

ДЕЙСТВИЯ С
КВАДРАТНЫ
МИ КОРНЯМИ

- Свойства квадратных корней часто используются в различных преобразованиях числовых выражений и в тождественных преобразованиях выражений с переменными.

ПРИМЕР 1: Преобразовать дробь $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{54}}$ так, чтобы её знаменатель не содержал радикала

РЕШЕНИЕ:

- Заменим частное корней квадратным корнем из частного их подкоренных выражений:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{54}} = \sqrt{\frac{2}{54}} = \sqrt{\frac{1}{27}} = \sqrt{\frac{1}{3^3}}$$

РЕШЕНИЕ:

- Для того чтобы из знаменателя извлекался корень, он должен содержать степень с чётным показателем. Умножим числитель и знаменатель подкоренной дроби на 3:

$$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3^3}} = \sqrt{\frac{3}{3^4}} = \frac{\sqrt{3}}{3^2} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

*Подобные преобразования иногда называют **освобождением дроби от иррациональности в знаменателе.***

ПРИМЕР 2: Упростить выражение

$$\sqrt{150} - \sqrt{96} - \sqrt{\frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{6}}}$$

РЕШЕНИЕ:

- Разложим числа, стоящие под радикалами, на простые множители:

$$\sqrt{150} = \sqrt{5^2 \cdot 2 \cdot 3} = 5\sqrt{6}$$

$$\sqrt{96} = \sqrt{2^5 \cdot 3} = \sqrt{2^4 \cdot 2 \cdot 3} = 4\sqrt{6}$$

- Избавимся от иррациональности в знаменателях дробей:

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{3^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{1}{3} \sqrt{6}$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{(\sqrt{6})^2} = \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{1}{6} \sqrt{6}$$

- Следовательно:

$$\sqrt{150} - \sqrt{96} - \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}} =$$

$$= 5\sqrt{6} - 4\sqrt{6} - \frac{1}{3}\sqrt{6} - \frac{1}{6}\sqrt{6} =$$

$$= \left(5 - 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) \sqrt{6} = \frac{1}{2} \sqrt{6}$$

ПРИМЕР 3: Освободить дробь

6

$\frac{6}{\sqrt{13}-\sqrt{10}}$ от иррациональности в

знаменателе

РЕШЕНИЕ:

- В знаменателе дроби стоит разность корней. Умножим числитель и знаменатель этой дроби на сумму тех же корней, чтобы получить в знаменателе разность их квадратов:

6

$$\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{\sqrt{13} - \sqrt{10}}} =$$

$$= \frac{\mathbf{6(\sqrt{13} + \sqrt{10})}}{\mathbf{(\sqrt{13} - \sqrt{10})(\sqrt{13} + \sqrt{10})}} =$$

$$= \frac{\mathbf{6(\sqrt{13} + \sqrt{10})}}{\mathbf{(\sqrt{13})^2 - (\sqrt{10})^2}} = \frac{\mathbf{6(\sqrt{13} + \sqrt{10})}}{\mathbf{13 - 10}}$$

$$= \mathbf{2(\sqrt{13} + \sqrt{10})}$$

ПРИМЕР 4: Упростить выражение

$$\left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) \left(\frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \sqrt{ab} \right)$$

РЕШЕНИЕ:

■ Обозначим: $\sqrt{a} = x$, $\sqrt{b} = y$, тогда

$$a\sqrt{a} = x^3, \quad b\sqrt{b} = y^3, \quad \sqrt{ab} = xy$$

■ Упрощаем выражение:

$$\left(\frac{x^3 + y^3}{x + y} - xy \right) \left(\frac{x^3 - y^3}{x - y} + xy \right) =$$

- После всех преобразований получим:

$$\left(\frac{x^3 + y^3}{x + y} - xy\right)\left(\frac{x^3 - y^3}{x - y} + xy\right) =$$
$$= (x^2 - y^2)^2$$

- Теперь вернемся к исходному выражению:

$$(x^2 - y^2)^2 = \left((\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2\right)^2 =$$
$$= (a - b)^2$$