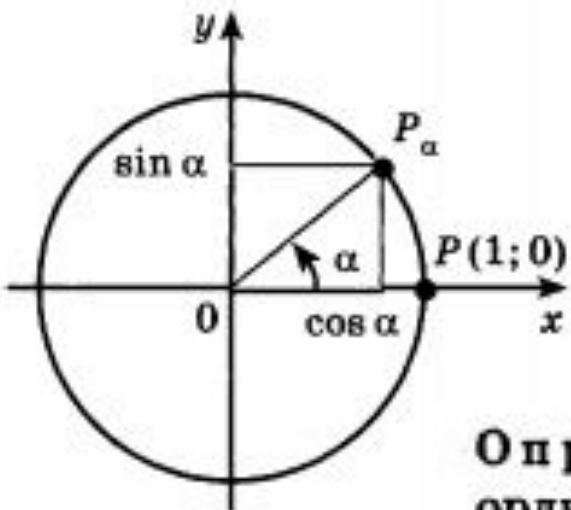
Практическое занятие № 14 «Основные тригонометрические тождества»

Определения тригонометрических функций



Определение 1. *Синусом угла* α называется ордината точки, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол α (обозначается sin α).

Определение 2. *Косинусом угла* α называется абсцисса точки, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол α (обозначается cos α).

Определения тригонометрических функций

Определение 3. ***Тангенсом угла*** **α называется отношение синуса угла α к его косинусу (обозначается $\mathrm{tg}\,\alpha$).**

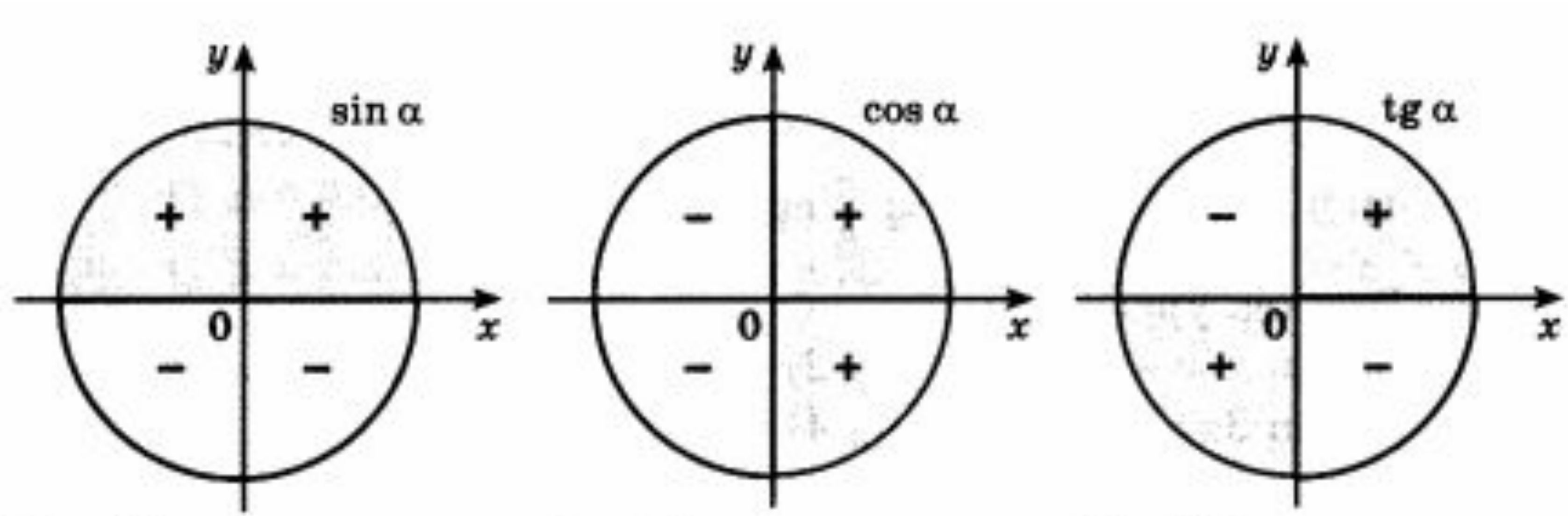
Таким образом,

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Иногда используется котангенс угла α (обозначается $\mathrm{ctg}\,\alpha$), который определяется формулой

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Знаки синуса, косинуса и тангенса



Тригонометрические тождества

$$1)\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$2)\ tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$3)\ ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$4)\ tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$$

$$5)\ \frac{1}{\cos^2\alpha} = tg^2\alpha + 1$$

$$6)\ \frac{1}{\sin^2\alpha} = ctg^2\alpha + 1$$

α	0 $(0°)$	$\frac{\pi}{6}$ $(30°)$	$\frac{\pi}{4}$ $(45°)$	$\frac{\pi}{3}$ $(60°)$	$\frac{\pi}{2}$ $(90°)$	π $(180°)$	$\frac{3}{2}\pi$ $(270°)$	2π $(360°)$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Не существует	0	Не существует	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	Не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	Не существует	0	Не существует

Применение тригонометрических тождеств

Доказать тождество

$$\cos^2 \alpha = (1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha).$$

$(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha) = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha.$ ◁

Доказать тождество $\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = \dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Чтобы доказать это тождество, покажем, что разность между его левой и правой частями равна нулю:

$$\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} - \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - (1-\sin^2\alpha)}{\cos\alpha\,(1-\sin\alpha)} =$$

$$= \frac{\cos^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos\alpha\,(1-\sin\alpha)} = 0. \quad ◁$$

Практическое задание № 14

Упростить выражение и найти его значение:

1) $\dfrac{\sin^2\alpha - 1}{1 - \cos^2\alpha}$ при $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$;

2) $\cos^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + \sin^2\alpha$ при $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$;

3) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1$ при $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$;

4) $\cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha \operatorname{ctg}^2\alpha + \sin^2\alpha$ при $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.