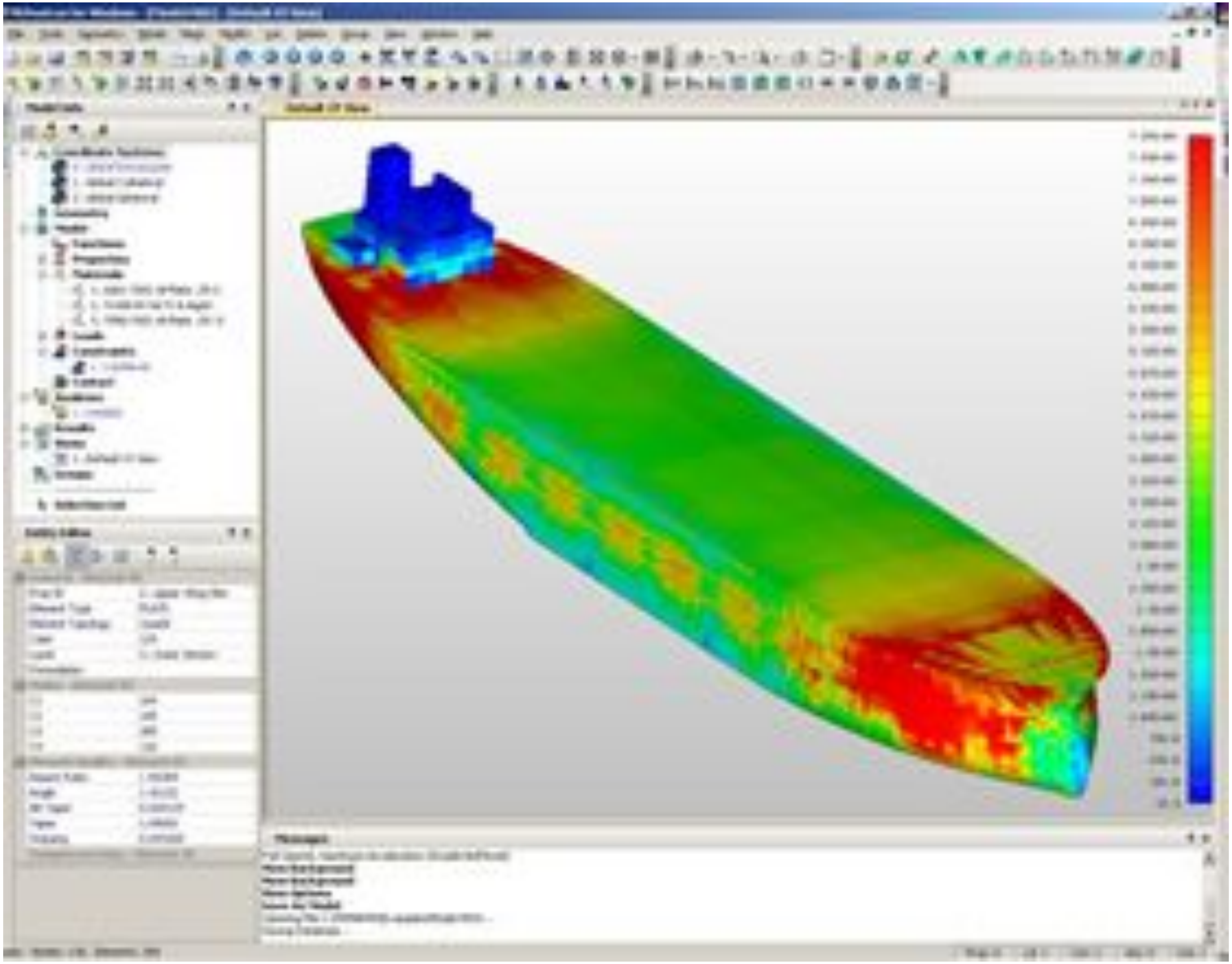
Мост в Южной Каролине, США


ADINA
Y
X
Z
displacement magnification factor = 50.





КЭ-ные модели элементов моста и их напряженное состояние



Расчет НДС корабля

Вантовый мост


CSI