METODE NUMERICE IN MECANICA SOLIDULUI DEFORMABIL

Prof.dr.ing. Gabriel JIGA

1 ora curs + 1 ora seminar/laborator

$$N_{TOT} = 0,1 \cdot N_{PREZ} + 0,4 \cdot N_{T.C.} + 0,5 \cdot N_{EX}$$
$$N_{EX} = (N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5)/5$$

N_1 = Rezolvarea ecuatiilor cu o singura variabila

N_2 = Aproximarea functiilor de o variabila

N_3 = Integrarea numerica

N_4 = Metode numerice pentru rezolvarea sistemelor de ecuatii liniare

N_5 = Calculul vectorilor si valorilor proprii

CURS 1

SCURT ISTORIC

- Dupa o serie de istorici, calculul numeric isi are originile in al treilea mileniu I.Hr.

- Dateaza din acea vreme fiind favorizat de nevoia efectuarii unor masuratori in diferite domenii ale vietii de zi cu zi in special in agricultura, in comert, arhitectura, geografie, navigatie si astronomie.

- Se pare ca babilonienii sunt printre primii care au efectuat calcule algebrice si geometrice de o mare complexitate si o mare precizie. Acestia au introdus pentru prima oara notiunea de baza de numarare – baza sexagezimala, care a fost introdusa si adoptata in diferite domenii.

- Acum 3500 de ani populatia vaii Hindusului introduce notiunea de zero si utilizeza notiunea de numere negative. Ei sunt cei care adapteaza sistemul de numarare babilonian sistemului zecimal, utilizat in prezent.

- Aceste prime unelte de calcul sunt pe larg dezvoltate in continuare de catre vechii greci si apoi transmis in Europa prin intermediul civilizatiilor musulmane care populau bazinul mediteraneean.

- Calculul numeric, asa cum il concepem in zilele noastre, a cunoscut primul avant incepand din secolul al XVII-lea odata cu progresul matematicii si al fizicii. O serie de masini de calcul au fost concepute in acest sens (PASCALINA – inventata de catre B. Pascal in 1643, DENO – Difference Engine number one, descoperita de catre C. Babbage in 1834. Erau masini mecanice impozante, cu o utilizare destul de limitata.

- Lipsa unor mijloace de calcul performante limiteaza validarea anumitor teorii de la inceputul secolului XX (teoria relativitatii a lui A. Einstein).

- Al doilea razboi mondial si progresele tehnologice care apar cu acest prilej vor permite calculului numeric sa cunoasca o noua dezvoltare.

- Englezii pun la punct primul calculator in 1939, COLOSSUS, a carui misiune era aceea de a decripta mesajele codate transmise de catre emitatorul Enigma din Germania nazista. Aceasta masina introduce conceptul revolutionar emis de catre A. Turing in 1936, cu privire la automatizarea calculelor.

- O alta masina care dateaza din acea vreme a fost ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Computer), conceputa in 1946. Din nefericire, acest tip de masina nu dispunea de memorie interna si trebuia in permanenta reprogramata.

- La sfarsitul anilor ’40 un anume J. von Neumann regandeste arhitectura calculatoarelor si introduce, printre altele, memoriile, permitand salvarea diferitelor programe de calcul.

- Prima masina de calcul incluzand conceptele lui von Neumann si cele ale lui Turing este produsa de catre compania americana IBM. Se numeste MARK I si cantareste 5 tone.

- Limbajul de programare FORTRAN a fost conceput in 1954 si este destinat calculatorului stiintific.

- La sfarsitul anilor ’60, odata cu aparitia progresiva a tranzistorilor, creste in mod considerabil performantele acestor masini de calcul, permitandu-se simulari numerice de o inalta precizie. Apar in acest sens in 1970 faimoasele microprocesoare puse la punct de catre firmele INTEL si MOTOROLA

REZOLVAREA ECUATIILOR CU O SINGURA VARIABILA

Ecuatii
- Algebrice – ex: $7x^3 - 5x^2 + 2 = 0$
- Transcendente – ex: $e^{\sin x} - \ln x = 0$

Desi exista numeroase metode pentru calculul exact al unei radacini reale (Horner, Viète etc.) acest lucru nu este intotdeauna posibil fie din cauza ca marea majoritate a ecuatiilor nu au solutii exacte fie deoarece metodele de mai sus nu pot fi aplicate ecuatiilor transcendente.

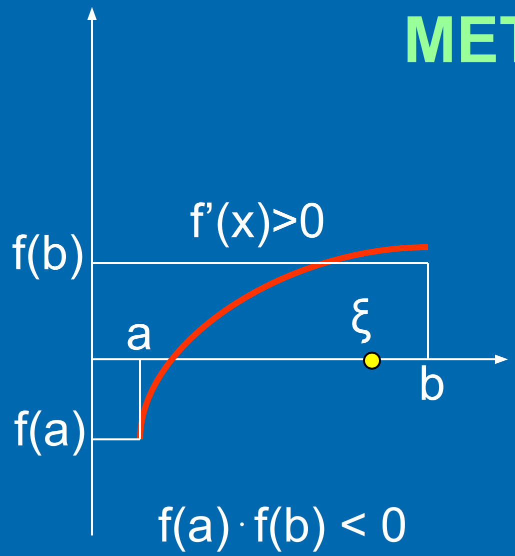
Metodele numerice conduc la determinarea radacinilor printr-un proces de aproximatii succesive

Separarea radacinilor – aceasta etapa consta in determinarea succesiva a intervalelor in care se gaseste exact cate o radacina a ecuatiei date.

Daca f(x) e continua pe [a,b] si $f(a) \cdot f(b) < 0$ atunci pe (a,b) exista cel putin o radacina ξ a ecuatiei $f(x) = 0$. Daca in plus $f'(x) > 0$ sau $f'(x) < 0$ atunci radacina este unica.

Metodele de aproximatii succesive conduc la aflarea aproximativa a radacinilor ecuatiei $f(x) = 0$ prin generarea unui sir $(x_{i,n})$ care in ipoteza convergentei tinde catre radacina cautata. Procesul de calcul se opreste in urma compararii marimii $|x_{i,n+1} - x_{i,n}| \leq \varepsilon$ unde ε este eroarea impusa.

METODE NUMERICE PENTRU REZOLVAREA ECUATIILOR CU O VARIABILA

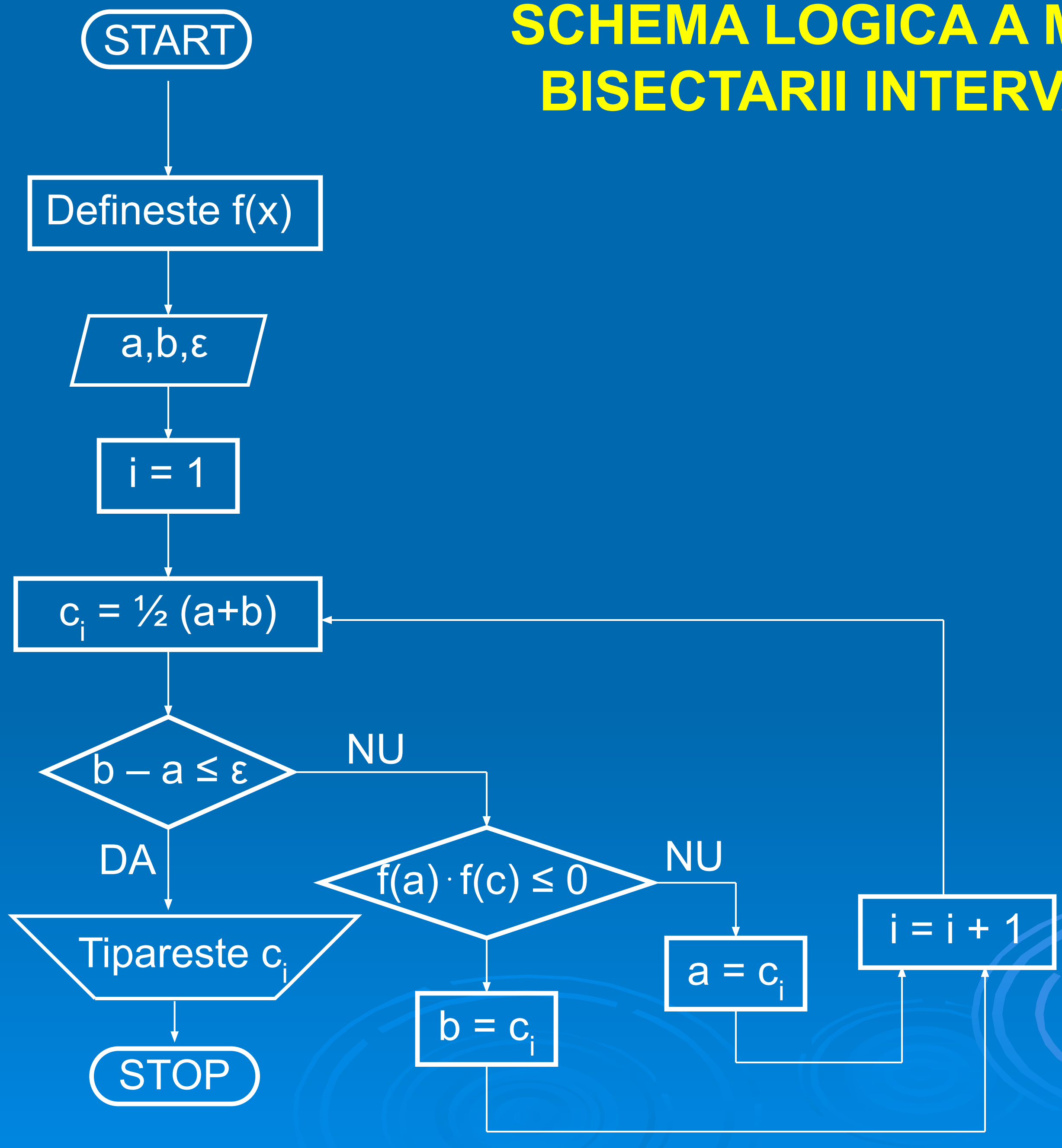


- Metoda bisectarii (injumatatirii) intervalului;
- Metoda coardei;
- Metoda tangentei (Newton – Raphson)

A. Metoda bisectarii intervalului

- Se calculeaza valorile functiei f(x) in extremitatile intervalului f(a) si f(b);
- Daca $f(a) \cdot f(b) < 0$ se continua procedeul pe intervalul [a,b]; daca $f(a) \cdot f(b) > 0$ procesul se opreste
- Se calculeaza $c = ½ (a+b)$ si se calculeaza f(c);
- Daca $f(a) \cdot f(c) < 0$ procedeul se continua pe [a,c] si se repeta primii trei pasi; daca $f(a) \cdot f(c) > 0$, procedeul se continua pe [c,b], repetandu-se primii trei pasi.
- Se verifica in final daca $b-a < ε$. Daca DA – procesul s-a incheiat.

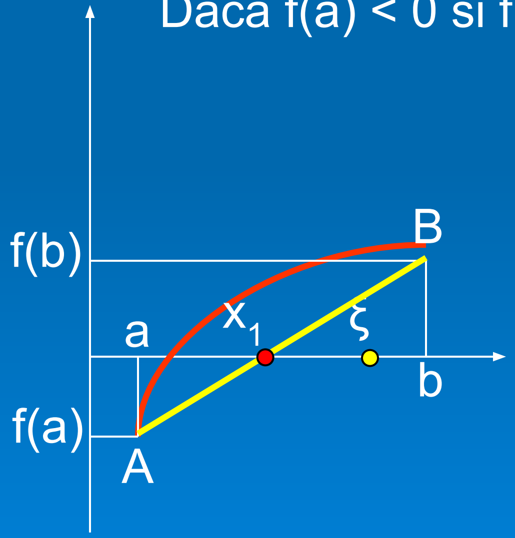
SCHEMA LOGICA A METODEI BISECTARII INTERVALULUI



B. Metoda coardei

Se considera o ecuatie f(x) = 0, f(x) continua pe [a,b] si $f(a) \cdot f(b) < 0$. Se mai presupune ca f ” (x) ≠ 0 si ca isi pastreaza acelasi semn pe (a,b).

In metoda coardei se aproximeaza functia f(x) cu coarda ce uneste punctele A si B si se ia ca prima valoare aproximativa a radacinii, abscisa x_1 a punctului de intersectie al acestei drepte cu axa Ox. Procedeul se repeta pentru unul din intervalele $[a, x_1]$ sau $[x_1, b]$, determinandu-se x_2. O mai buna aproximatie a radacinii reale ξ se obtine prin iteratii succesive pana când $|x_{n+1} - x_i| < \varepsilon$.



Daca f(a) < 0 si f “ (x) > 0

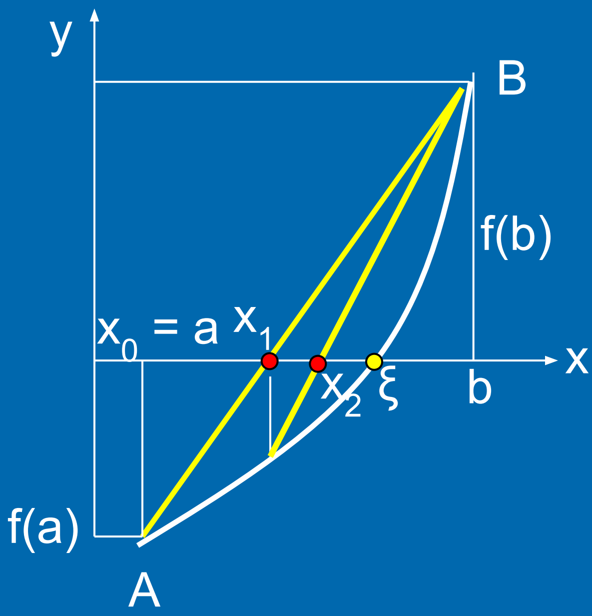
$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n)\ ,\ x_0 = a}$$

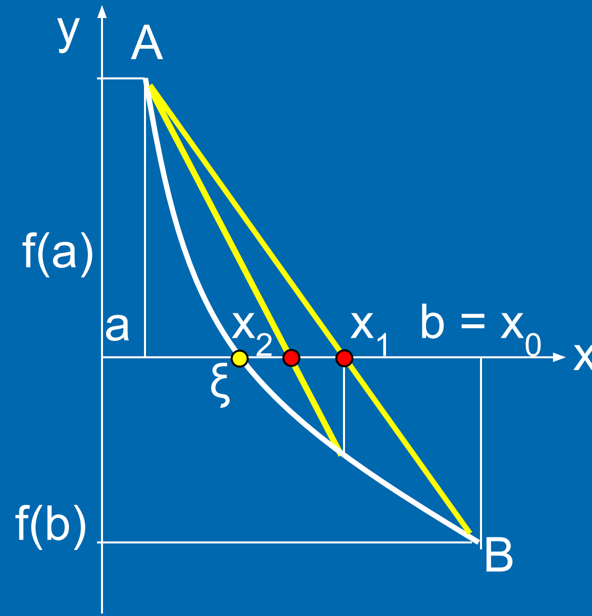
$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots < \xi < b.$$

Daca f(a) > 0 si f “ (x) > 0

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a)\ ,\ x_0 = b}$$

$$a < \ldots < \xi < \ldots < x_{n+1} < x_n < \ldots < x_1 < x_0.$$

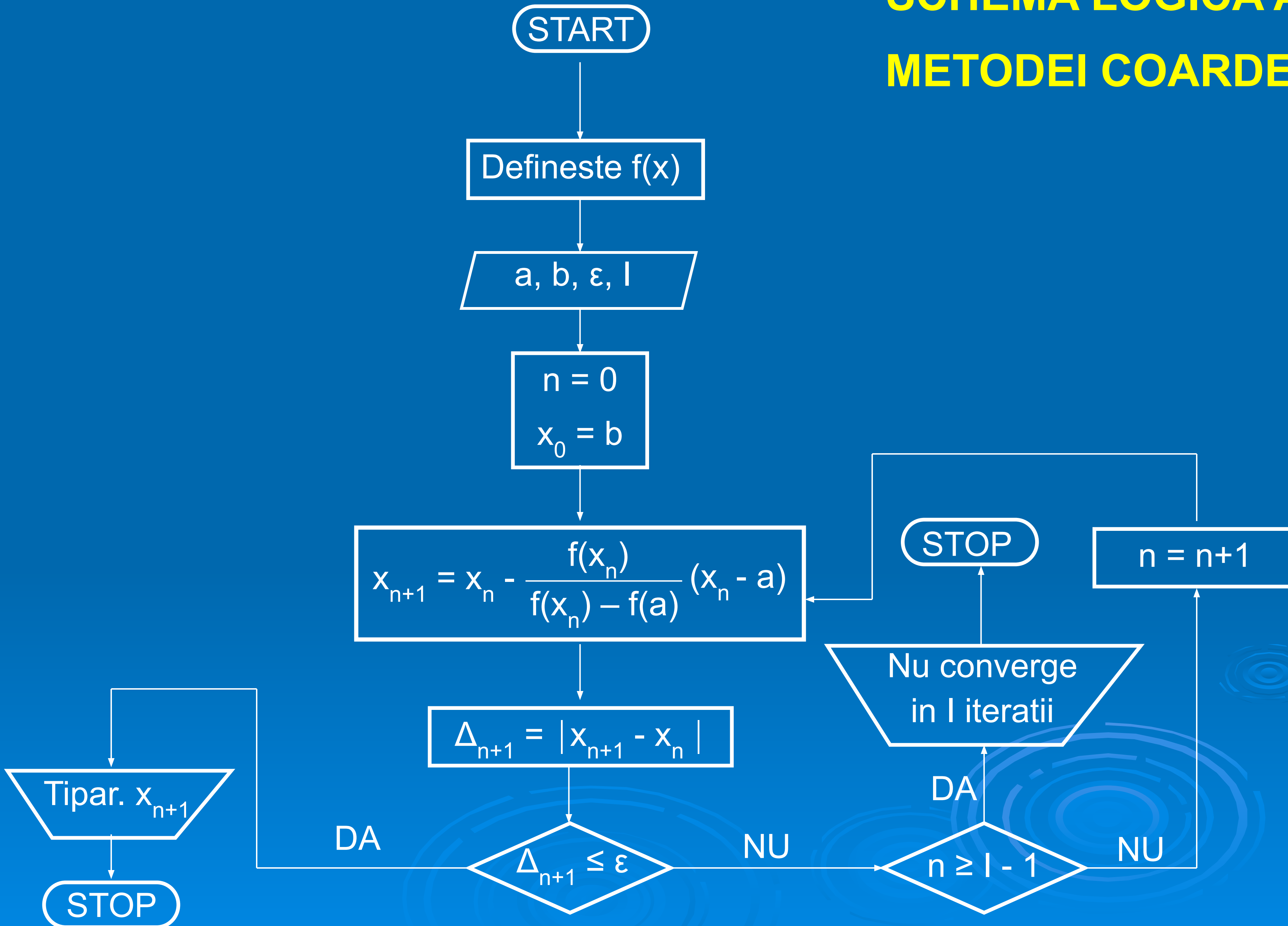




Concluzii:

- extremitatea fixa este aceea in care semnul functiei f(x) coincide cu semnul derivatei a doua;
- solutiile aproximative succesive x_i se afla in vecinatatea valorii exacte a radacinii ξ, la stanga sau la dreapta acesteia, in partea in care functia f(x) are semn opus fata de a derivatei de ordinul II
- in cazul figurii 1) metoda coardei da valori aproximative prin lipsa, iar in cazul figurii 2), prin adaos.

SCHEMA LOGICA A METODEI COARDEI

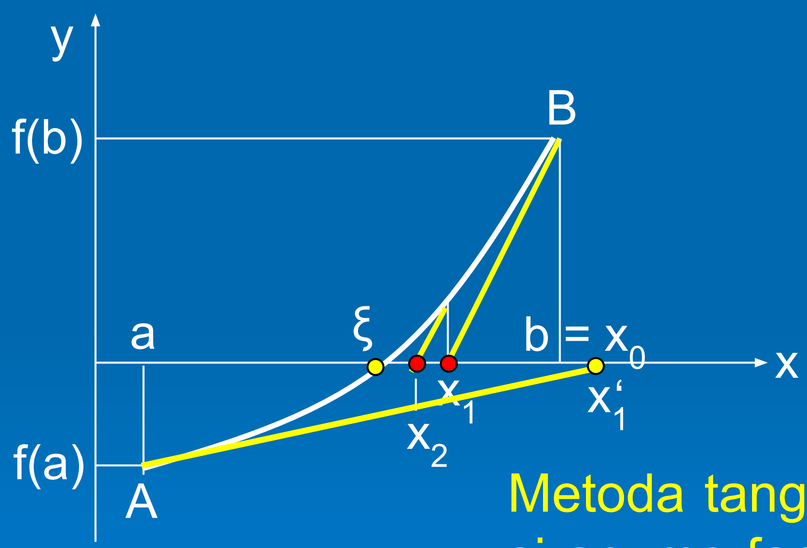


C. <u>Metoda tangentei (Newton-Raphson)</u>

Fie ecuatia f(x) = 0 care admite o singura radacina reala in (a,b). Se presupune de asemenea ca f ”(x) ≠ 0 si ca functia isi pastreaza semnul constant in acest interval.

In metoda tangentei se aproximeaza radacina ecuatiei cu abscisa punctului de intersectie a tangentei la curba intr-un punct cu axa Ox.

Consideram cazul f(a) < 0 si f ” (x) > 0.



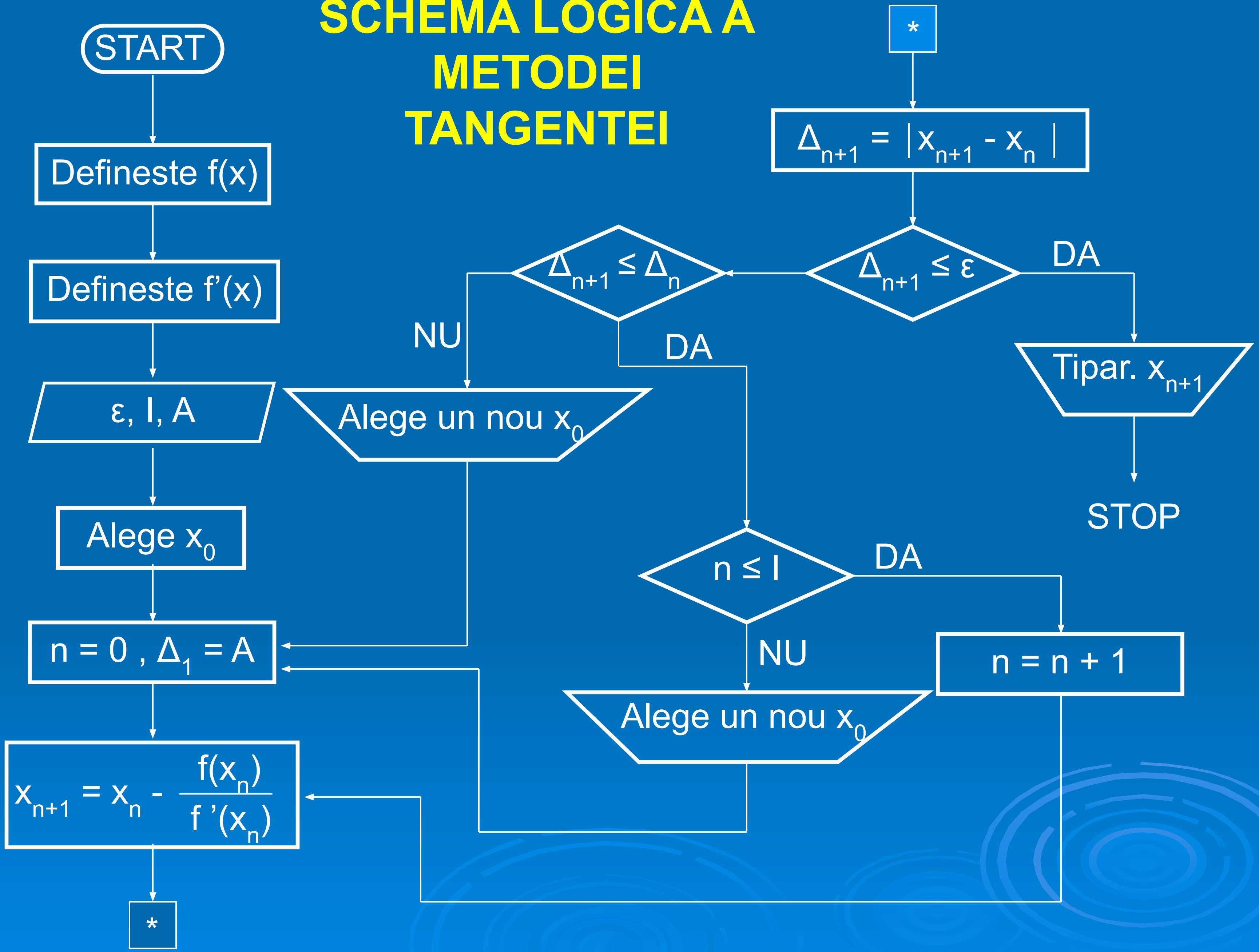
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$n \geq 0$

Cea mai buna aproximare initiala x_0 (punctul de start) este aceea care verifica inegalitatea: $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$

Metoda tangentei este complementara metodei coardei si anume faptul ca daca una da o valoare aproximativa a radacinii prin lipsa (adaos), cealalta ofera solutia prin adaos (lipsa). Datorita simplitatii formulei de recurenta, combinata cu o rapiditate a convergentei, metoda tangentei este de preferat celorlalte metode.

SCHEMA LOGICA A METODEI TANGENTEI



APLICATII

APLICATIA 1

Sa se rezolve, cu o eroare $\varepsilon < 0,01$, ecuatia: $x^3 + x - 1 = 0$

Rezolvare Deoarece $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \Rightarrow f(x)$ e strict crescatoare.

Cum $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ si $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty \Rightarrow f(x)$ are o singura radacina reala. Se observa ca $f(0) = -1$ si $f(1) = 1$, deci radacina se gaseste intre (0,1). Vom aplica metoda bisectarii intervalului. Deoarece $f(0) \cdot f(1) < 0$,

- calculam $c_1 = \frac{0+1}{2} = 0,5$. In acest punct, $f(0,5) = -0,375$. Cum $f(0,5) \cdot f(1) < 0$, radacina ξ se gaseste in intervalul (0,5; 1). Se continua procedeul iterativ, rezultand: $c_2 = \frac{0,5+1}{2} = 0,75$; $f(0,75) = 0,1719 \Rightarrow f(0,5) \cdot f(0,75) < 0$, deci intervalul s-a restictionat la (0,5; 0,75). Se continua procedeul iterativ, obtinandu-se dupa a saptea iteratie $c_7 = \frac{0,6719 + 0,6875}{2} = 0,6797$; $f(0,6797) \cong -0,0063$, deci radacina se gaseste in intervalul (0,6797, 0,6875). Cum $0,6875 - 0,6797 = 0,0078 < 0,01$, valoarea radacinii obtinute cu precizia ceruta este $\xi = 0,6836$.

APLICATIA 2

Sa se gaseasca, utilizand metoda coardei, cu o eroare < 0,01, radacina pozitiva a ecuatiei: $x^3 - 0,2x^2 - 0,2x - 1,2 = 0$.

Rezolvare Delimitam mai intai intervalul in care ar putea fi aceasta radacina. Cum f(1) = -0,6 si f(1,5) = 1,425, radacina este situata in intervalul (1; 1,5). Cum f(a=1) < 0 si $f''(x) > 0$ $(\forall)$ $x \in (1; 1,5)$, se aplica formula:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n)\ ,\ x_0 = a}$$

in care a = 1, b = 1,5

$$x_1 = 1 - \frac{(-0,6)}{1,425-(-0,6)}(1,5 - 1) = 1,15\ ;\ f(1,15) = -0,173$$

$$x_2 = 1,15 - \frac{(-0,173)}{1,425-(-0,173)}(1,5 - 1,15) = 1,19\ ;\ f(1,19) = -0,036$$

$$x_3 = 1,19 - \frac{(-0,036)}{1,425-(-0,036)}(1,5 - 1,19) = 1,198\ ;\ f(1,198) = -0,0072$$

Deoarece 1,198 – 1,19 < 0,01 se paote aproxima radacina cautata cu valoarea obtinuta dupa a treia iteratie, si anume: $\xi = 1,198$.

APLICATIA 3

Sa se calculeze cu trei zecimale exacte radacina negativa a ecuatiei:

$$x^4 – 3x^2 + 75x – 10000 = 0$$

Rezolvare

Deoarece f(-11) = 3453 > 0 si f(-10) = -1050 < 0 inseamna ca radacina ξ apartine intervalului (-11, -10). Consideram ca aproximatie initiala x_0 = -11.

Se aplica formula: $\boxed{x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$ si se intocmeste urmatorul tabel:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
0	-11	3453	-5183	-10,3
1	-10,3	134,3	-4234	-10,27
2	-10,27	37,8	-4196	-10,261
3	-10,261	0,2	-	-

Valoarea aproximativa a radacinii este deci: x_3 = -10,261

UTILIZAREA COMENZILOR PROGRAMULUI MATLAB PENTRU REZOLVAREA ECUATIILOR DE O VARIABILA

A) Functia f(x) este un polinom de grad n

Exemplu: sa se determine radacinile polinomului: $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2$

COMANDA: **p = [1, - 4, 5, 0, - 2]**

r = roots (p)

⇒

1.7607 + 08579i

1.7607 – 0,8579i

1.000000

-0.5214

B) Functia f(x) nu este o functie polinomiala

Exemplu: sa se determine radacinile ecuatiei lnx – tgx = 0

Se creeaza un fisier cu extensia .m (spre exemplu **ecu.m**), in care se defineste functia.

COMANDA: **function y = ecu(x)**

y = log(x) – tan(x)

Acest fisier (ecu.m) se apeleaza cu comanda:

z = fzero (‘ecu’,10)

in care valoarea 10 este o estimare initiala a radacinii, obtinandu-se valoarea: **10,5948**

EXERCITII

Sa se rezolve ecuatiile:

a) $2^x = x^2$

b) $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2 = 0$

c) $\ln 3x - tg^2\, x = 0$

d) $e^x + x = 0$

Solutii:

a) $x_1 = 2$; $x_2 = 4$; $x_3 = -0{,}7667$

b) $x_1 = -\,0{,}5214$; $x_2 = 1$; $x_{3,4} = 1{,}7607 \pm 0{,}8579i$

c) $x_1 = 10{,}5017$

d) $x_1 = -\,0{,}5671$(unica solutie reala)