5.Приведите основные типы задач по усвоению общего функционального материала.

Основные типы задач, решаемых в 7 классе при изучении темы «Понятие функции»

1. Функция задана формулой $y=2x+7$. Найти значения функции, соответствующие значению аргумента, равного 1; -20; 43.
2. Функция задана формулой $y=2x+7$. Найти значения аргумента, равного 10; 50; 120, найти соответствующее значение функции.
3. Функция задана формулой $y=2x+7$. Заполните таблицу:

X	-6	-4	-3	2	5	6	7
Y							

1.Функция задана формулой y=2x+7. Заполните таблицу:
2.Составьте таблицу значений функции, заданной формулой y=2x+7, где 0≤x≤4 с шагом 0,5.
3.Найдите область определения функции, заданной формулой
y=2x+7; $y = \frac{2}{3+x}$

X	-6		-3		5	6	
Y		-4		3			14

1)У мальчика было 1050р. Он купил x карандашей по 10р. за штуку. Обозначив число рублей, оставшихся у мальчика, буквой y, задайте формулой зависимости y от x. Какова область определения этой функции?

2)Постройте график функции, заданной формулой $y=2x+7$, где $-3 \leq x \leq 4$, предварительно составив таблицу значений функции с шагом 1.

3)По графику найти значение функции в точке 0; 4; - 5; 5,7.

4)В одной и той же координатной плоскости постройте графики функций $y=2x+7$, $y=x+7$, $y=-2x$.

Изучение прямой пропорциональности $y=kx$, $k\neq 0$

Мотоциклист двигался со скоростью 16 м/с в течение t секунд. Сколько метров (s) проехал он за это время?
2. Ученик купил n карандашей по 5 р. Сколько рублей (c) он заплатил за покупку?
3. Найти массу m (г) алюминиевого провода, объем которого V (см3), если плотность алюминия равна 2,7 г/см3 . Учащиеся легко решат предложенные задачи, запишут три формулы: $s=16\ t$ $(t>0)$, $c=5n$ (n N), $m=2{,}7\ V$ $(V>0)$ и выяснят, что в каждом случае мы имеем дело с прямой пропорциональной зависимостью.

«Линейная функция»

Y=kx+b

Пример 1. *На шоссе расположены пункты А и В, удаленные друг от друга на 20 км. Мотоциклист выехал из пункта В в направлении, противоположном А, со скоростью 50 км/ч. За t ч мотоциклист проедет 50t км и будет находиться от А на расстоянии 50t + 20 км. Если обозначить буквой s расстояние (в километрах) от мотоциклиста до пункта А, то зависимость этого расстояния от времен движения можно выразить формулой s = 50t + 20, где t > 0.*

Пример 2. *Ученик купил тетради по 3 коп. за штуку и ручку за 35 коп. Стоимость покупки зависит от числа тетрадей. Обозначим число купленных тетрадей буквой х, а стоимость покупки (в копейках) буквой у.*

Получим у = 3х + 35, где х – натуральное число.

В обоих примерах мы встречались с функциями, заданными формулами вида у = кх + в, где х – независимая переменная, к и в – числа. Такие функции называют ***линейными****.*

1. Автомобиль, находясь в 5 км от города, начал движение от него со скоростью 60 км/ч. На каком расстоянии (s) от города он будет через t ч? 2. На складе было 500 т угля. Ежедневно стали увозить по 30 т угля. Сколько угля будет на складе (m) через n дней? Решение задач приводит к двум формулам: $s = 60t + 5$ (t 0), $m = -30n + 500$($n = 1, 2, \ldots, 16$), которые не напоминают прямую пропорциональность, следовательно, имеем дело с новой функцией, которая задается общей формулой $y = kx + b$ и называется линейной

квадратичная функция

$ax^2+bx+c=0$

задаче является *параметром* (в силу данного выше определения), совпадает с множеством действительных чисел.
В силу справедливости формул для координат вершины параболы
$x_{вершины}=-\frac{b}{2a}$, $y_{вершины}=ax^2_{вершины}+bx_{вершины}+c$, координаты вершины нашей параболы $y=x^2+6x+c$, задаются алгебраическими выражениями, зависящими от параметра c: $x_{вершины}=-\frac{6}{2\cdot 1}=-3$,
$y_{вершины}=(-3)^2+6\cdot(-3)+c=9-18+c=-9+c$.
Расстояние от начала координат до вершины параболы можно рассмотреть как гипотенузу прямоугольного треугольника, катеты которого равны $|x_{вершины}|$ и $|y_{вершины}|$, по теореме Пифагора. Тогда справедливо уравнение относительно параметра c: $5^2=|-3|^2+|-9+c|^2$. Воспользовавшись свойством модуля $|a|^2=a^2$, можно упростить правую часть данного уравнения и свести его к квадратному уравнению вида $c^2-18c+65=0$, которое имеет два решения: $c_1=13$, $c_2=5$.
Ответ: при $c=13$ и при $c=5$ параболы $y=x^2+6x+c$ находится на расстоянии 5 от начала координат.

22.54. График какой квадратичной функции проходит через точки $A(2;3)$, $B(0;1)$, $C(3;2)$?

Решение
Эта задача может быть переформулирована следующим образом: найдите значения коэффициентов a, b, c квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$, график которой проходит через точки $A(2;3)$, $B(0;1)$, $C(3;2)$.

ЗсП_2

Множества допустимых значений коэффициентов c и b, которые в нашей задаче является *параметрами* (в силу данного выше определения), совпадают с множеством действительных чисел. А множество допустимых значений коэффициента a, который в нашей задаче также является параметром (в силу данного выше определения) есть объединение двух открытых лучей: $(-\infty;0)$?$(0;+\infty)$.
Так как график функции $y=ax^2+bx+c$ проходит через точку $B(0;1)$, то $1=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c$, откуда $c=1$.
С учетом найденного значения параметра c и координат еще двух точек графика ($A(2;3)$ и $C(3;2)$) получим систему двух уравнений от двух переменных: a и b.

$\begin{cases}2=a\cdot 3^2+b\cdot 3+1,\\ 3=a\cdot 2^2+b\cdot 2+1\end{cases}$, решением которой является пара чисел $\begin{cases}a=-\frac{2}{3},\\ b=2\frac{1}{3}.\end{cases}$

Ответ: график функции $y=-\frac{2}{3}x^2+2\frac{1}{3}x+1$ проходит через точки $A(2;3)$, $B(0;1)$, $C(3;2)$.

4. УМК А.Г. Мордковича, базисный уровень, задачи

22.28. Найдите значение коэффициента c, если известно, что график функции $y=x^2+4x+c$ пересекает ось ординат в точке $A(0;2)$.
Решение
Задачу можно отнести ко второму классу задач с параметрами. Далее будем коротко обозначать принадлежность данному классу задач следующим образом:

ЗсП_2

Множество допустимых значений коэффициента c, который в нашей задаче является *параметром* (в силу данного выше определения), совпадает с множеством действительных чисел.
При любом значении c графиком данной функции будет некоторая парабола, пересекающая ось ординат в единственной точке (в силу определения функции). Аналитическое задание функции, график которой проходит через точку $A(0;2)$ обращается в верное числовое равенство при подстановке координат данной точки вместо независимой переменной x и зависимой переменной y. А выражение $y=x^2+4x+c$ - в уравнение относительно c:
$2=0^2+4\cdot 0+c$, откуда следует, что $c=2$.
Ответ: при $c=2$ график функции $y=x^2+4x+c$ пересекает ось ординат в точке $A(0;2)$, *Рисунок 1*.

22.30. Найдите значение коэффициента b, если известно, что осью симметрии графика функции $y=x^2+bx+4$ является прямая $x=1$.
Решение

ЗсП_2

Множество допустимых значений коэффициента b, который в нашей задаче является *параметром* (в силу данного выше определения), совпадает с множеством действительных чисел.
Для решения задачи вспомним, что уравнение оси симметрии параболы выглядит так:
$x=-\frac{b}{2a}$. Так как старший коэффициент квадратного трехчлена нам известен ($a=1$), то необходимо решить уравнение $1=-\frac{b}{2\cdot 1}$ относительно b. Получаем, что $b=-2$.
Ответ: при $b=-2$ осью симметрии графика функции $y=x^2+bx+4$ является прямая $x=1$, *Рисунок 2*.

22.49. При каком значении коэффициента c вершина параболы $y=x^2+6x+c$ находится на расстоянии 5 от начала координат?
Решение

ЗсП_2

Множество допустимых значений коэффициента c, который в нашей задаче является *параметром* (в силу данного выше определения), совпадает с множеством действительных чисел.
В силу справедливости формул для координат вершины параболы
$x_{вершины}=-\frac{b}{2a}$, $y_{вершины}=ax^2_{вершины}+bx_{вершины}+c$, координаты вершины нашей параболы $y=x^2+6x+c$, задаются алгебраическими выражениями, зависящими от параметра c: $x_{вершины}=-\frac{6}{2\cdot 1}=-3$,
$y_{вершины}=(-3)^2+6\cdot(-3)+c=9-18+c=-9+c$.
Расстояние от начала координат до вершины параболы можно рассмотреть как гипотенузу прямоугольного треугольника, катеты которого равны $|x_{вершины}|$ и $|y_{вершины}|$, по теореме Пифагора. Тогда справедливо уравнение относительно параметра c: $5^2=|-3|^2+|-9+c|^2$. Воспользовавшись свойством модуля $|a|^2=a^2$, можно упростить правую часть данного уравнения и свести его к

Степенные функции:

$y=x$; $y=x^2$; $y=x^3$

$y=1/x$; $y=k/x$

$y=\sqrt{x}$; $y=\sqrt[3]{x}$

$y=x^n$ где $n\in N$.

К кубическому корню из числа можно подвести учеников, предложив задачу: «Объем куба равен 1000см³ . Найти его ребро». Решая ее составлением уравнения: $x^3=1000$, получим $x=10$. Мы находим число, куб которого равен 1000. Затем даётся определение кубического корня из числа и вводится соответствующая запись. Извлечение кубического корня из числа проводится на калькуляторе. Умея извлекать кубические корни, можно рассматривать график функции $y=\sqrt[3]{x}$.

тренажеры тесты вопросы к уроку

Рассмотрим типовые задачи:

1. Какая из точек – А или В – принадлежит графику функции $y = f(x)$, если

$f(x) = x^{-4}$, т. $A\left(\frac{1}{2}; 16\right)$, т. $B\left(-2; \frac{1}{8}\right)$.

Решение:

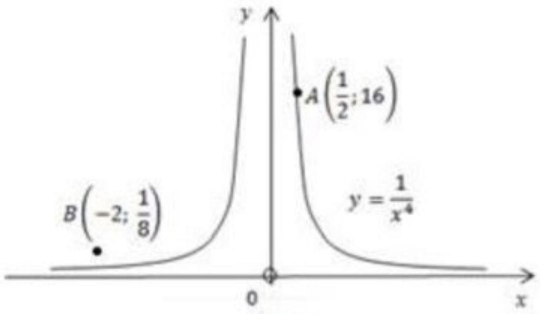


Рис. 3

т. А: $\begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = 16; \end{cases}$

т. А принадлежит графику.

т. В: $\begin{cases} x = -2, \\ y = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16} \neq \frac{1}{8}; \end{cases}$

2. Какая из точек А, В, С принадлежит графику функции $y = f(x)$, если

$f(x) = x^{-5}$, т. $A(0;0)$, т. $B(-1; -1)$, т. $C\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

Решение:

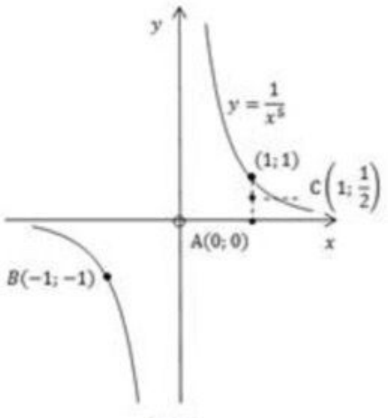


Рис. 4

т. А: $\begin{cases} x = 0, \\ y - \text{не определен.} \end{cases}$

т. В: $\begin{cases} x = -1, \\ y = \frac{1}{(-1)^5} = -1. \end{cases}$

т. С: $\begin{cases} x = 1, \end{cases}$

т. В: $\begin{cases} \\ y = \frac{1}{(-1)^5} = -1. \end{cases}$

т. С: $\begin{cases} x = 1, \\ y = \frac{1}{1^5} = 1 \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

Ответ: т. В принадлежит графику.

3. Постройте график функции $y = \frac{1}{(x+1)^4} + 1$ и прочтите его.

Решение:

Построим график функции $y = \frac{1}{x^4}$ (Рис. 5). Его асимптоты – прямые $y = 0$ и $x = 0$.

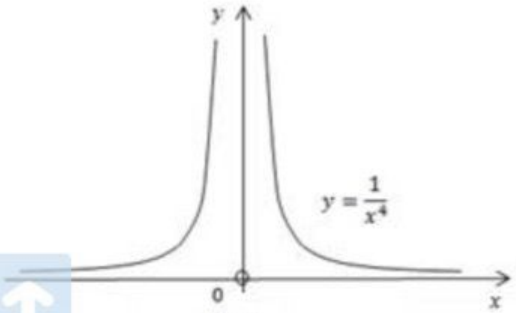


Рис. 5

Чтобы получить график функции $y = \frac{1}{(x+1)^4} + 1$, необходимо график $y = \frac{1}{x^4}$ сдвинуть на 1 вверх по оси *y*и на 1 единицу влево по оси *x* (Рис. 6).

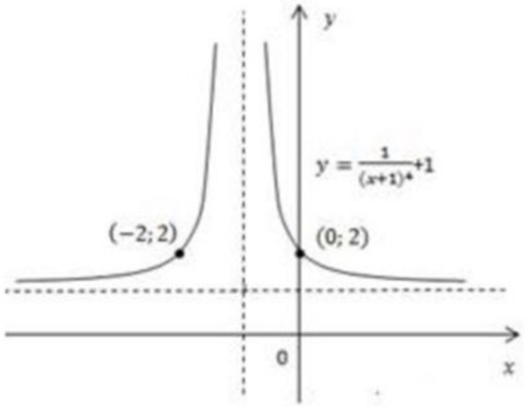


Рис. 6

Асимптоты полученного графика – прямые $y = 1$ и $x = -1$, характерные точки $(-2; 2)$ и $(0; 2)$.

Если $x \in (-\infty;\ -1)$ то *y* возрастает, $y \in (1;\ +\infty)$.

Если $x \in (-1;\ +\infty)$, то *y* убывает, $y \in (1;\ +\infty)$.

4. Найдите все значения параметра *m*, при каждом из которых уравнение

$(x+1)^{-4} + 1 = m$ имеет хотя бы одно решение

Показательные функции

Y=a^x, .где a>0 и a$\neq 1$

Задача 1. Масса колонии бактерий, помещенных в питательную среду, равна 1 г. Каждый час она увеличивается вдвое. Какова будет ее масса через 1, 2, 3, 10, n ч после начала наблюдения? Вычислите массу колонии через то же время до начала наблюдения (время будем считать отрицательным). Результат оформите в виде таблицы.

В процессе решения задачи надо уяснить, что в начале наблюдения (т.е. при t = 0) масса колонии бактерий равнялась 1г, а затем она удваивалась через каждый час (t =1,2,3,…). Фиксируя массу ежечасно, получаем геометрическую прогрессию: 2, 2^2, 2^3,2^4,…,2^n с первым членом b_1=2 и знаменателем q=2; n-й член прогрессии $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, т.е. $b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$. Пользуясь формулой, можно заполнить таблицу при t>0, а затем при t<0 (без обращения к геометрической прогрессии):

До начала наблюдения						В ходе наблюдения						
…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	10	20	n
	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	1024	1048576	2^n

После оформления решения задачи предложить учащимся записать формулой выявленную зависимость: $m=2^n$, где n может быть как натуральным числом, так и отрицательным целым.

Задача 2. Период полураспада одного из изотопов радона составляет пять дней. Имеется 1г этого вещества. Сколько нераспавшегося вещества останется через одну, две, три, четыре пятидневки, через месяц (30 дней), через n пятидневок? Вычислить массу вещества за те же промежутки времени до начала наблюдения (время отрицательное). Результат представить таблицей.

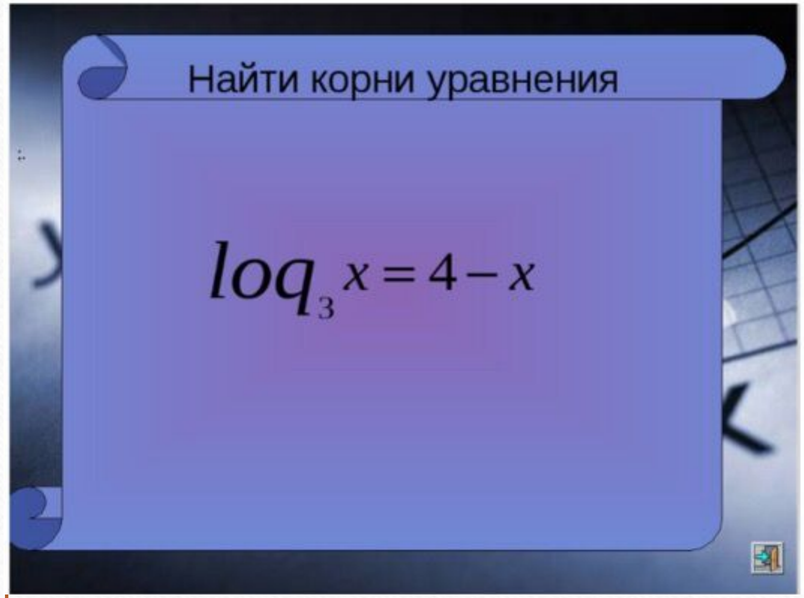
Проводя аналогичные рассуждения, получим геометрическую прогрессию: $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \ldots, \frac{1}{2^n}$ с первым членом $b_1 = \frac{1}{2}$, знаменателем $q = \frac{1}{2}$, и n-м членом $b_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, где n означает число пятидневок. Таблица может иметь вид:

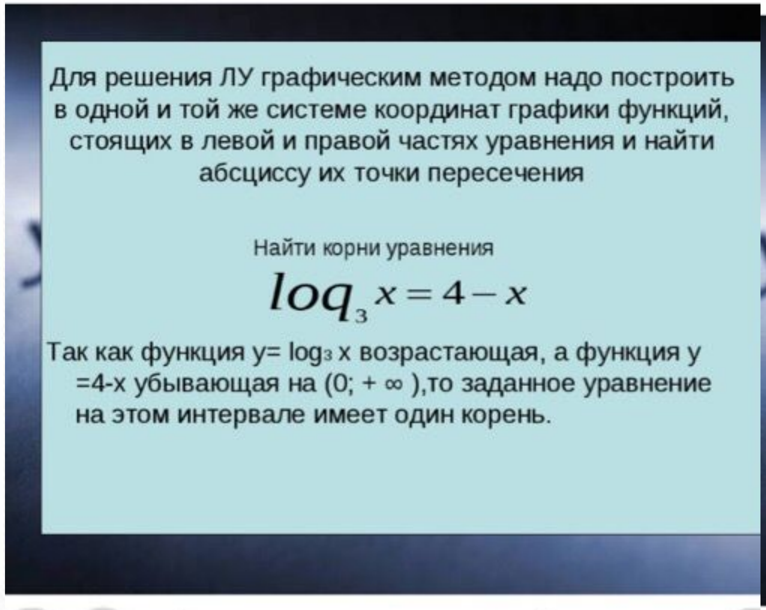
До начала наблюдения						В ходе наблюдения					
…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	6	n
	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$

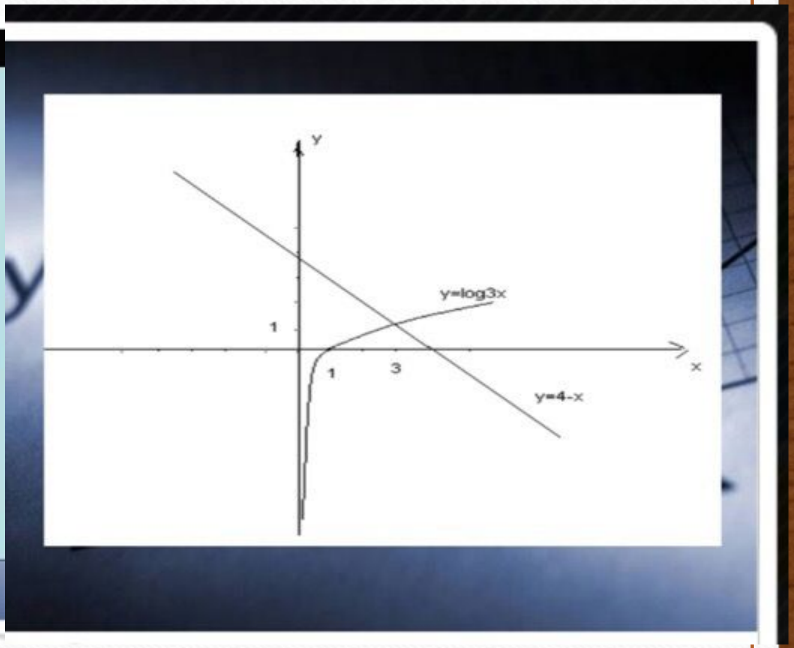
Выявленная зависимость может быть записана формулой $m=\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Здесь же можно сообщить учащимся, что количество нераспавшегося вещества можно узнать по этой формуле и при дробных показателях, например, через 2,5 суток.

Логарифмическая функция

y=$\log_a x$







симметричны друг другу относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов. Если, например, рисунок 252 перегнуть по этой биссектрисе, то графики функций $y = 2^x$ и $y = \log_2 x$ наложатся друг на друга.

Упражнения

1385. Пересекается ли логарифмическая кривая $y = \log_a x$;:

а) с осью x; б) с осью y?

1380. Используя график функции $y = \log_2 x$, найти логарифмы по основанию 2 чисел 0,5; 0,6; 0,7; 1,5; 2,3; 3,0.

Логарифмы каких чисел по основанию 2 равны 0,7; 0,8; 0,9; 1,0; 1,5?

1387. Исходя из графика функции $y = \log_2 x$, построить графики функций:

а) $y = \log_2(x — 1)$; в) $y = \log_2 x$; д) $y = | \log_2 x |$;

б) $y = \log_2(x + 2)$; г) $y = \log_2 | x |$; е) $y = \log_2(—x)$.

1388. Построить графики функций:

а) $y = \log_{1/3} x$; в) $y = \log_{1/3} (x + 2)$; д) $y = \log_{1/3} | x |$;

б) $y = \log_{1/3} (x — 1)$; г) $y = | \log_{1/3} x |$; е) $y = \log_{1/3} (—x)$.

1389. На одном и том же рисунке построить графики функций

$$y = \log_3 x \quad \text{и} \quad y = \log_{1/3} x.$$

Тригонометрическая функция

Задача №1. Вычислить период функций а) $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$; б) $y = -2\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{3\pi}{4}\right) + 1$.

Воспользуемся указанными в лекции формулами.

а) Для функции $y = \cos(ax \pm b)$ период $T = \frac{2\pi}{a}$. В нашем случае $a = 2$, т.е. $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

б) Для функции $y = \mathrm{tg}(ax \pm b)$ период $T = \frac{\pi}{a}$. У нас $a = \frac{1}{3}$, т.к. аргумент можно представить не только разделенным на три, но и умноженным на $\frac{1}{3}$. Остальные действия с функцией (умножение на -2, добавление 1) не влияет на аргумент, поэтому нас не интересуют.

Получаем, что $T = \frac{\pi}{\frac{1}{3}} = 3\pi$

Ответ. а) π; б) 3π.