

# Системы управления станками и комплексами

---

## Раздел 4.

### Методы интерполяции в режиме реального времени

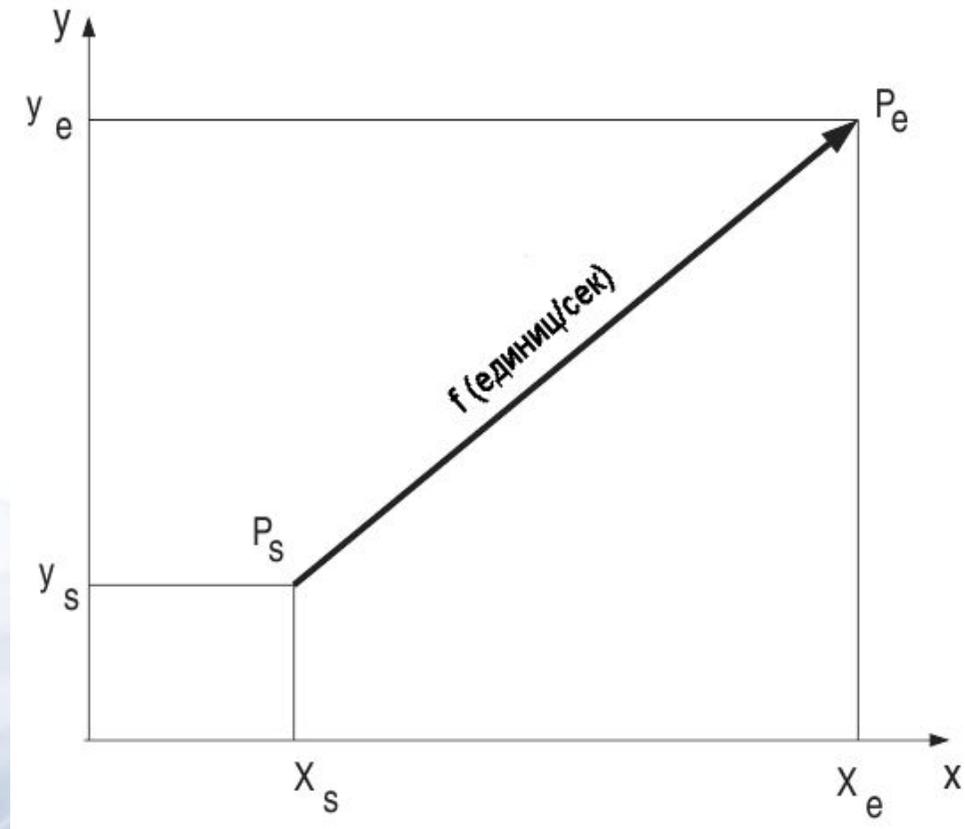
---

**Автор: Соболев А.Н., к.т.н., доцент  
Кафедра станков ФГБОУ ВО МГТУ «Станкин»**

Системы ЧПУ должны быть способны обрабатывать сложные траектории, которые могут присутствовать на обрабатываемых деталях. Большинство геометрических форм могут быть описаны линейными и круговыми сегментами. Однако, высокая скорость обработки штампов, пресс-форм, аэрокосмической деталей с рельефными поверхностями требует использования сплайн-интерполяции в режиме реального времени.

## Линейная интерполяция

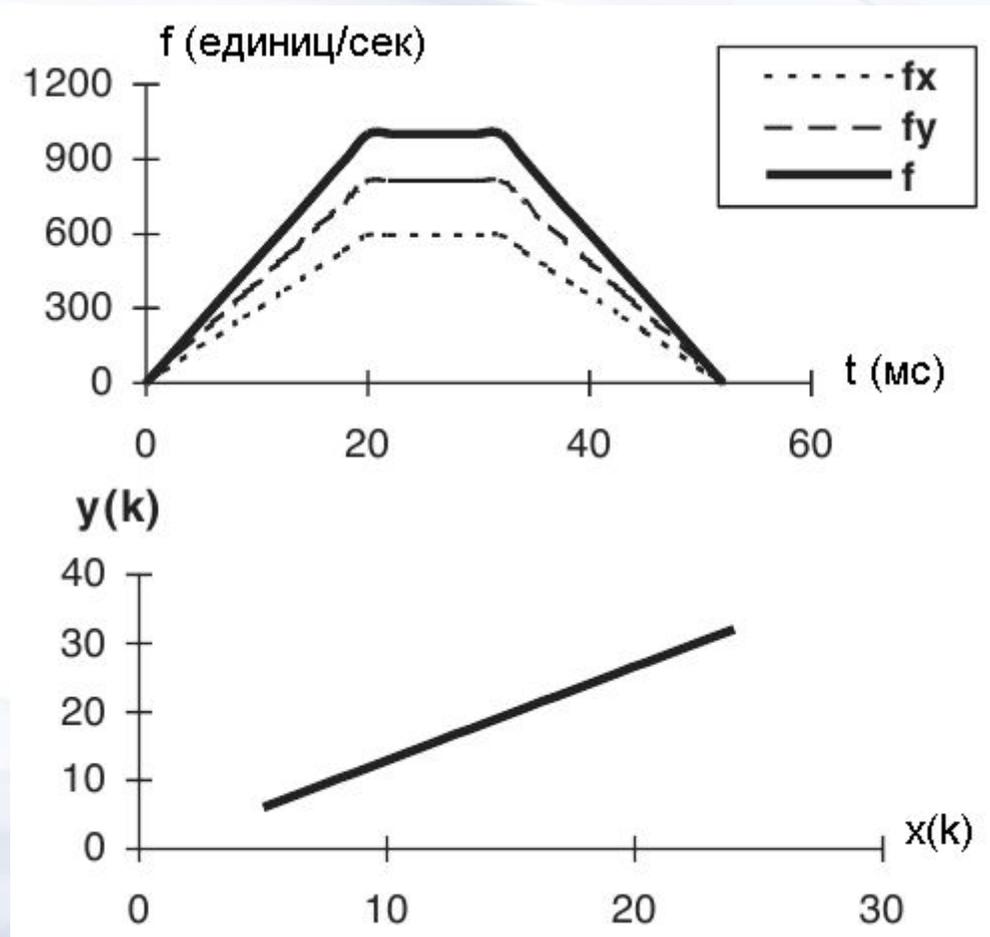
Центр режущего инструмента следует по линейному пути, показанному на рисунке. Начальной точкой инструмента является точка  $P_s(x_s, y_s)$  и конечной - точка  $P_e(x_e, y_e)$ .



### Принятые обозначения в алгоритме линейной интерполяции

$T_i$	Интерполяционный период.
$f$	Установленная подача.
$x_s, y_s$	Начальное положение.
$x_e, y_e$	Конечное положение.
$\delta x$	Общая длина пути по оси X.
$\delta y$	Общая длина пути по оси Y.
$\text{sign}(x)$	Направление перемещения по оси X.
$\text{sign}(y)$	Направление перемещения по оси Y.
$N$	Число интерполяционных итераций.
$dx, dy$	Величина шага по каждой оси.
$x_{rem}$	Остаток для шага по оси X.
$y_{rem}$	Остаток для шага по оси Y.
Все величины являются целыми числами кроме $T_i, f$	

## Пример линейной интерполяции



На каждом периоде  $T_i$  для каждой оси координаты могут быть рассчитаны следующим образом:

```
function line (xs, dx, xrem, sign(x), N)
x(1) = xs
xerror = 0
for i = 2,N + 1
    x(i) = x(i - 1) + sign(x) · dx
    xerror = xerror + xrem
    if (xerror >= N)
        x(i) = x(i) + sign(x)
        xerror = xerror - N
    end
end
end
```

На каждом периоде  $T_i$  для каждой оси координаты могут быть рассчитаны следующим образом:

```
function line (xs, dx, xrem, sign(x), N)
x(1) = xs
xerror = 0
for i = 2,N + 1
    x(i) = x(i - 1) + sign(x) · dx
    xerror = xerror + xrem
    if (xerror >= N)
        x(i) = x(i) + sign(x)
        xerror = xerror - N
    end
end
end
```

Сгенерированные позиционные команды в каждом временном интервале интерполяции  $T_i$  направляются в ЦАП сервопривода каждой оси в системе ЧПУ.

Пример. Следующий кадр управляющей программы поступил в ЧПУ с определенными единицами измерения:

```
N010 G01 G90 X24 Y32 F1000
```

В этом кадре задана конечная точка  $P_e(24,32)$  и подача  $f = 1000$  [единиц/сек]. Начальные координаты были заданы точкой  $P_s(5,6)$ , значения ускорения и замедления ЧПУ устанавливаются как  $A=D=50000$  [единиц/с<sup>2</sup>]. Скорость реализована трапецевидным законом. Минимальное время интерполяции в ЧПУ  $T_{\min} = 0.002$ с. Алгоритм интерполяции реализуется следующим образом:

$$\delta(x) = x_e - x_s = 19, \delta(y) = y_e - y_s = 26, L = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2} = 32,$$

$$\Delta u = f T_{\min} = 2, N = L / \Delta u = 16, N_1 = N_3 = f^2 / (2A\Delta u) = 5,$$

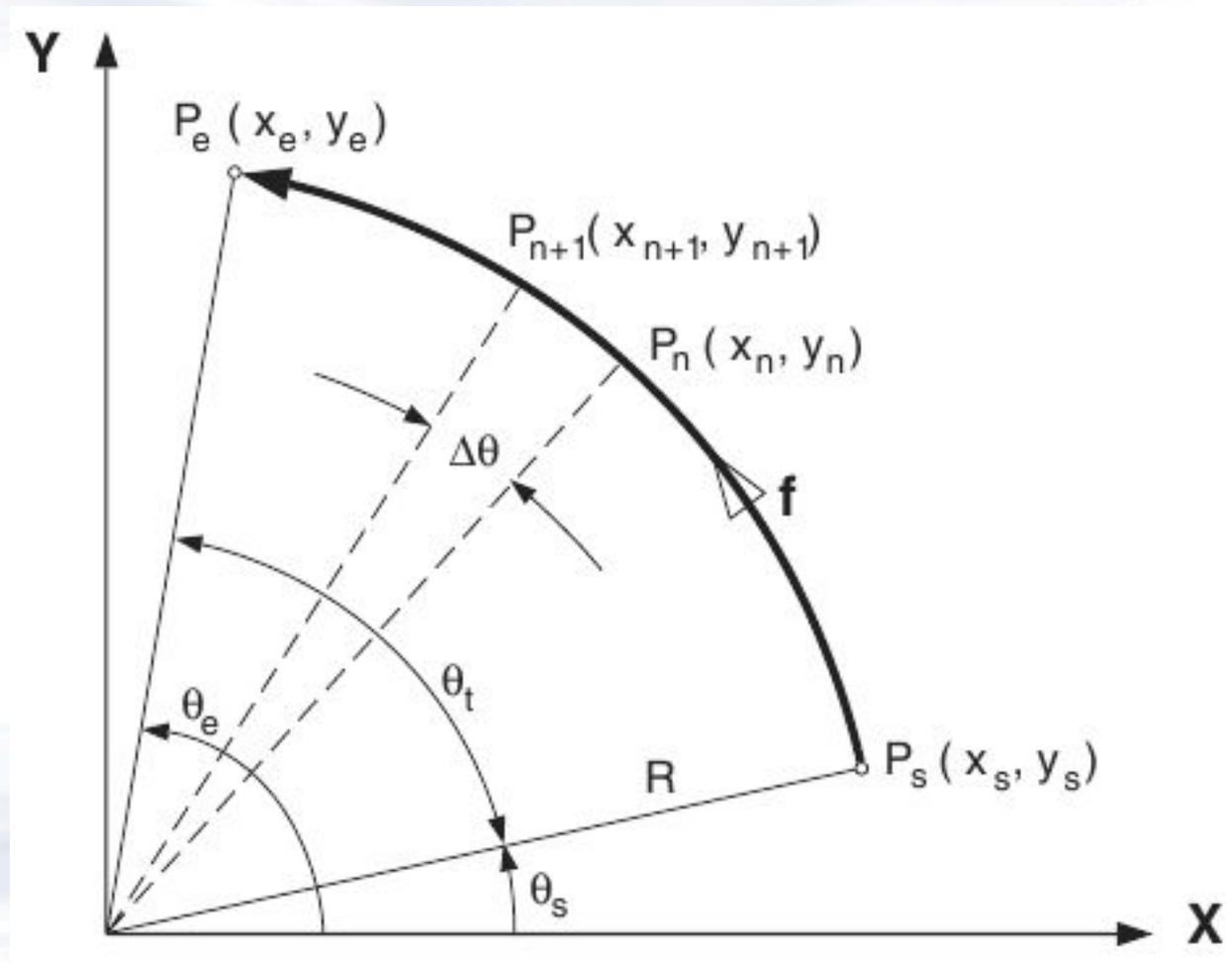
$$\Delta x = \delta x / N = 1.1875, \Delta y = \delta y / N = 1.625.$$

Результаты линейной интерполяция между точками  $P_s(5,6)$  и  $P_e(24,32)$

Часовые такты $k$	Подача $f(k)$ [единиц/с]	Интерполяционный интервал $T_i$ (мс )	Время $t$ [мс]	$x(k)$ [единиц]	$y(k)$ [единиц]
0	0.00	0.00000	0.0	5.00	6.00
1	447.21	0.00894	8.9	6.19	7.63
2	632.46	0.00370	12.6	7.38	9.25
3	774.60	0.00284	15.5	8.56	10.88
4	894.43	0.00240	17.9	9.75	12.50
5	1,000.00	0.00211	20.0	10.94	14.13
6	1,000.00	0.00200	22.0	12.13	15.75
7	1,000.00	0.00200	24.0	13.31	17.38
8	1,000.00	0.00200	26.0	14.50	19.00
9	1,000.00	0.00200	28.0	15.69	20.63
10	1,000.00	0.00200	30.0	16.88	22.25
11	1,000.00	0.00200	32.0	18.06	23.88
12	894.43	0.00211	34.1	19.25	25.50
13	774.60	0.00240	36.5	20.44	27.13
14	632.46	0.00284	39.4	21.63	28.75
15	447.21	0.00370	43.1	22.81	30.38
16	0.00	0.00894	52.0	24.00	32.00

## Круговая интерполяция

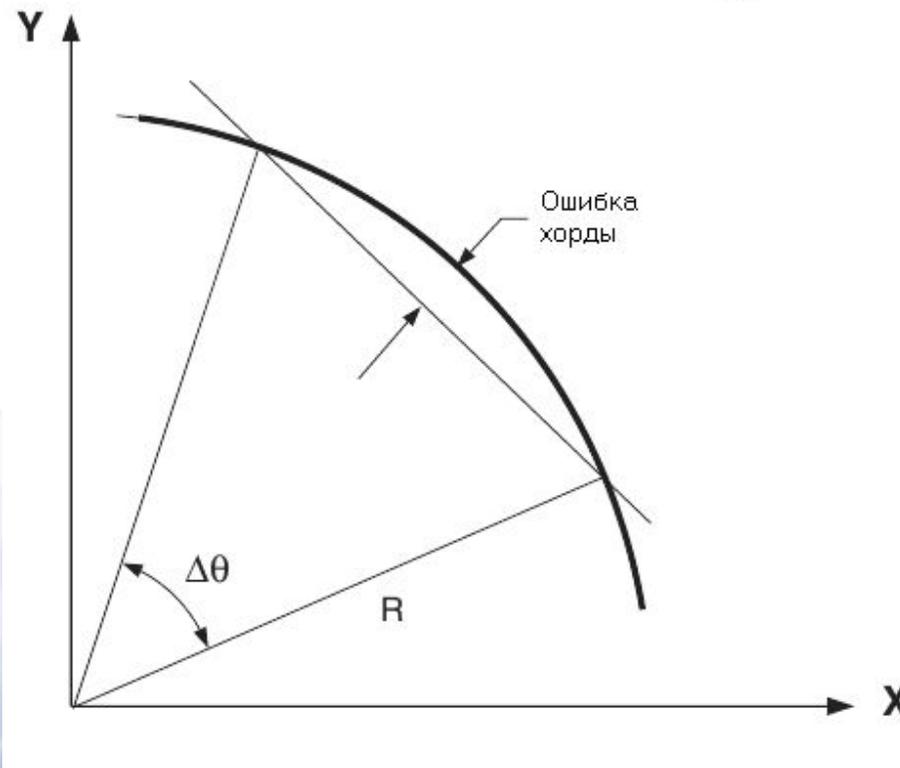
Интерполяция  
кругового  
сегмента



### Ошибка хорды

Для числовой интерполяции дуга должна быть разбита на  $N$  маленьких сегментов.  $\Delta u$  - длина каждого сегмента, а соответствующий угловой сегмент -  $\Delta\theta$ . Ошибка спрямления (ошибка хорды) должна быть меньше, чем разрешение позиционных сенсорных систем (т.е., меньше 1 единицы):

$$chord\_error = R(1 - \cos \frac{\Delta\theta}{2}) \leq 1$$



Пример. Кадр управляющей программы с заданием величин в некоторых единицах:

N010 G90 G03 X 90 Y-90 I-90 J0 F1000

В кадре задается начальная точка  $P_e(90, -90)$ , подача  $f = 1000$  [единиц/сек] и радиус  $R = \sqrt{I^2 + J^2} = 90$  единиц. Начальные координаты заданы точкой  $P_s(180, 0)$ , а величины ускорения ( $A$ ) и замедления ( $D$ ) устанавливаются равными  $4000$  [единиц/с<sup>2</sup>] в соответствии с трапециевидным законом скорости. Минимальное время интерполяции  $T_{min} = 0.002$ с. Алгоритм интерполяции инициализируется следующим образом:

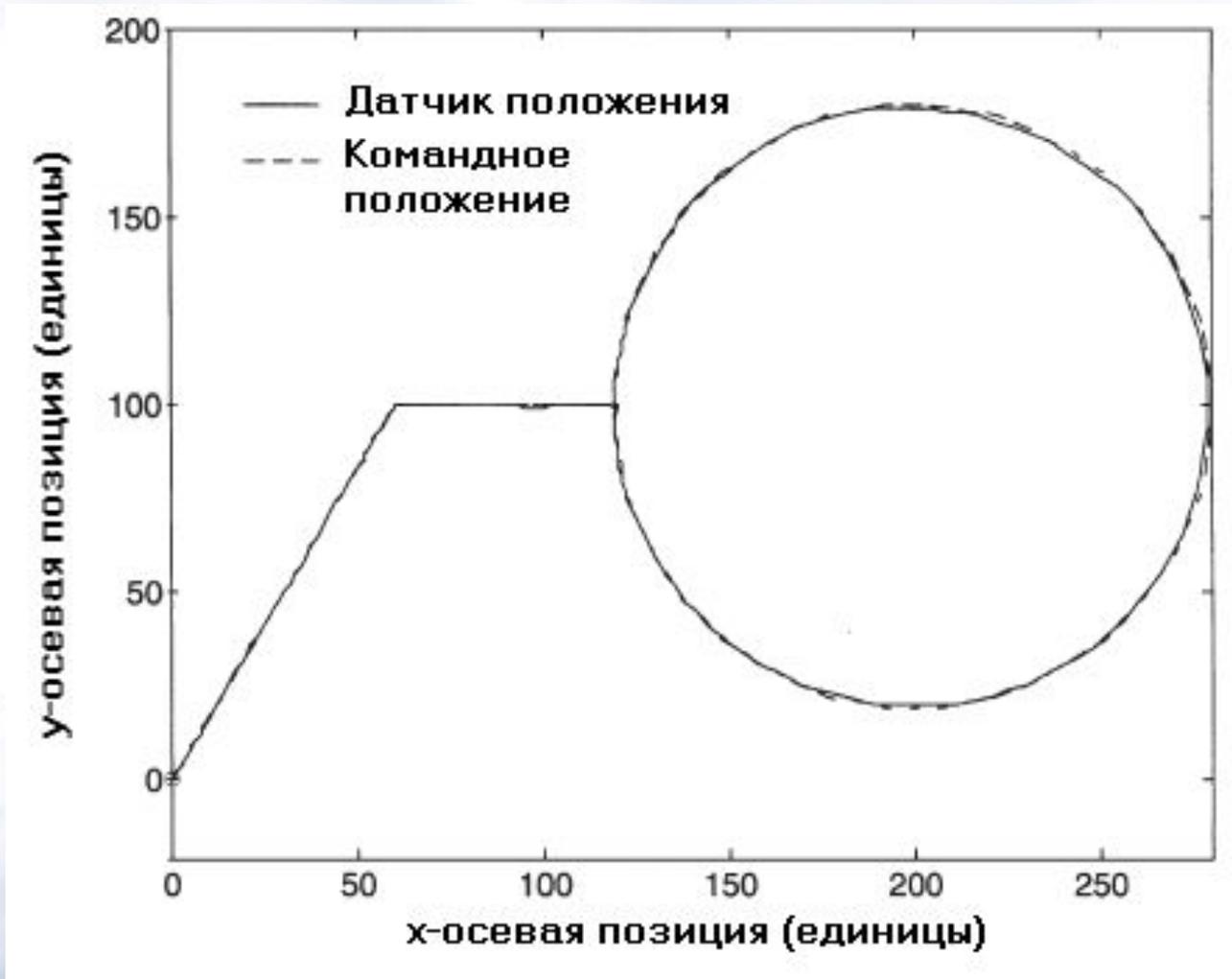
$$\theta_s = 0, \theta_e = \theta_t = 3\pi / 2 = 4.71239, \Delta\theta = 0.298419,$$

$$\Delta u = R\Delta\theta = 26.857723, N_1 = N_3 = f^2 / (2A\Delta u) = 5, N = \theta_t / \Delta\theta = 16.$$

Результаты круговой интерполяции между точками  $P_s (180, 0)$  и  $P_e (90, -90)$

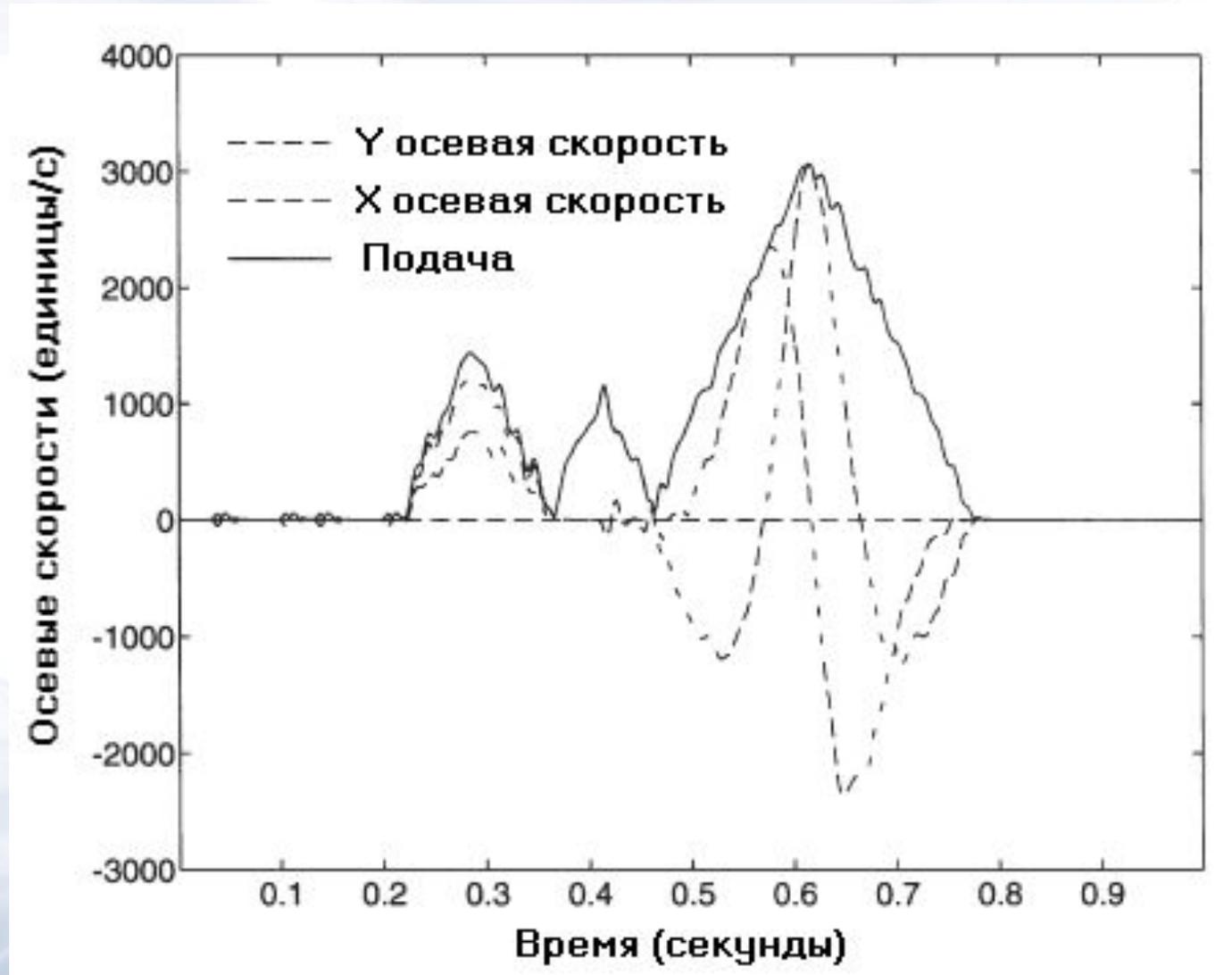
Часовые такты $k$	Подача $f(k)$ [единиц/с]	Интерполяционный интервал $T_i$ (мс)	Время $t$ [мс]	$x(k)$ [единиц]	$y(k)$ [единиц]
0	0.00	0.0000	0	180.00	0.00
1	463.53	0.1158	116	176.02	26.46
2	655.53	0.0480	164	164.44	50.58
3	802.86	0.0368	201	146.28	70.23
4	927.06	0.0310	232	123.14	83.68
5	1,000.0	0.0278	260	97.08	89.72
6	1,000.0	0.0268	286	70.38	87.84
7	1,000.0	0.0268	313	45.43	78.19
8	1,000.0	0.0268	340	24.41	61.63
9	1,000.0	0.0268	367	9.19	39.62
10	1,000.0	0.0268	394	1.11	14.11
11	1,000.0	0.0268	421	0.89	-12.65
12	886.08	0.0284	449	8.55	-38.29
13	755.17	0.0327	482	23.41	-60.54
14	596.17	0.0397	522	44.15	-77.45
15	374.90	0.0553	577	68.95	-87.50
16	0.00	0.1432	720	90.00	-90.00

## Геометрические результаты круговой и линейной интерполяции

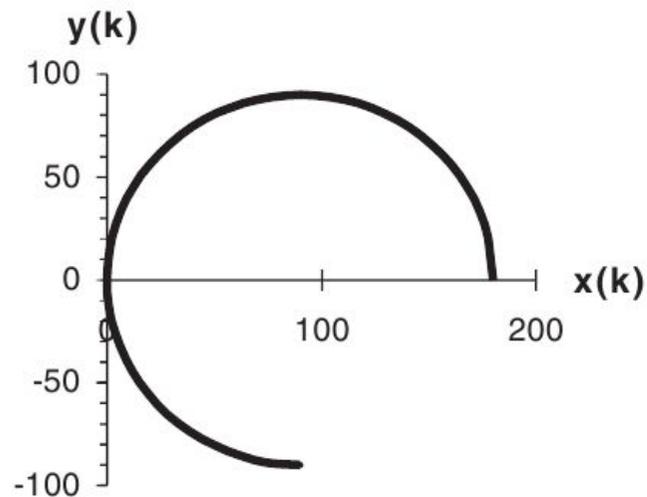
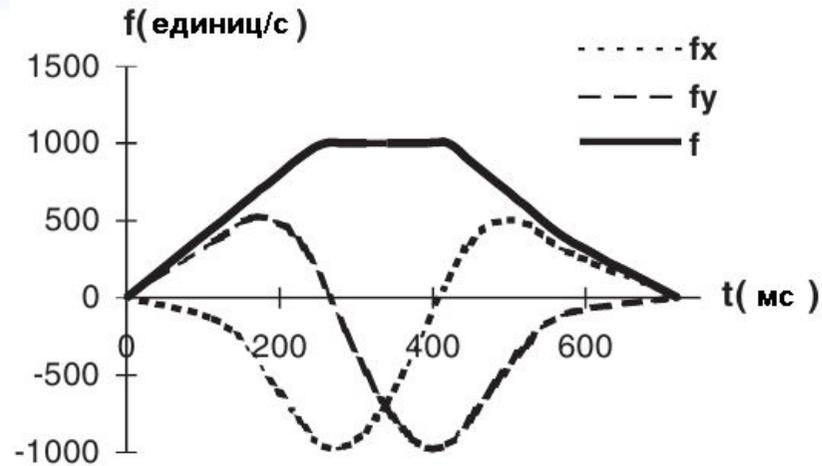


### Изменение кинематических параметров при круговой и линейной интерполяции

1 единица = 0,00127 мм



## Круговая интерполяция при варьируемом интерполяционном периоде с постоянным смещением

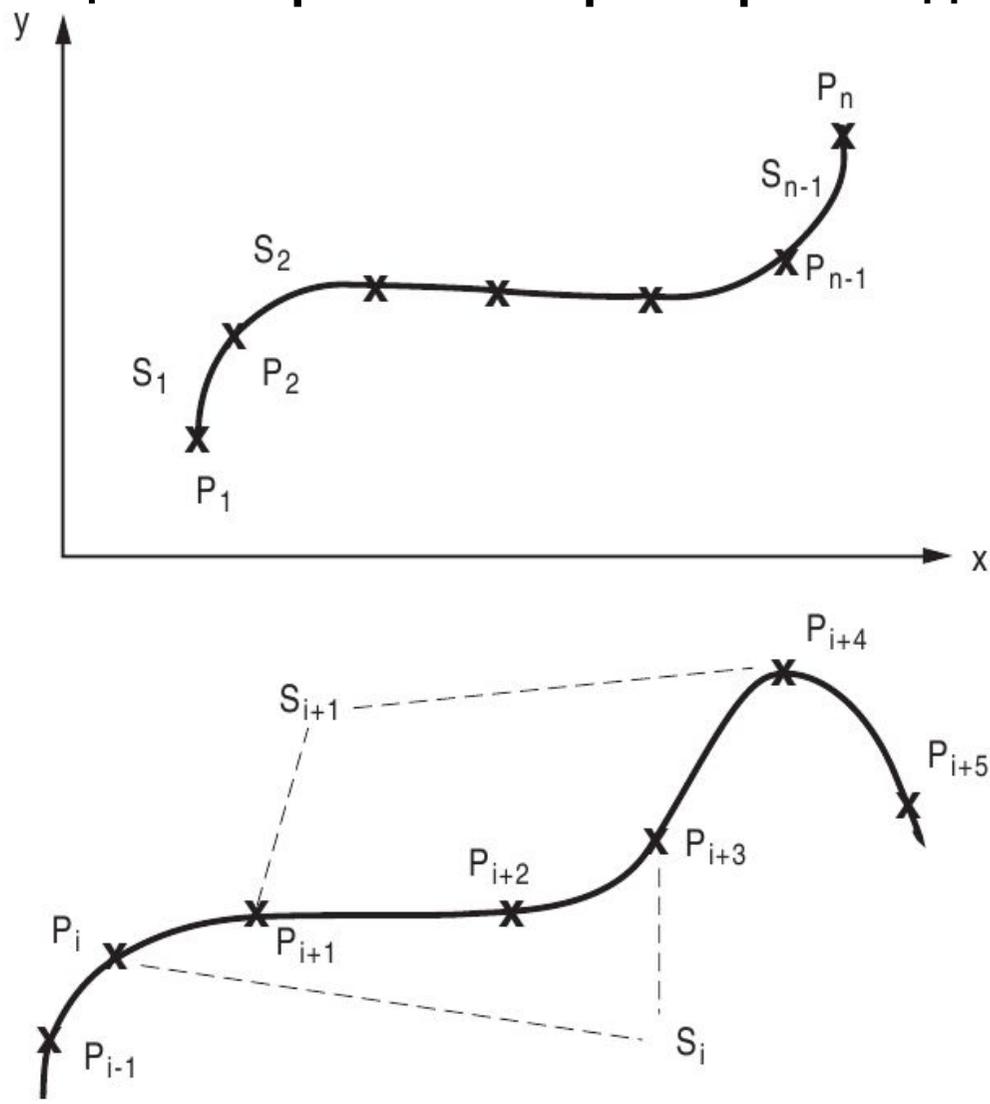


В дополнение к линейной и круговой интерполяции, современные ЧПУ могут реализовывать параболическую, спиральную и сплайновую интерполяцию. Вместо ломаных рельефных траекторий в небольших линейных и круговых сегментах, предпочтительно, чтобы перемещение режущего инструмента вдоль сложной траектории осуществлялось с использованием геометрии самого пути. Это уменьшает длину программы ЧПУ и улучшает плавность генерируемой скорости и ускорения в дополнение к оконтуриванию вдоль траектории. В режиме реального времени при высокоскоростной обработке штампов и пресс-форм интерполяция сплайном пятого порядка является наиболее полезной. Серия  $n$  узлов  $(P_1, P_2, \dots, P_n)$  вдоль траектории движения инструмента соединяется сегментами сплайна пятого порядка с плавными переходами. Сегмент сплайна  $S_i$ , соединяющий два узла  $(P_i, P_{i+1})$ , выражается полиномом пятого порядка следующим образом:

$$\{S_{qi}\} = \{A_{qi}\}u^5 + \{B_{qi}\}u^4 + \{C_{qi}\}u^3 + \{D_{qi}\}u^2 + \{E_{qi}\}u + \{F_{qi}\}$$

При интерполяции в режиме реального времени алгоритм требует задания значений всех коэффициентов сплайна ( $A, B, C, D, E, F$ ), длины сплайна ( $l_i$ ), а также исходных величин подачи, ускорения и ограничения рывков для приводных двигателей станка. Интерполяция сплайном пятой степени имеет как «офлайн», так и «онлайн» математические шаги. Сплайн пятой степени применим к серии узлов на траектории движения инструмента, при этом должны быть определены его коэффициенты. Предварительные установки могут быть сделаны в системе CAD/CAM в процессе генерации траектории движения инструмента, а коэффициенты сплайна могут быть переданы в ЧПУ с помощью управляющих кодов или они могут быть определены на стадии предварительной обработки ЧПУ с помощью исходных координат узлов, предоставляемых управляющей программой. Длина сплайнового сегмента оценивается путем аппроксимации длины его хорды. Коэффициенты, координаты узлов и аппроксимированная длина хорды используются для генерации координат по отдельным осям в режиме реального времени с учетом подачи, ускорения и ограничений рывков приводных двигателей станка.

Сплайн проходит через узлы, используются кубические многочлены при оценке первых и вторых производных



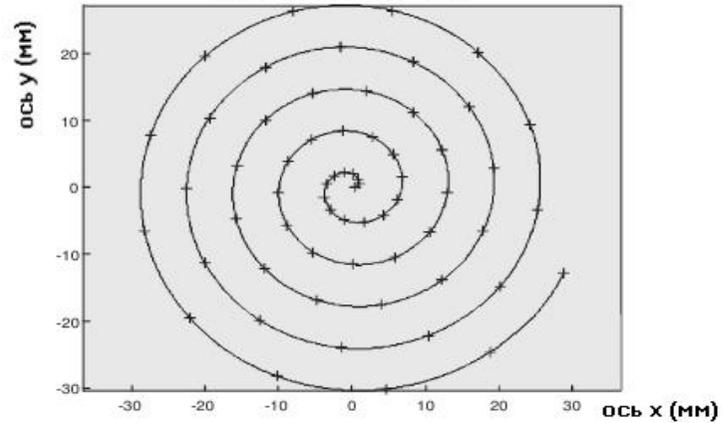
### Шаги предварительной обработки и шаги обработки в реальном времени при интерполировании сплайном пятой степени



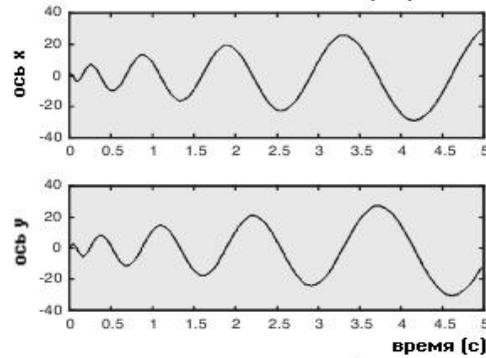
Пример. Интерполяция сплайном пятой степени и генерация траектории с ограниченным рывком реализуются в рамках открытого проекта ЧПУ, разработанного в «домашних условиях». Спиральные траектории движения инструмента были сформированы в режиме реального времени на основе двухплоскостной высокоскоростной XY таблицы. Фактическая спираль показана на рисунке ниже. Она нарисованная карандашом, который был прикреплен к стационарному шпинделю вместо инструмента, при заданных подаче, ускорении и рывке на каждом приводе, при движении вдоль заданной траектории. Начало пути инструмента соответствует центру спирали, где некоторые переходные процессы можно увидеть при ускорении и рывке.

# Методы интерполяции в режиме реального времени

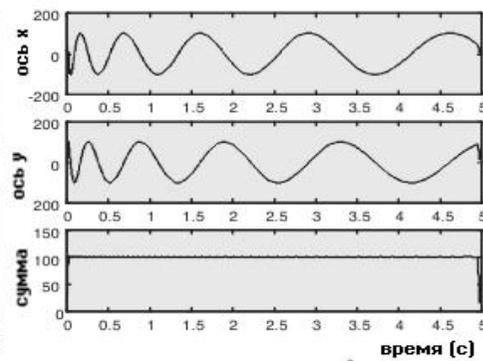
Траектория с узлами



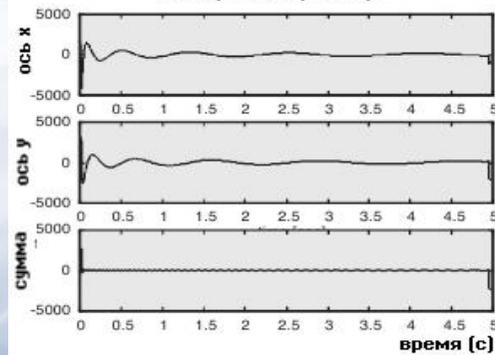
Осевые смещения (мм)



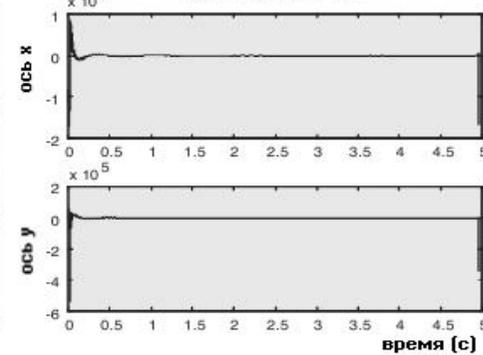
Подача (мм/с)



Ускорения (мм/с<sup>2</sup>)



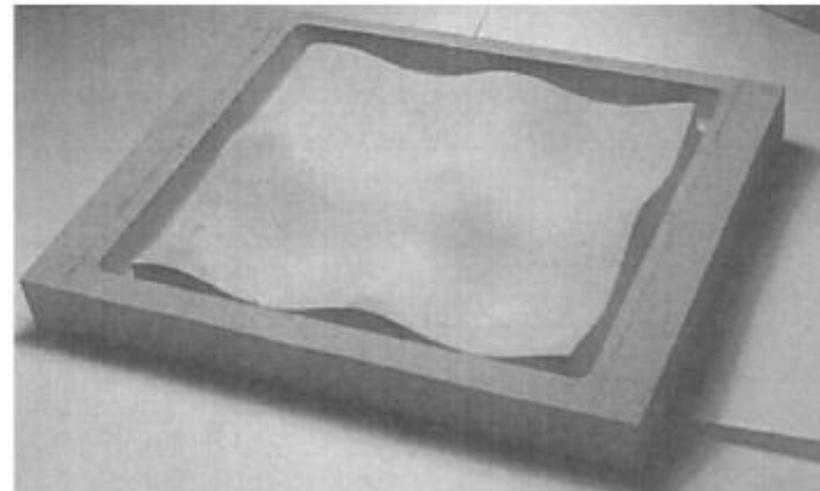
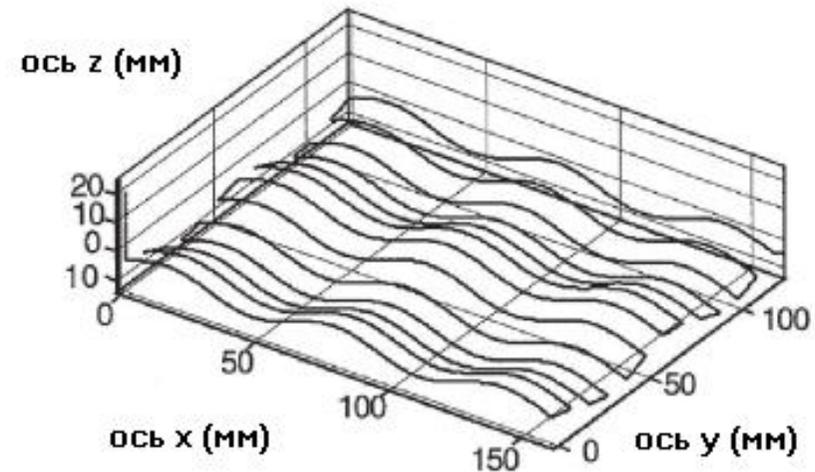
Скачок (мм/с<sup>3</sup>)



Пример. Сложная поверхность, на стадии предварительного анализа (визуализации) представляется серией сплайнов пятой степени. Деталь обрабатывается на трехосной фрезерной машине, управляемой открытой системой ЧПУ. Обрабатываемая деталь также показана на рисунке ниже. Оба примера реализуют генерацию траектории движения инструмента с использованием интерполяции сплайном пятой степени, а также используют закон скорости с ограничением рывков.

Пример криволинейной траектории инструмента и изготовленная деталь, полученные с помощью сплайн-интерполяции полиномом пятой степени на основе использования закона скорости с ограничением рывков.

Пример траектории инструмента



**СПАСИБО  
ЗА ВНИМАНИЕ!**