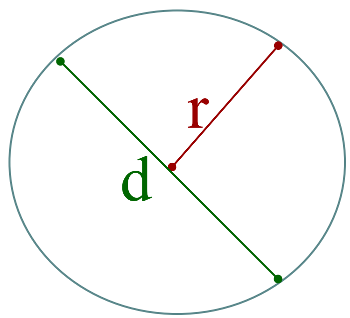
Урок-лекция

по теме:

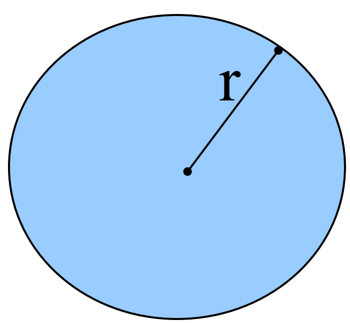
Сфера, шар основные характеристики

Геометрия –11 класс

Окружность и круг



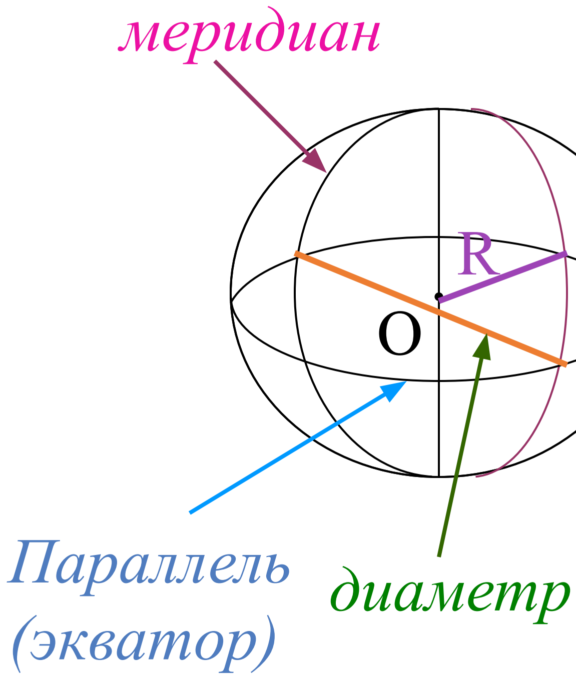
- **Окружностью** называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, расположенных на заданном расстоянии r от данной точки.
- r – радиус;
- d – диаметр



- Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется **кругом.**

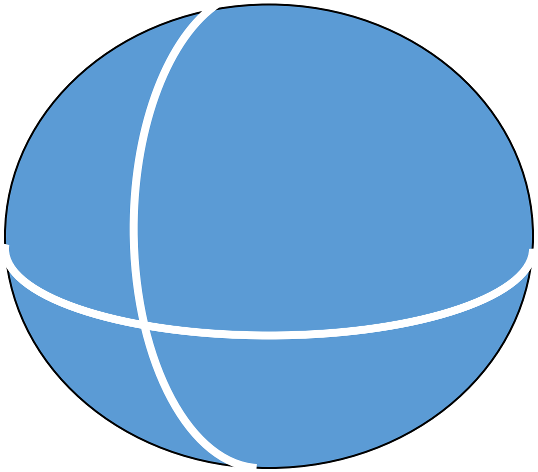
Определение сферы

- **Сферой** называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии (R) от данной точки (центра т.O).



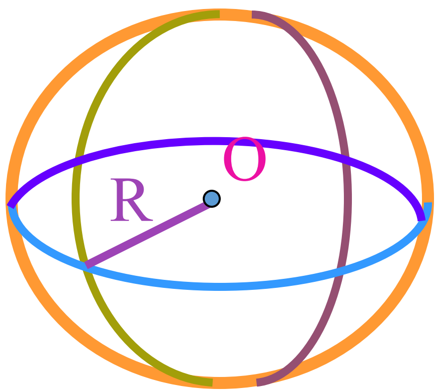
- Сфера – тело полученное в результате вращения полуокружности вокруг её диаметра.
- **R – радиус сферы – отрезок, соединяющий любую точку сферы с центром.**
- т. **O – центр сферы**
- **D – диаметр сферы – отрезок, соединяющий любые 2 точки сферы и проходящий через центр.**
- **D = 2R**

Шар



- Тело, ограниченное сферой, называется шаром.
- Центр, радиус и диаметр сферы являются также центром, радиусом и диаметром шара.
- Шар радиуса R и центром O содержит все точки пространства, которые расположены от т. O на расстоянии, не превышающем R.

Как изобразить сферу?

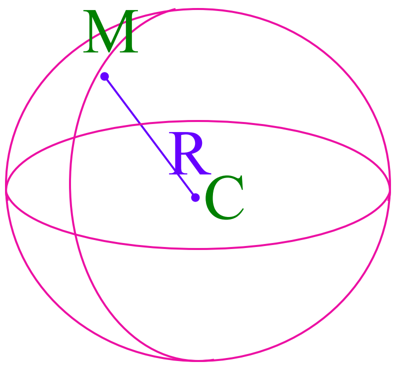


- 1. Отметить центр сферы (т.О)
- 2. Начертить окружность с центром в т.О
- 3. Изобразить видимую вертикальную дугу (меридиан)
- 4. Изобразить невидимую вертикальную дугу
- 5. Изобразить видимую горизонтальную дугу (параллель)
- 6. Изобразить невидимую горизонтальную дугу
- 7. Провести радиус сферы R

Уравнение сферы

уравнение окружности имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$



M(x;y;z), C(x_0;y_0;z_0)

- MC = R , или $MC^2 = R^2$

следовательно уравнение сферы имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

Задача

Зная координаты центра C(2;-3;0), и радиус сферы R=5, записать уравнение сферы.

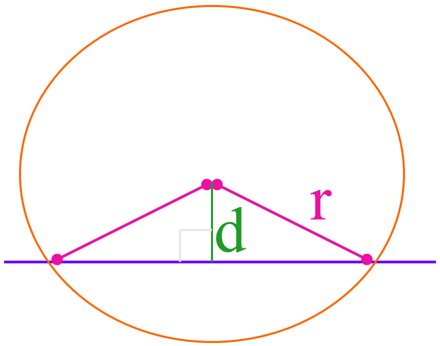
- Решение

так, как уравнение сферы с радиусом R и центром в точке $C(x_0;y_0;z_0)$ имеет вид $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2=R^2$, а координаты центра данной сферы C(2;-3;0) и радиус R=5, то уравнение данной сферы $(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2=25$

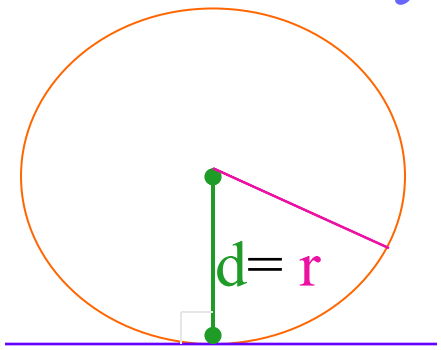
Ответ: $(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2=25$

Взаимное расположение окружности и прямой

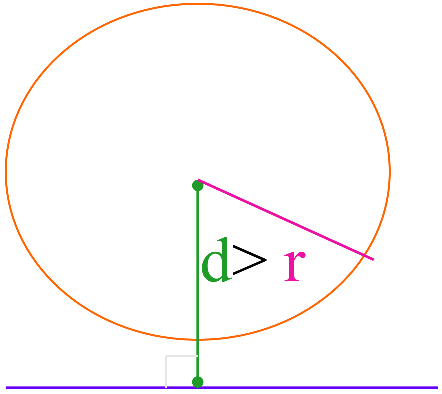
Возможны 3 случая



Если $d < r$, то прямая и окружность имеют 2 общие точки.

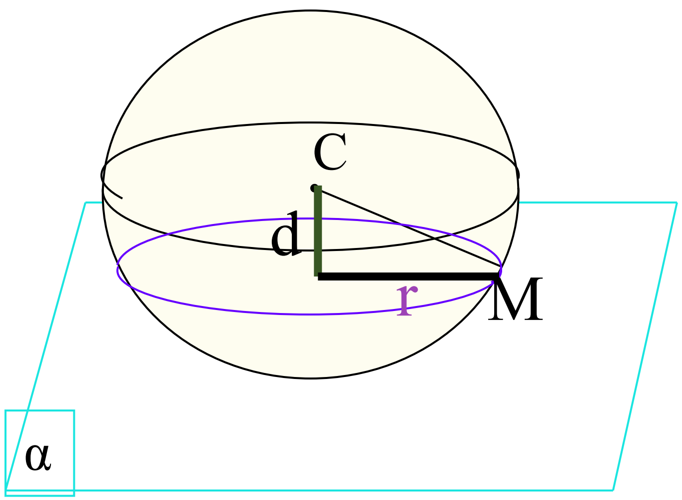


Если $d = r$, то прямая и окружность имеют 1 общую точку.



Если $d > r$, то прямая и окружность не имеют общих точек.

Взаимное расположение сферы и плоскости



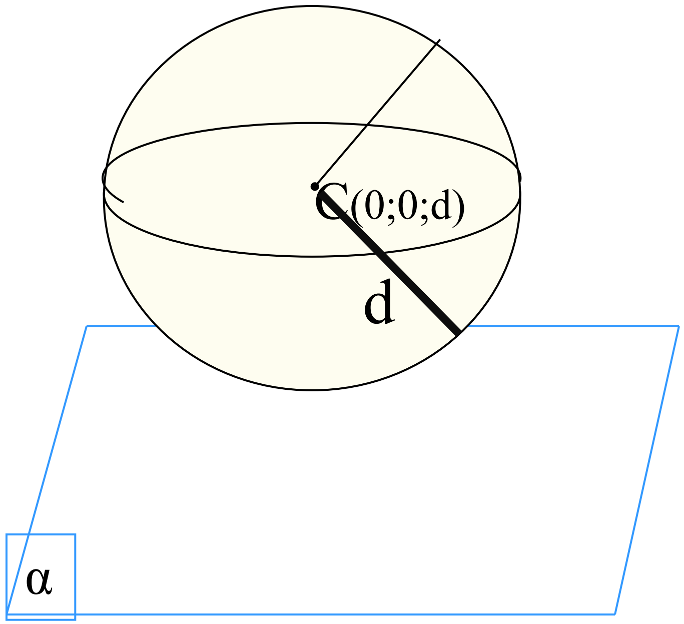
- Рассмотрим 1 случай
- $d < R$, т.е. если расстояние от центра сферы до плоскости меньше радиуса сферы, то сечение сферы плоскостью есть окружность радиусом r.

$$r = \sqrt{R^2 - d^2}$$

- Сечение шара плоскостью есть круг.

- С приближением секущей плоскости к центру шара радиус круга увеличивается. Плоскость, проходящая через диаметр шара, называется **диаметральной**. Круг, полученный в результате сечения, называется **большим кругом.**

Взаимное расположение сферы и плоскости

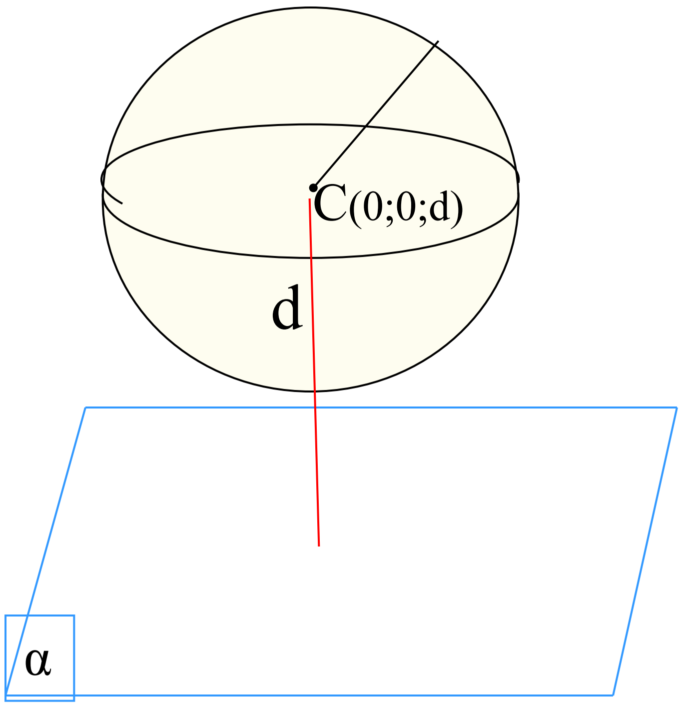


Рассмотрим 2 случай

- d = R, т.е. если расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы, то сфера и плоскость имеют одну общую точку

Взаимное расположение сферы и плоскости

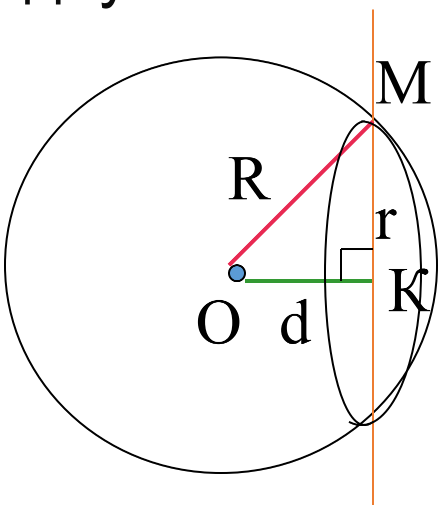
- Рассмотрим 3 случай



- $d > R$, т.е. если расстояние от центра сферы до плоскости больше радиуса сферы, то сфера и плоскость не имеют общих точек.

Задача.

Шар радиусом 41 дм пересечен плоскостью, находящейся на расстоянии 9 дм от центра. Найти радиус сечения.



Дано:

Шар с центром в т.О

R=41 дм

α - секущая плоскость

d = 9 дм

Найти: $r_{сеч} = ?$

Решение:

Рассмотрим ΔОМК – прямоугольный

ОМ = 41 дм; ОК = 9 дм; МК = r, $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

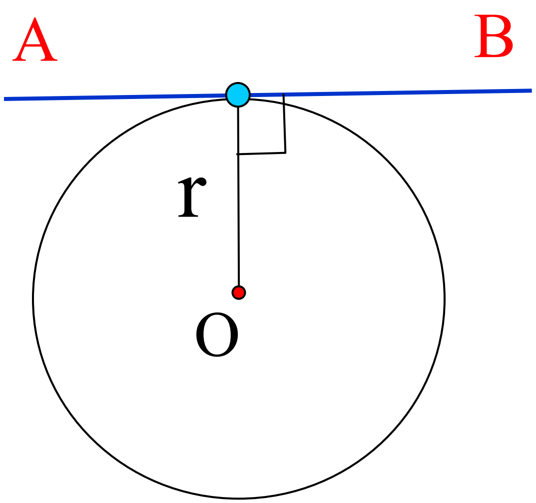
по теореме Пифагора: $MK^2 = r^2 = 41^2 - 9^2 = 1681 - 81 = 1600$

отсюда $r_{сеч} = 40$ дм

Ответ: $r_{сеч} = 40$ дм

Планиметрия

Свойство касательной.

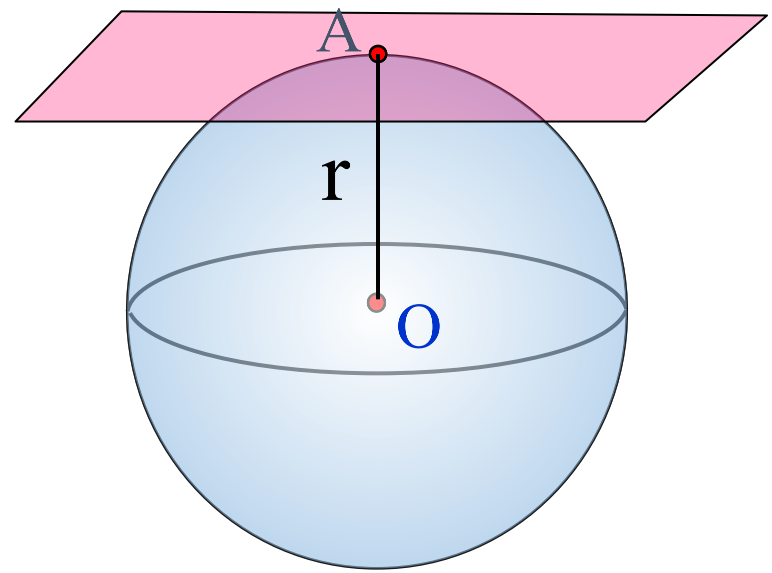


$$AB \text{ - касательная} \Rightarrow$$

$$AB \perp r$$

Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.

Стереометрия



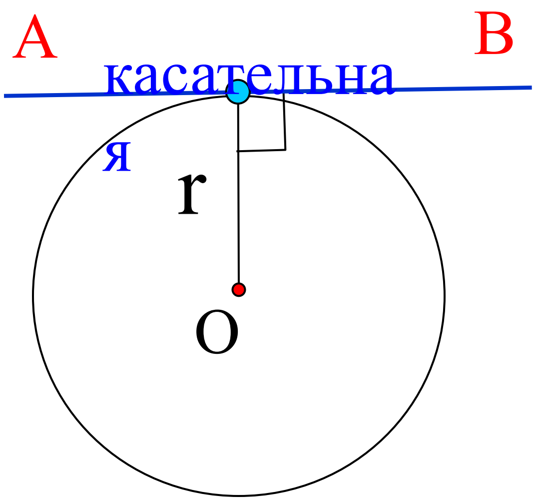
$$\alpha - \text{касательная пл.} \Rightarrow$$

$$r \perp \alpha$$

Радиус сферы, проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.

Планиметрия

Признак касательной.

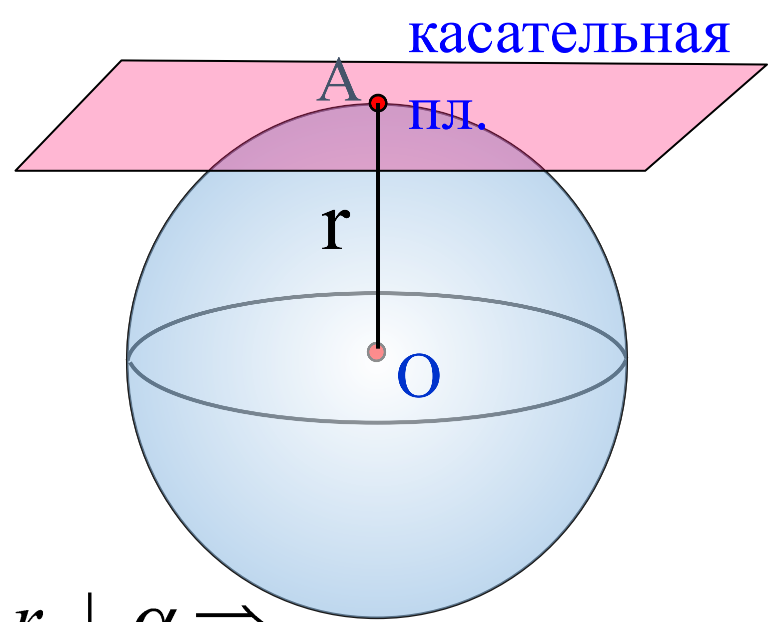


$$AB \perp r \Rightarrow$$

AB - касательная

Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной.

Стереометрия

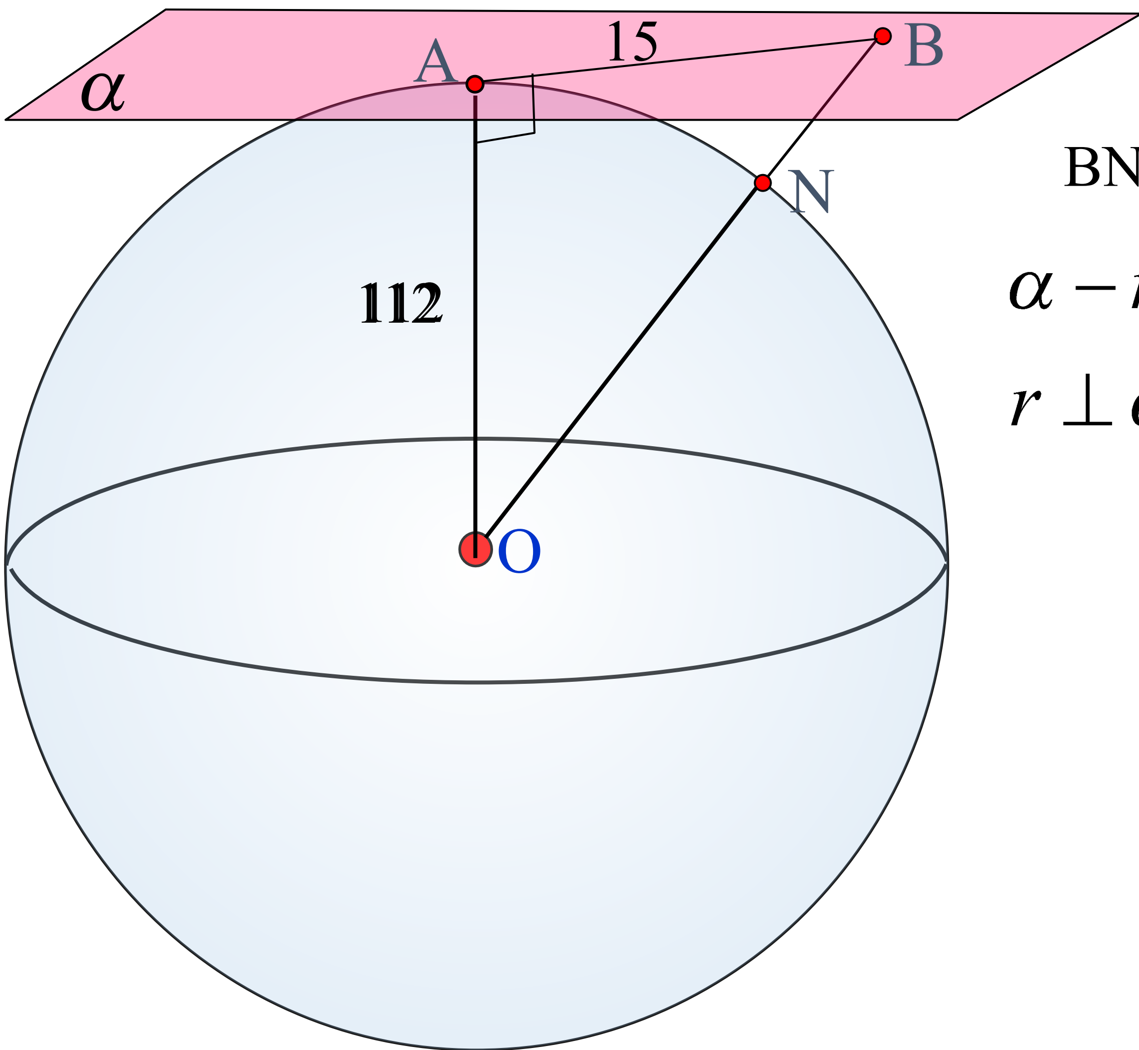


$$r \perp \alpha \Rightarrow$$

$$\alpha - \textit{касательная пл.}$$

Если радиус сферы перпендикулярен к плоскости, проходящей через его конец, лежащий на сфере, то эта плоскость является касательно к сфере.

№ 592 **Радиус сферы равен 112 см. Точка, лежащая на плоскости, касательной к сфере, удалена от точки касания на 15 см. Найдите расстояние от этой точки до ближайшей к ней точки сферы.**

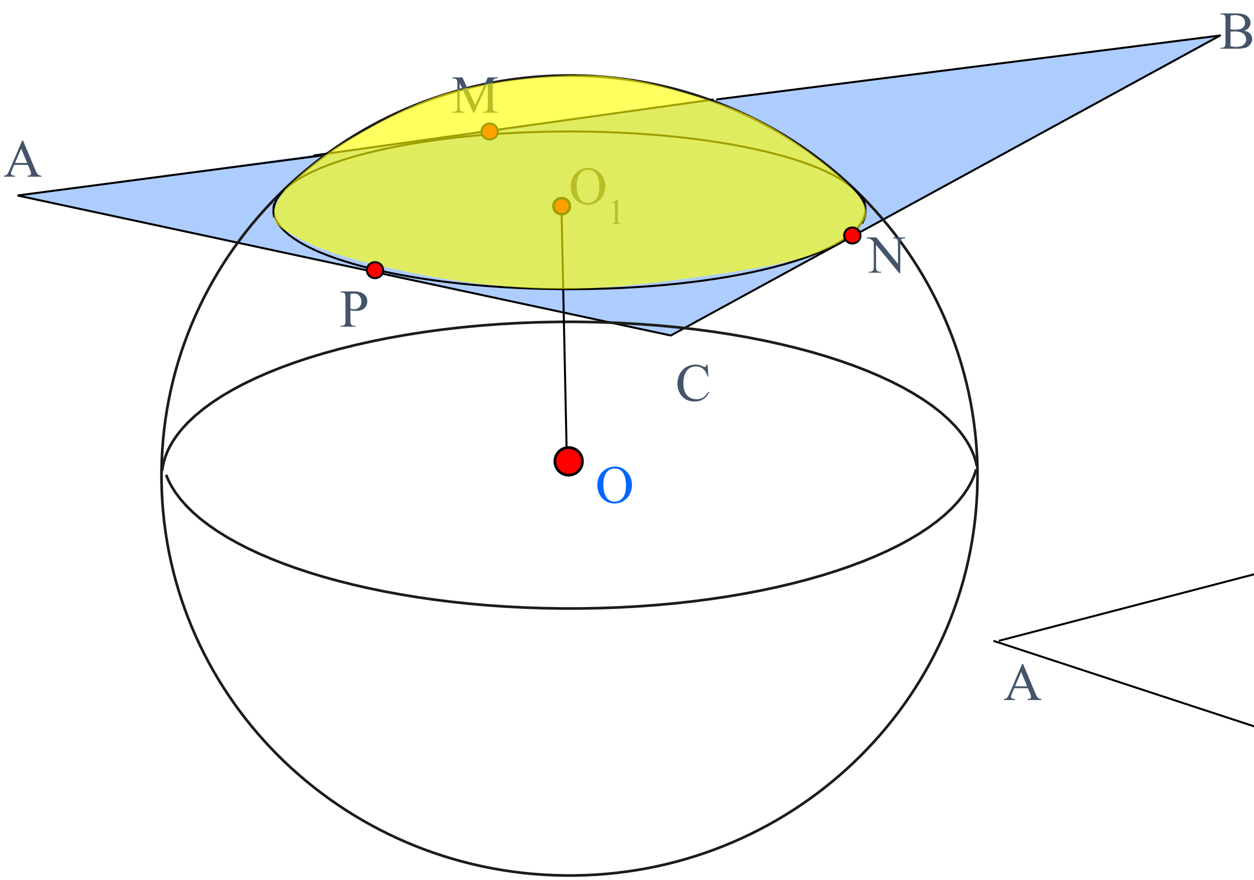


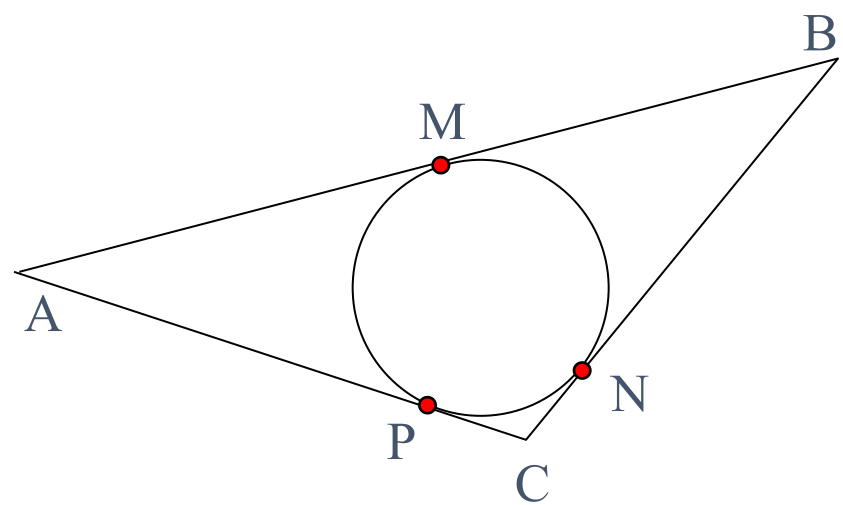
BN – искомое расстояние

$\alpha - касательная\ пл. \Rightarrow$

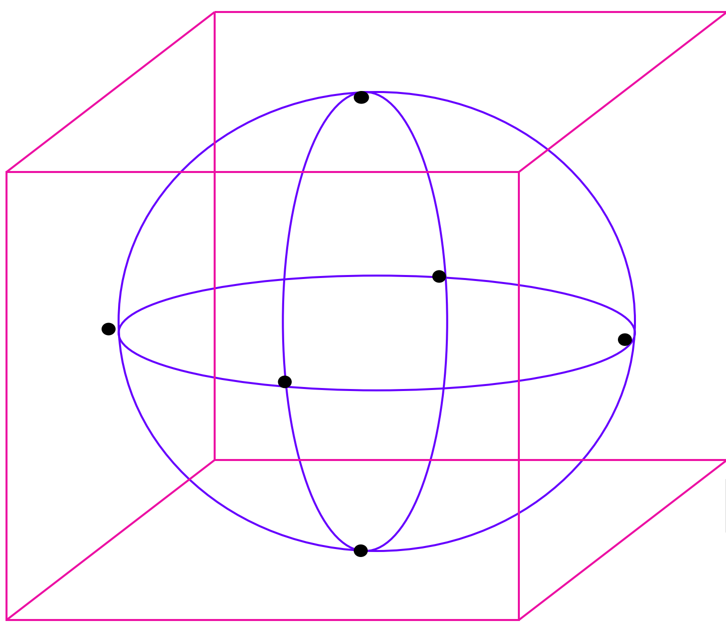
$r \perp \alpha \ \Rightarrow r \perp AB$

№ 584 **Все стороны треугольника ABC касаются сферы радиуса 5 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если AB=13см, BC=14см, CA=15см.**





Площадь сферы



- Сферу нельзя развернуть на плоскость.
  - Опишем около сферы многогранник, так чтобы сфера касалась всех его граней.
  - За площадь сферы принимается предел последовательности площадей поверхностей описанных около сферы многогранников при стремлении к нулю наибольшего размера каждой грани

Площадь сферы радиуса R: $S_{сф}=4\pi R^2$

т.е.: Площадь поверхности шара равна учетверенной площади большего круга

$$S_{шара}=4\,S_{круга}$$

Задача
Найти площадь поверхности сферы, радиус которой = 8 см.

Дано:

сфера

$R = 8$ см

Найти:

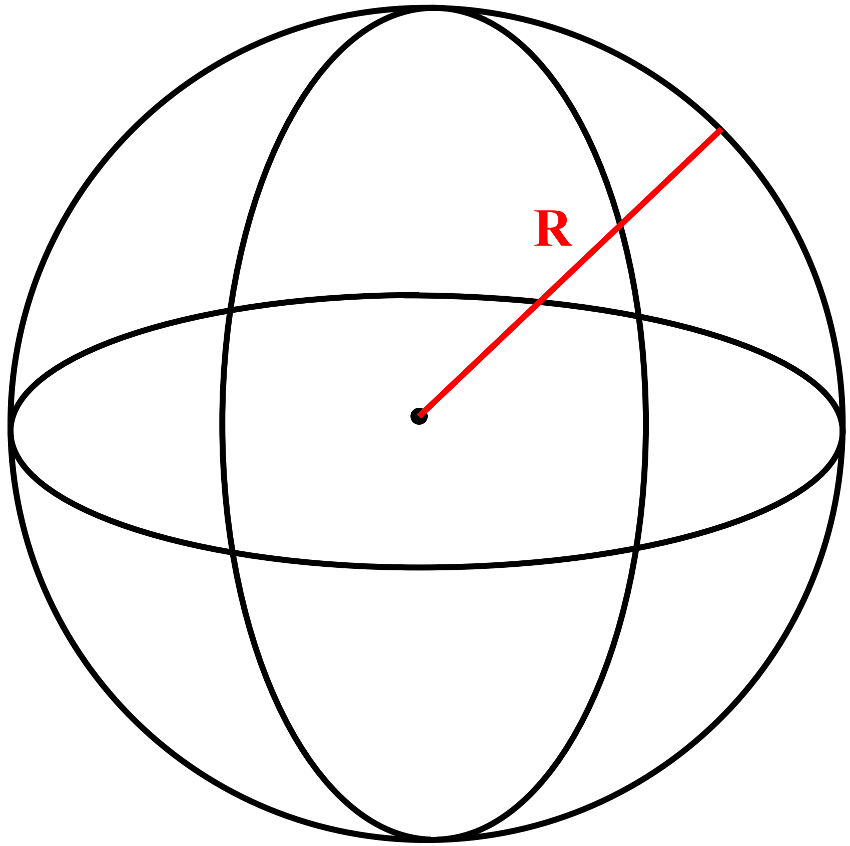
$S_{сф} = ?$

Решение:

1. $S_{сф} = 4\pi R^2$
2. $S_{сф} = 4\pi\ 8^2 = 256\pi$ см^2

Ответ: $S_{сф} = 256\pi$ см^2

Объем шара

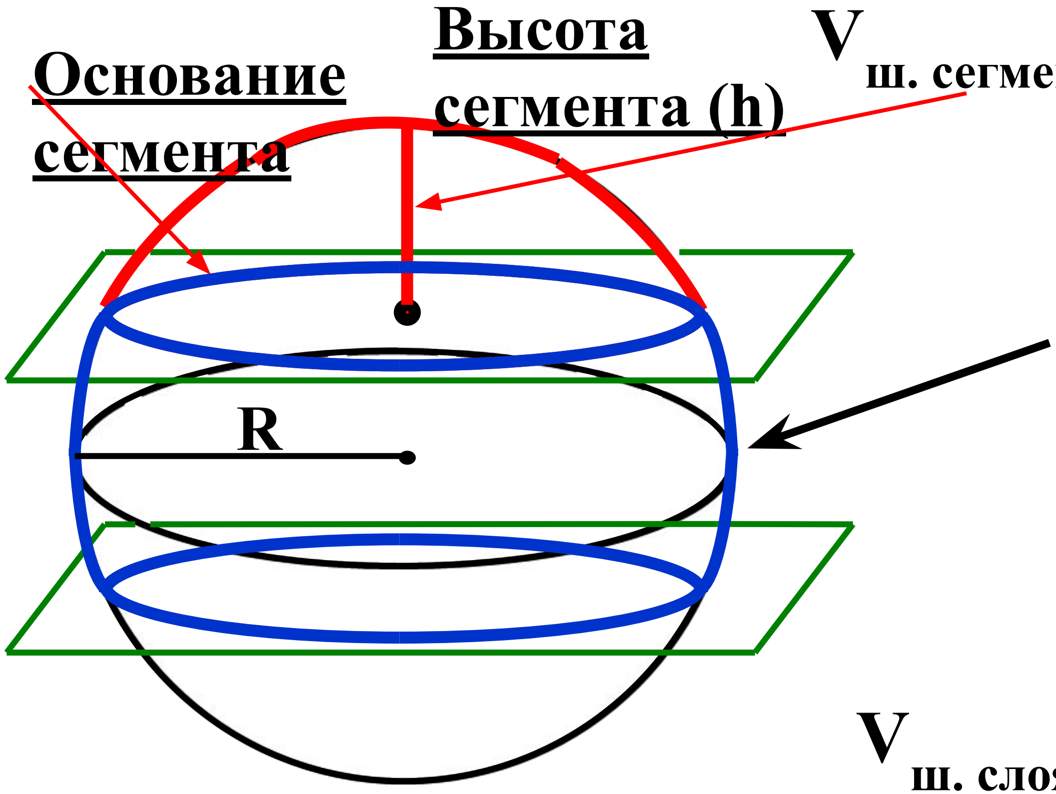


$$V_{шара} = {}^{4}/_{3}ПR^{2}$$

Объём шарового сегмента и шарового слоя

Шаровой сегмент – это часть шара, отсекаемая от него какой-нибудь плоскостью.

Шаровой слой – это часть шара, заключённая между двумя параллельными секущими плоскостями.



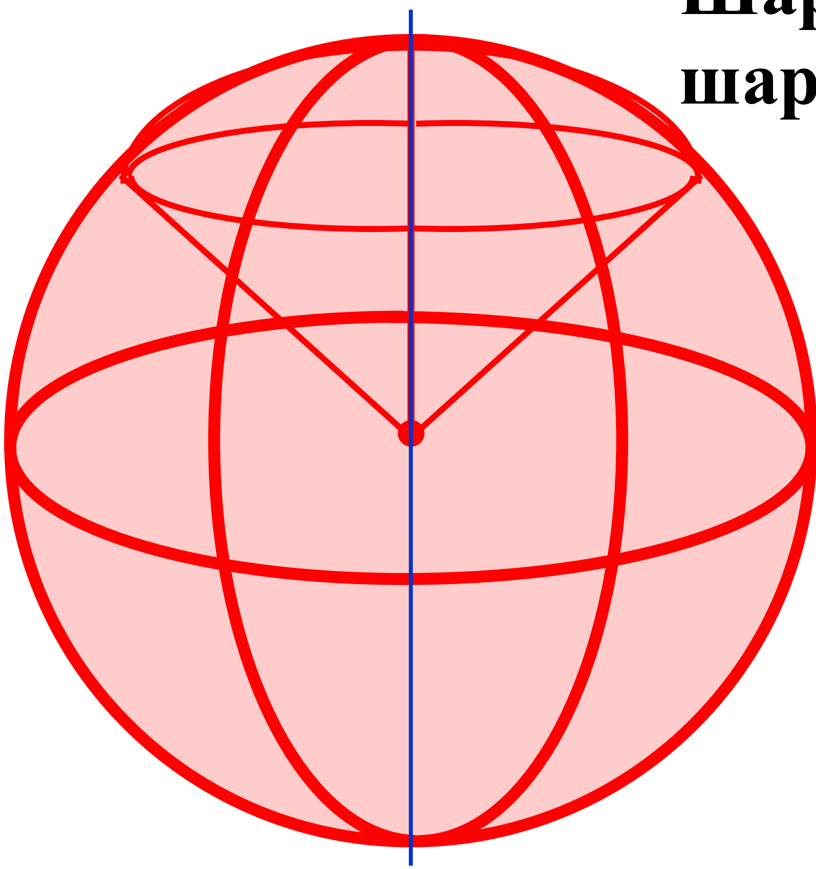
$$V_{ш.\ сегмента} = \Pi h^2 (R - {}^1/_3 h)$$

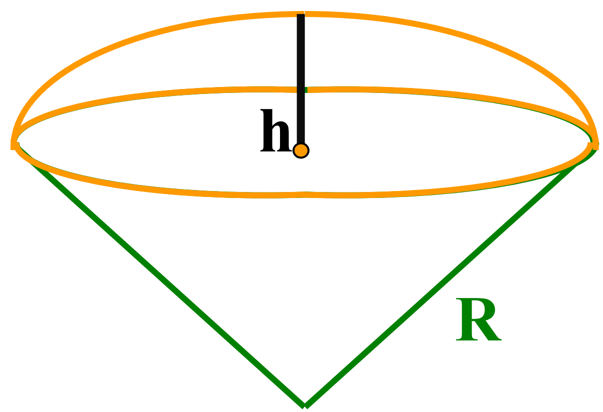
$$V_{ш.\ слоя} = V_{ш.сег.1} - V_{ш.сег.2}$$

Объём шарового сектора

Шаровой сектор – это тело, полученное вращением кругового сектора, с углом, меньшим 90°, вокруг прямой, содержащей один из ограничивающих круговой сектор радиусов.

Шаровой сектор состоит из шарового сегмента и конуса





$$V_{ш.\ сектора} = {}^{2}/_{3}ПR^{2}h$$