Предел функции. Непрерывность функции. Точки разрыва.

Предел функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 или в некоторых точках этой окрестности.

- Говорят, что функция $y = f(x)$ стремится к пределу A ($y \to A$) при x стремящемся к x_0 ($x \to x_0$), если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такой $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, отличных от x_0 и удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$ имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Записывают следующим образом $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Кратко это определение записывают, при помощи общепринятых обозначений следующим образом:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$$

$$\left(\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) \ \ \forall x: \ 0 < \left| x - x_0 \right| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - A \right| < \varepsilon \right)$$

Геометрически это определение означает, что чем ближе значение аргумента функции x к x_0, тем ближе значение функции y к A (какую бы маленькую мы ни выбрали ε-окрестность точки A, найдется такое δ, что для всех значений аргумента из δ-окрестности точки x_0 значение функции попадет в ε-окрестность точки A).

Число A называется пределом функции $y=f(x)$ слева в точке x_0, если для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что при $x\in(x_0-\delta,x_0)$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. Предел слева записывают следующим образом $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$ или $f(x_0-0)=A$. Аналогично определяется предел функции справа. Обозначается $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$ или $f(x_0+0)=A$. Пределы функции слева и справа называют *односторонними пределами*.

10.3. Предел функции на бесконечности

- Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ **существует** такое число $N = N(\varepsilon) > 0$, что при всех x удовлетворяющих неравенству $|x| > N$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Записывают: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

Кратко: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\ \forall x\colon |x| > N \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right)$

Если $x \to +\infty$, то пишут $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$; если $x \to -\infty$, то $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

10.4. Бесконечно большие функции

- Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой функцией (ББФ) при $x \to x_0$, если $\forall M > 0\ \exists \delta = \delta(M)\ \forall x:\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M$. Записывают: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Иными словами, такая функция $f(x)$ является неограниченной в окрестности точки x_0.

Если $f(x)$ – бесконечно большая при $x \to x_0$ и при этом принимает вблизи точки x_0 только положительные значения, то пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$; если такая функция принимает только отрицательные значения, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

- Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой функцией при $x \to \infty$, если $\forall M > 0\ \exists N = N(M)\ \forall x:\ |x| > N \Rightarrow |f(x)| > M$. Записывают: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

§11. Бесконечно малые функции

11.1. Определение и основные теоремы

- Функция $y = \alpha(x)$ называется бесконечно малой функцией (БМФ) при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Например, $y = x^2$ при $x \to 0$ является функцией бесконечно малой, а функция $y = \dfrac{1}{x}$ является бесконечно малой функцией при $x \to \infty$.

Теорема 11.1. *Алгебраическая сумма бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.*

Теорема 11.2. *Произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию есть* БМФ.

Следствие 1. *Произведение конечного числа* БМФ *есть* БМФ.

Следствие 2. *Произведение* БМФ *на число есть* БМФ.

Теорема 11.3. *Частное от деления* БМФ *на функцию, имеющую предел, отличный от нуля – есть* БМФ.

Теорема 11 4. *Если* $\alpha(x)$ – БМФ, *то* $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ – ББФ. *Обратно, если* $f(x)$ – ББФ,

то $\dfrac{1}{f(x)}$ – БМФ.

12.1. Непрерывность функции в точке и в области

- Пусть $y = f(x)$ определена в точке $x = x_0$ и в некоторой окрестности этой точки. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x = x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right) = f(x_0).$$

Таким образом, чтобы функция была непрерывна в точке $x = x_0$ необходимо выполнение следующих 3 условий:

1) функция $y = f(x)$ должна быть определена в точке $x = x_0$ и в окрестности этой точки;
2) должен существовать предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;
3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

12.2. Основные теоремы о непрерывных функциях

Теорема 12.1. *Сумма, произведение и частное двух непрерывных функций есть непрерывная функция (для частного за исключением тех значений аргумента, в которых знаменатель равен нулю)*

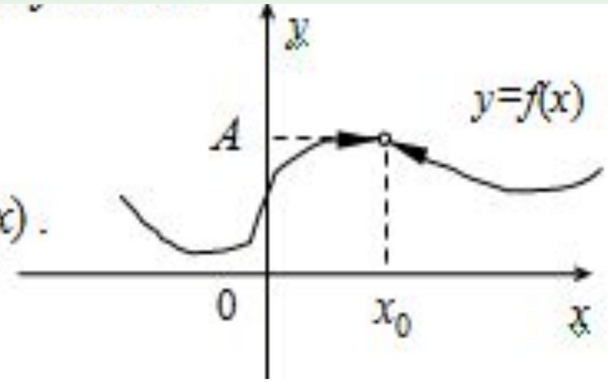
Теорема 12.2. *Пусть функция $u=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y=f(u)$ непрерывна в точке $u_0=\varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.*

Теорема 12.3. *Функция, обратная для непрерывной монотонной функции также непрерывна и монотонна.*

Теорема 12.4 *(Вейерштрасса). Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.*

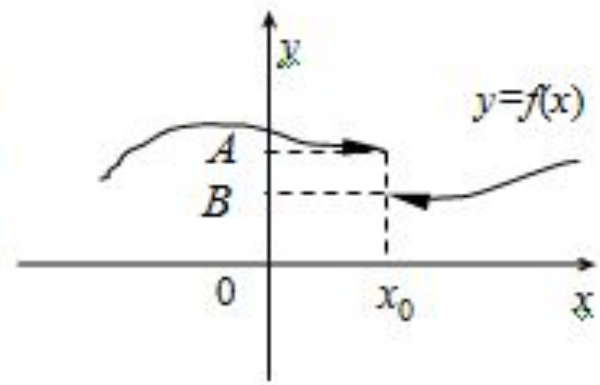
Теорема 12.5 *(Больцано-Коши). Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на его концах неравные значения $f(a)=A$, $F(b)=B$, то на этом отрезке она принимает все промежуточные значения между A и B.*

12.3. Классификация точек разрыва



Пусть $x = x_0$ точка разрыва функции $y = f(x)$.

- Точка $x = x_0$ называется точкой *устранимого разрыва первого рода*, если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A \neq \infty$.



- Точка $x = x_0$ называется точкой *неустранимого разрыва первого рода*, если $f(x_0 - 0) = A \neq \infty$, а $f(x_0 + 0) = B \neq \infty$, причем $A \neq B$.

- Точка $x = x_0$ называется *точкой разрыва второго рода*, если хотя бы один из односторонних пределов (справа или слева) не существует или равен бесконечности.