

---

# Введение в асимптотические методы.

## Лекция 12

---

Лучевая теория и другие  
«экспоненциальные» методы

# 1. Мотивация

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0 \quad \longrightarrow \quad y = e^{\pm ix/\varepsilon}$$

Имеем дело с быстро осциллирующим решением

Здесь легко найти аналитическое решение, но как быть в более общем случае?

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + V(x)y = 0$$

$V(x)$  положительная, изменяющаяся в шкале порядка  $O(1)$  функция

Решение представляет собой медленно (шкала  $O(1)$ ) **модулированные** быстрые (шкала  $O(\varepsilon)$ ) **осцилляции**. Хотя задачи такого рода можно в принципе решать методом многих масштабов, в силу их важности развиты специальные асимптотические техники, называемые

Для ОДУ: **ВКБ-метод** ( в честь Вентцель-Крамерс-Бриллюэн)

Для уравнений в частных производных: **лучевая теория**

## 2. ВКБ-теория: главный член

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + V(x)y = 0 \quad V(x) > 0$$

**Идея** классического ВКБ-метода состоит в том, что решение представляет собой быстрые осцилляции, чья амплитуда  $A$  и фаза  $u$  медленно изменяются.

$$y \approx A(x)e^{iu(x)/\varepsilon}$$

$$y' = (A' + i\varepsilon^{-1}u')e^{iu(x)/\varepsilon} \quad y'' = (A'' + i\varepsilon^{-1}(Au'' + 2A'u') - \varepsilon^{-2}(u')^2)e^{iu(x)/\varepsilon}$$

$$-(u')^2 A + i\varepsilon(Au'' + 2A'u') + \varepsilon^2 A'' + V(x)A = 0$$

$$A = A_0(x) + \varepsilon A_1(x) + \dots$$

$$\varepsilon^0 \Rightarrow (u')^2 = V \quad \varepsilon^1 \Rightarrow A_0 u'' + 2A_0' u' = 0 \Rightarrow A_0^2 u' = \text{const}$$

$$y \approx (V(x))^{-1/4} \exp\left(\pm \frac{i}{\varepsilon} \int (V(s))^{1/2} ds\right)$$

Полученное асимптотическое представление несправедливо если хотя бы в одной точке  $V=0$ . При наличии таких точек (точки поворота) вблизи них нужно дополнительно строить погранслоное разложение

### 3. Многомерный аналог

$$\varepsilon^2 \Delta \psi + V(x)\psi = 0$$

$$\begin{array}{l} \text{(A)} \left[ \begin{array}{l} 2r_T \sigma + r \sigma_T = 0 \\ \varepsilon^2 r_{TT} + r(f - \sigma^2) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} r^2 \sigma = \text{Const} \quad \text{(B)} \\ \left[ \begin{array}{l} \sigma(T, \varepsilon) = \sigma_0(T) + \varepsilon^2 \sigma_1(T) \\ r(T, \varepsilon) = r_0(T) + \varepsilon^2 r_1(T) \end{array} \right. \end{array} \end{array}$$

$$\text{(B}_0\text{)} \quad \sigma_0 = f^{1/2}$$

$$\text{(A}_0\text{)} \quad r_0 = k f^{-1/4}$$

$$\text{(B}_1\text{)} \quad \sigma_1 = \frac{r_{0TT}}{2\sigma_0 r_0} = f^{1/2} \left( \frac{5f'^2}{32f^3} - \frac{f''}{8f^2} \right)$$

$$\text{(A}_1\text{)} \quad r_1 = -\frac{r_0 \sigma_1}{2\sigma_0} = -\frac{k}{2} f^{-1/4} \left( \frac{5f'^2}{32f^3} - \frac{f''}{8f^2} \right)$$

# 11.4. Точки поворота

$$\dot{x} + f(\varepsilon t)x = 0 \quad f(0) = 0, \quad f' > 0$$

$$\varepsilon t \propto 1 \left\{ \begin{array}{l} t > 0: \quad x(t, \varepsilon) \approx (f(\varepsilon t))^{-1/4} (a \cos \theta + b \sin \theta) \quad \theta = \int_0^t (f(\varepsilon t'))^{1/2} dt' \\ t < 0: \quad x(t, \varepsilon) \approx (-f(\varepsilon t))^{-1/4} (Ae^\varphi + Be^{-\varphi}) \quad \varphi = \int_0^t (-f(\varepsilon t'))^{1/2} dt' \end{array} \right.$$

Для того, чтобы связать a, b с A, B применяется сращивание AP.

Внутреннее разложение:  $\varepsilon t \approx 1$

ПС уравнение  $\dot{x} + \varepsilon t f'(0)x = 0$

Перенормировка:  $\tau = -t(\varepsilon f'(0))^{1/3} \Rightarrow \ddot{x} - \tau x = 0$  Ур-ие Эйри

Решение:  $x = \alpha \text{Ai}(\tau) + \beta \text{Bi}(\tau)$  Ai( $\tau$ ), Bi( $\tau$ )-функции Эйри

Асимптотика при  $\tau \rightarrow \pm\infty$   $\left\{ \begin{array}{l} \tau > 0: \quad x \approx \frac{1}{\tau^{1/4} \sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{2} \alpha \exp\left(-\frac{2}{3} \tau^{3/2}\right) + \beta \exp\left(\frac{2}{3} \tau^{3/2}\right) \right) \\ \tau < 0: \quad x \approx \frac{1}{(-\tau)^{1/4} \sqrt{\pi}} \left( \alpha \sin\left(\frac{2}{3} (-\tau)^{3/2} + \frac{1}{4} \pi\right) + \beta \cos\left(\frac{2}{3} (-\tau)^{3/2} + \frac{1}{4} \pi\right) \right) \end{array} \right.$

# 11.4. Точки поворота

Сращивание

$$\tau \rightarrow +\infty, t \rightarrow +0: \quad \alpha = \frac{2\sqrt{\pi}}{[\varepsilon f'(0)]^{1/6}} A, \quad \beta = \frac{\sqrt{\pi}}{[\varepsilon f'(0)]^{1/6}} B$$

$$\tau \rightarrow -\infty, t \rightarrow -0: \quad \alpha + \beta = \frac{\sqrt{2\pi}}{[\varepsilon f'(0)]^{1/6}} a, \quad \alpha - \beta = \frac{\sqrt{2\pi}}{[\varepsilon f'(0)]^{1/6}} b$$



$$A = \frac{a+b}{2\sqrt{2}}$$

$$B = \frac{a-b}{\sqrt{2}}$$

Уравнения  
связи

Естественное ГУ  $f(-\infty) = 0 \Rightarrow B = 0$

$$f \approx 2Af^{-1/4} \sin\left(\int_0^t f^{1/2} dt + \frac{\pi}{4}\right) \quad (t > 0)$$

Точки поворота более высокого порядка  $f \approx k^2 t^n \quad (t \rightarrow 0)$

Ключевые моменты

ПС уравнение  $\dot{x} + k^2 t^n x = 0$

Решение:  $x = \alpha t^{1/2} J_\nu(2kvt^{1/2\nu}) + \beta t^{1/2} J_{-\nu}(2kvt^{1/2\nu})$

# 11.5. Пример: Уравнение Шредингера для гармонического осциллятора

Найти большие собственные значения

$$\begin{cases} \psi_{xx} + (E - x^2)\psi = 0 \\ \psi(\pm\infty) = 0 \end{cases} \quad E \gg 1$$

**ВКБ-задача!**

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{E}y & x &= z/\sqrt{E} \\ E^{-2}\psi_{yy} + (1 - y^2)\psi &= 0 & \psi_{zz} + \left(1 - (E^{-1}z)^2\right)\psi &= 0 \end{aligned}$$

2 точки поворота  $x = \pm\sqrt{E}$  первого порядка

$$|x| < \sqrt{E} : \quad \psi \approx (E - x^2)^{-1/4} (a \cos \theta + b \sin \theta), \quad \theta = \int_0^x (E - x^2)^{1/2} dx$$

$$x < -\sqrt{E} : \quad \psi \approx (x^2 - E)^{-1/4} (A_- e^{\varphi_-} + B_- e^{-\varphi_-}), \quad \varphi_- = \int_{-\sqrt{E}}^x (x^2 - E)^{1/2} dx$$

$$x > \sqrt{E} : \quad \psi \approx (x^2 - E)^{-1/4} (A_+ e^{\varphi_+} + B_+ e^{-\varphi_+}), \quad \varphi_+ = \int_{\sqrt{E}}^x (x^2 - E)^{1/2} dx$$

# 11.5. Пример: Уравнение Шредингера для гармонического осциллятора

Сращивание при  $x = -\sqrt{E}$

$$\theta = \underbrace{\int_{-\sqrt{E}}^x (E - x^2)^{1/2} dx}_{\theta_-} - \underbrace{\int_{-\sqrt{E}}^0 (E - x^2)^{1/2} dx}_{\theta_0 = \pi E / 4}$$

$$x > -\sqrt{E}: \quad \psi \propto (E - x^2)^{-1/4} (a \cos(\theta_- - \theta_0) + b \sin(\theta_- - \theta_0)) =$$

$$= (E - x^2)^{-1/4} (a_- \cos \theta_- + b_- \sin \theta_-) \quad \begin{cases} a_- = a \cos \theta_0 - b \sin \theta_0 \\ b_- = a \sin \theta_0 + b \cos \theta_0 \end{cases}$$

Уравнение связи  $\frac{a_- - b_-}{\sqrt{2}} = B_- = 0 \Rightarrow a(\cos \theta_0 - \sin \theta_0) = b(\sin \theta_0 + \cos \theta_0)$

Аналогичное сращивание при  $x = +\sqrt{E}$  дает  $a(\cos \theta_0 - \sin \theta_0) = -b(\sin \theta_0 + \cos \theta_0)$

$$\left. \begin{array}{l} a = 0, \quad \sin \theta_0 + \cos \theta_0 = 0 \Rightarrow \theta_0 = \pi / 4 + \pi k \\ b = 0, \quad \sin \theta_0 - \cos \theta_0 = 0 \Rightarrow \theta_0 = -\pi / 4 + \pi k \end{array} \right\} \theta_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \Rightarrow E = 2k + 1$$

## 11.5. Упражнение к л. 11

1. Используя преобразование (11.3) получить ВКБ – аппроксимацию решения уравнения

$$x^{(4)} + f(\varepsilon t)x = 0$$