

**Тема 5**

**Статистична теорія оптимального  
виявлення і вимірювання параметрів  
цілей**

**Заняття №1 Статистична теорія оптимального виявлення і  
вимірювання параметрів цілей**

# Питання заняття

1. Постановка задачі оптимального виявлення і вимірювання параметрів прийнятого сигналу.
2. Методика рішення задачі оптимального виявлення.
3. Структурні схеми пристроїв оптимального виявлення.
4. Методика вирішення завдання оптимального вимірювання параметрів цілей.
5. Структурні схеми пристроїв оптимального вимірювання параметрів цілей.

# Постановка задачі оптимального виявлення і вимірювання параметрів прийнятого сигналу

*Задача радіолокаційного виявлення* складається в прийнятті рішення про наявність або відсутність відбитого від цілі сигналу в кожному роздільному об'ємі простору з мінімально-допустимими ймовірностями помилкових рішень.

*Задача радіолокаційного вимірювання* складається у визначенні з мінімально-можливою помилкою положення цілі в межах роздільного об'єму.

*Основні задачі статистичної теорії виявлення і вимірювання параметрів радіолокаційних сигналів:*

- 1. Вибір і обґрунтування критеріїв оптимальності радіолокаційного виявлення і вимірювання;**
- 2. Знаходження правила (алгоритму) оптимального виявлення і вимірювання параметрів сигналу за вибраним критерієм;**
- 3. Синтез структурних схем оптимальних виявлювачів та вимірювачів;**
- 4. Дослідження характеристик оптимальних виявлювачів та вимірювачів;**
- 5. Порівняння оптимальних виявлювачів і вимірювачів з реальними.**

# Методика рішення задачі оптимального виявлення

*Кількісні показники якості радіолокаційного виявлення.*

Задача виявлення розв'язується при двох взаємовиключних умовах:

$$A_1 - \text{"ціль є"};$$
$$A_0 - \text{"цілі немає"}.$$

Ці умови звичайно не відомі або задані деякими отриманими ймовірностями  $P(A_1)$  і  $P(A_0)$ , для яких виконується співвідношення:

$$P(A_1) + P(A_0) = 1.$$

За рахунок перешкод і флуктуацій корисного сигналу кожній умові можуть відповідати два види рішень:

$$A_1^* - \text{рішення "ціль є"},$$
$$A_0^* - \text{рішення "цілі нема"}.$$

**Результати рішень сумісно з умовами, за якими вони прийняті, складають наступні чотири події:**

$A_1^* A_1$  - правильне виявлення,

$A_0^* A_1$  - пропуск цілі,

$A_1^* A_0$  - хибна тривога,

$A_0^* A_0$  - правильне не виявлення.

**Переліченим подіям відповідає чотири ймовірності цих подій, сума яких дорівнює 1:**

$$P(A_1^* A_1) + P(A_0^* A_1) + P(A_1^* A_0) + P(A_0^* A_0) = 1$$

**Оскільки умови ( $A_1$  і  $A_0$ ) та рішення ( $A_1^*$  і  $A_0^*$ ) залежні, то кожна з цих ймовірностей може бути визначена через апріорну і умовну ймовірності у відповідності з формулою повної ймовірності:**

$$P(A_1^* A_1) = P(A_1) P(A_1^* / A_1)$$

$D=P(A_1^*/A_1)$  – умовна ймовірність правильного виявлення;

$D^*=P(A_0^*/A_1)$  – умовна ймовірність пропуску цілі;

$F=P(A_1^*/A_0)$  – умовна ймовірність хибної тривоги;

$F^*=P(A_0^*/A_0)$  – умовна ймовірність правильного не

виявлення.

Ймовірності, що відповідають одній умові, зв'язані співвідношенням:

$$D+D^*=1 \quad F+F^*=1$$

Показниками якості виявлення можуть служити будь-яка з чотирьох пар умовних ймовірностей:

1)  $D, F$ ;

2)  $D^*, F$ ;

3)  $D, F^*$ ;

4)  $D^*, F^*$ .

На практиці майже завжди використовують першу пару показників.

## *Критерії оптимальності РЛ визначення*

*Критерій оптимальності* – правило, за яким з усіх можливих виявлювачів можна вибрати найкращий.

Найзагальнішим критерієм оптимальності радіолокаційного виявлення є *критерій мінімуму середнього ризику* або інакше кажучи *критерій Байєса*.

З точки зору критерію Байєса, оптимальним вважається такий виявлювач, який має мінімальну ймовірність помилкових рішень з урахуванням їх “ваги” чи ступеня небажаності.



Сутність задачі оптимізації за байєсовським критерієм складається в наступному:

- кожному помилковому рішенню (в задачі виявлення це пропуск цілі або хибна тривога) ставиться у відповідність деяка ціна помилки  $-r_{D^*}$  та  $r_F$ ;
- визначається середня ціна помилкових рішень, яку називають середнім ризиком:  $r=r_F P(A_1^*|A_0)+r_{D^*} P(A_0^*|A_1)$ ;
- проводиться визначення правила обробки прийнятого сигналу, за яким мінімізується середній ризик.

$$\begin{aligned} r &= r_F P(A_0) P(A_1^*|A_0) + r_{D^*} P(A_1) P(A_0^*|A_1) = \\ &= r_F P(A_0) F + r_{D^*} P(A_1) (1-D) = r_{D^*} P(A_1) [1 - (D - l_0 F)] \end{aligned}$$

де  $l_0 = r_F P(A_0) / r_{D^*} P(A_1)$  – ваговий множник.

Наслідком мінімуму середнього ризику  $r$  - є максимум різниці  $D - l_0 F = \max$ , який називається "зваженою" різницею.

## *Правило оптимального виявлення*

**Прийнятий РЛ сигнал:  $Y(t)=Ax(t)+n(t)$ ;**

**Де  $x(t)$  - відбитий сигнал цілі;**

**$n(t)$  - внутрішні шуми;**

**$A$  дорівнює "1" – "коли ціль є" (умова  $A_1$ ) та "0" – "коли цілі нема" (умова  $A_0$ )**

**Кожна реалізація випадкової функції  $y(t)$  повністю характеризується щільністю розподілення ймовірностей котрі позначимо:**

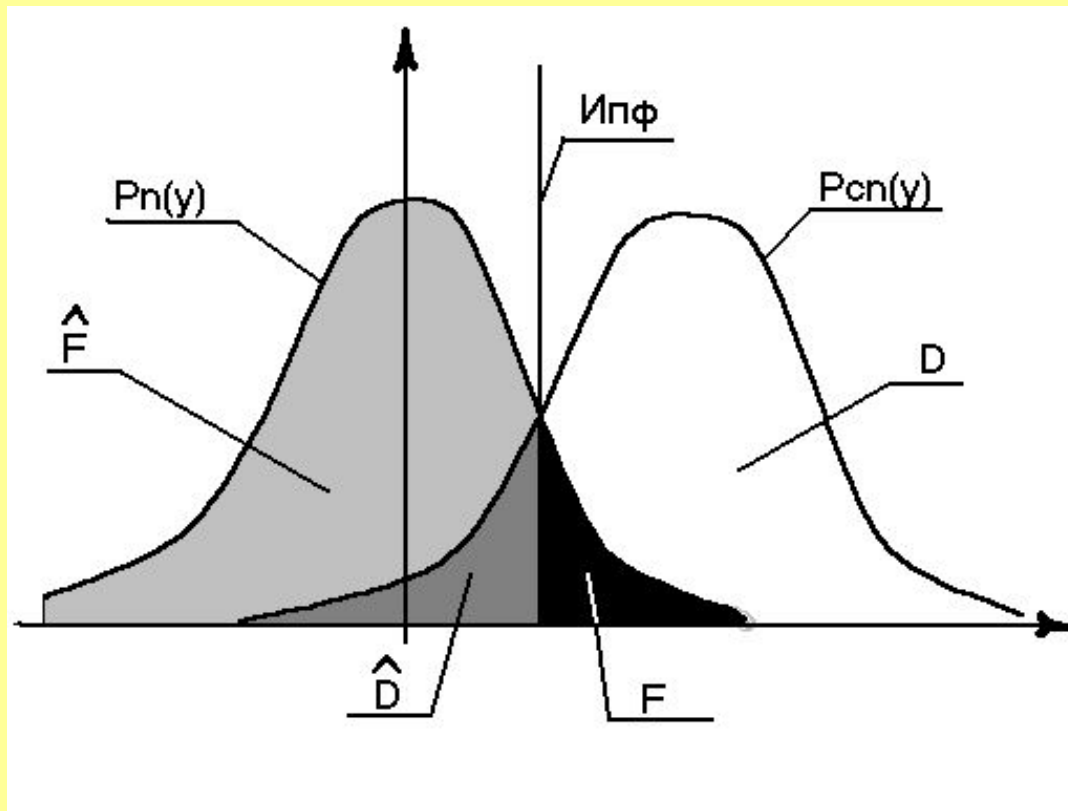
**$P_{cn}(Y)=P[y(t)/A_1]$  - при наявності суміші "сигнал-перешкода".**

**$P_n(Y)=P[y(t)/A_0]$  - при наявності тільки перешкод.**

**При цьому показники якості визначаються наступним чином:**

$$D = \int_{[Y_1]} P_{cn}(Y) dY$$

$$F = \int_{[Y_0]} P_n(Y) dY$$



**Рис. 1. Приклад визначення показників  $D$  і  $F$  при деяких заданих функціях  $P_{cn}(Y)$  і  $P_n(Y)$  одномірної величини  $y$**

$$D - l_0 F = \int_{[Y_{1opt}]} [P_{cn}(Y) - l_0 P_n(Y)] dY = \int_{[Y_{1opt}]} P_n(Y) \left[ \frac{P_{cn}(Y)}{P_n(Y)} - l_0 \right] dY$$

$P_{cn}(Y)/P_n(Y)=l(Y) \geq l_0$  - відношенням правдоподібності.

Звідси слідує *правило оптимального виявлення*: оптимальний за критерієм мінімуму середнього ризику приймач виявлення повинен по прийнятій реалізації вхідного сигналу  $Y$  обчислювати відношення правдоподібності і порівнювати його з порогом  $l_0$ .

За результатами порівняння приймаються рішення:

“Ціль є” ( $A_1^*$ ), якщо  $l(Y) \geq l_0$ ;

“Цілі нема” ( $A_0^*$ ), якщо  $l(Y) < l_0$

**Відношення правдоподібності показує, у скільки разів умовна ймовірність прийому реалізації  $Y$  при наявності корисного сигналу відрізняється від умовної ймовірності прийому тієї ж реалізації при відсутності сигналу. Чим більша амплітуда сигналу, тим більша величина  $l(Y)$ .**

**Для обчислення величини порога  $l_0$  за загальним байєсовським критерієм треба знати значення ціни  $r_F$  і  $r_{D^*}$  помилкових рішень і апріорних ймовірностей  $P(A_0)$  і  $P(A_1)$ . І те і інше в задачі радіолокаційного виявлення невідомо, тому замість загального критерію використовують його різновид (окремі критерії).**

Найбільше використання в радіолокації знаходить критерій Неймана-Пірсона. Сутність критерію складається в тім, що фіксується умовна ймовірність хибної тривоги  $F$  і максимізується умовна ймовірність правильного виявлення  $D$ , тобто  $F=const$ ;  $D=max$ .

*Основна перевага критерію* Неймана-Пірсона полягає в тім, що поріг прийняття рішення  $l_0$  визначається функцією  $F$  і не потребує знання ціни  $r_F$  і  $r_{D^*}$ , а також апріорних ймовірностей  $P(A_0)$  і  $P(A_1)$ , тобто  $l_0=f(F)$ .

Отримане правило оптимального виявлення дозволяє сформулювати *методику синтезу оптимальних виявлювачів*:

1. Вивчення статистики прийнятого сигналу і отримання виразів для  $P_n(Y)$  і  $P_{cn}(Y)$ ;
2. Обчислення відношення правдоподібності;
3. Підбір фізично реалізуємих елементів, що дозволяють обчислити  $l(Y)$  і складання структурної схеми виявлювача;
4. Оцінка показників якості виявлення.

# Структурні схеми пристроїв оптимального виявлення

В теорії виявлення корисні сигнали в залежності від наявності випадкових параметрів (початкової фази, амплітуди) поділяють на три моделі:

$x(t, \alpha)$  – сигнали з повністю відомими параметрами;

$x(t, \alpha, \phi)$  – сигнали з випадковою початковою фазою;

$x(t, \alpha, \phi, B)$  – сигнали з випадковими початковою фазою і амплітудою.

**Відношення правдоподібності для сигналу з повністю відомими параметрами, котрий приймається на фоні флуктуаційних перешкод має вид:**

$$l[y(t)/\alpha] = e^{-\frac{\mathcal{E}(\alpha)}{N_0}} e^{-\frac{2Z(\alpha)}{N_0}}$$

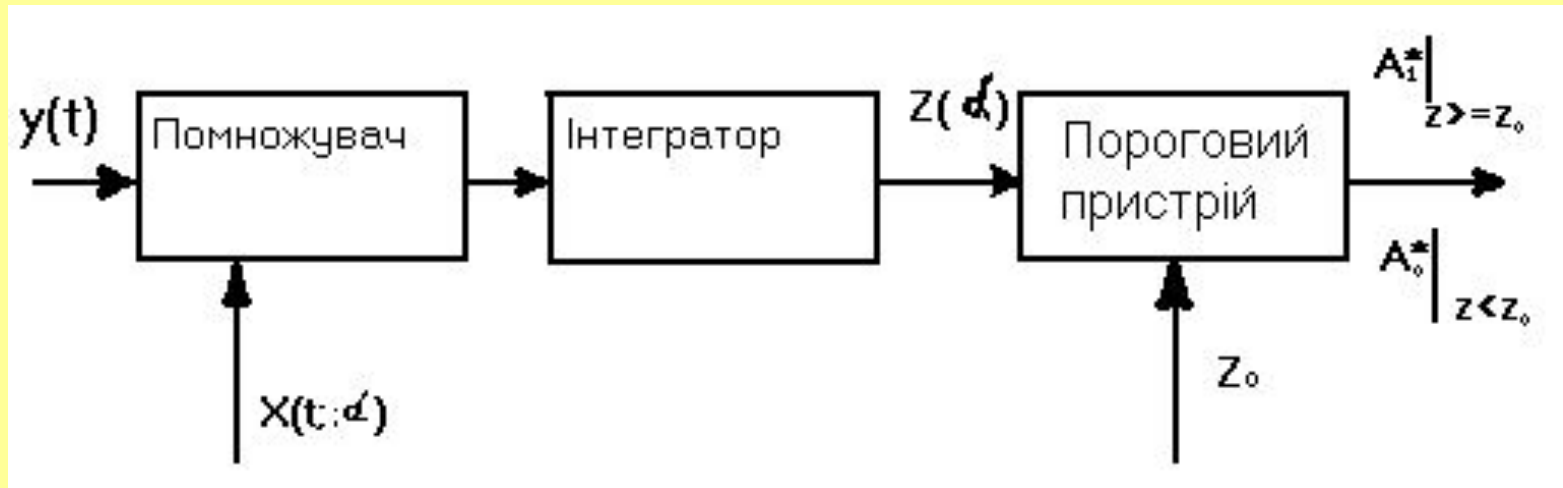
де  $N_0$  - спектральна щільність шуму;

$\mathcal{E}(\alpha)$  - енергія сигналу, що очікується:  $\mathcal{E}(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t, \alpha) dt$

$Z(\alpha)$  - кореляційний інтеграл:  $Z(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)x(t, \alpha) dt$

**Перший множник є постійним коефіцієнтом, другий визначає залежність відношення правдоподібності від прийнятої реалізації.**





**Рис. 2. Структурна схема виявлювача сигналів з повністю відомими параметрами**

**Через те, що вимірюваний параметр, як правило, невідомий, то потрібно обчислити  $Z(\alpha)$  для всіх можливих його значень. Тому задача синтезу кореляційного приймача може розв'язуватися двома способами:**

Перший спосіб складається в паралельному огляді по вимірюваному параметру  $\alpha$  в діапазоні можливих його змінювань. В цьому випадку кореляційний приймач є багатоканальним (рис.3)

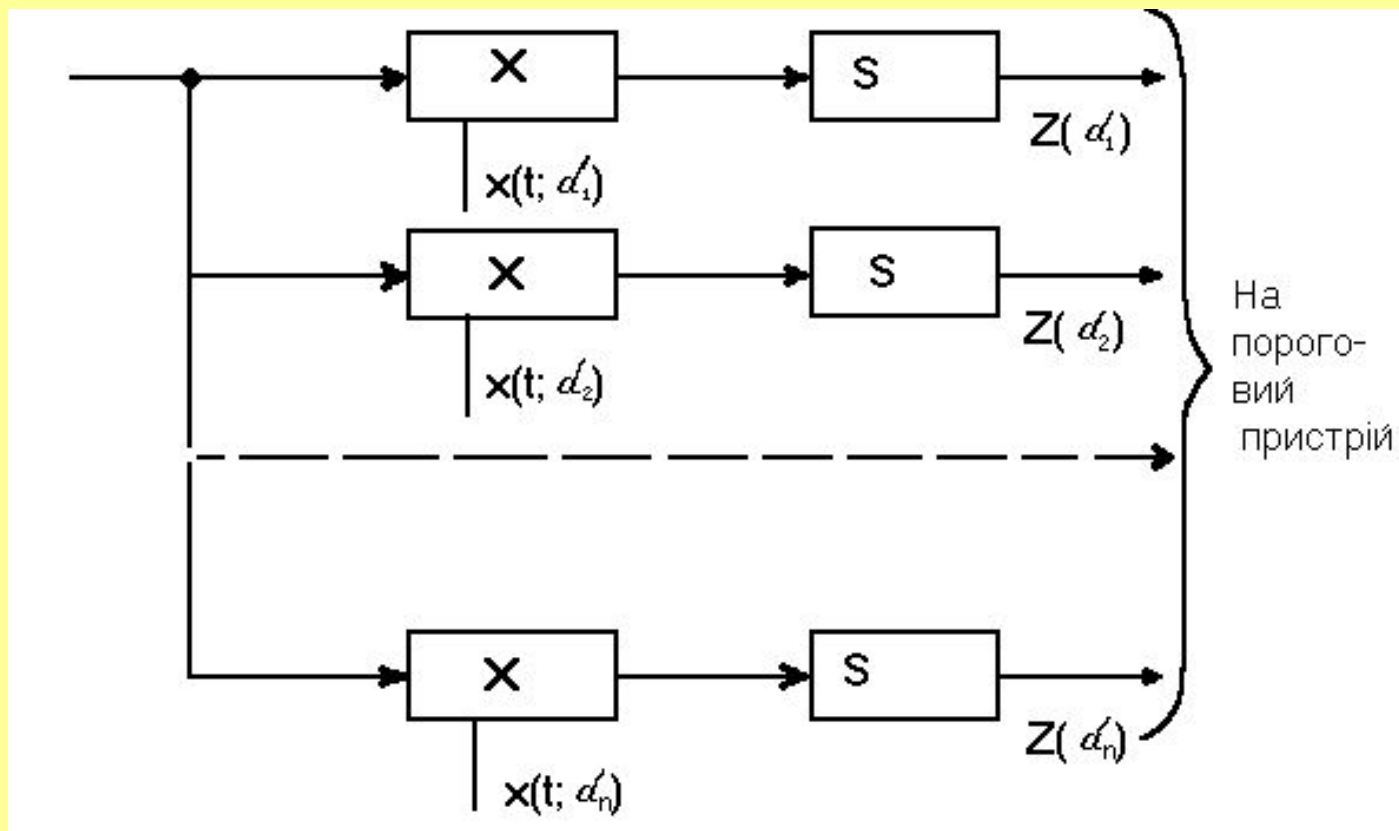


Рис. 3. Структурна схема багатоканального кореляційного приймача

при другому способі огляд усіх можливих значень вимірюваного параметра  $\alpha$  здійснюється послідовно (рис.4)

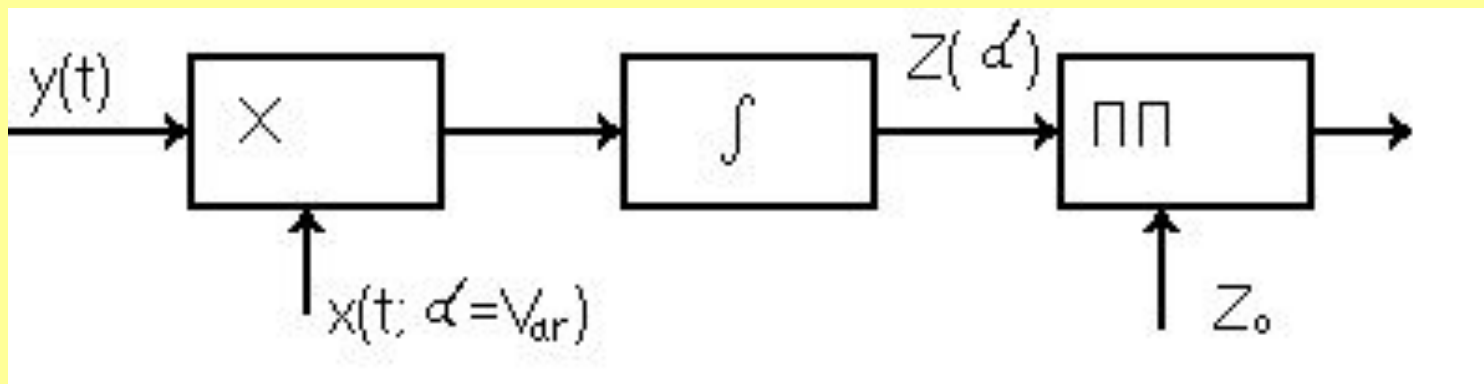


Рис. 4. Структурна схема кореляційного приймача

Достатньою статистикою для сигналів із випадковою фазою, а також випадковими амплітудою і фазою є модуль кореляційного інтеграла, тому оптимальний виявлювач повинен обчислювати два кореляційних інтеграла, в яких опорні сигнали повністю відомі і ортогональні один одному (рис. 5).

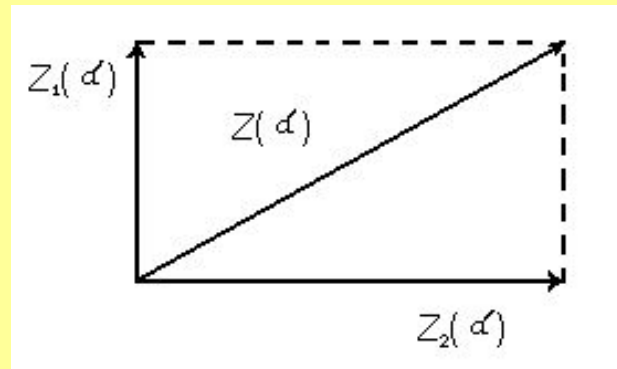
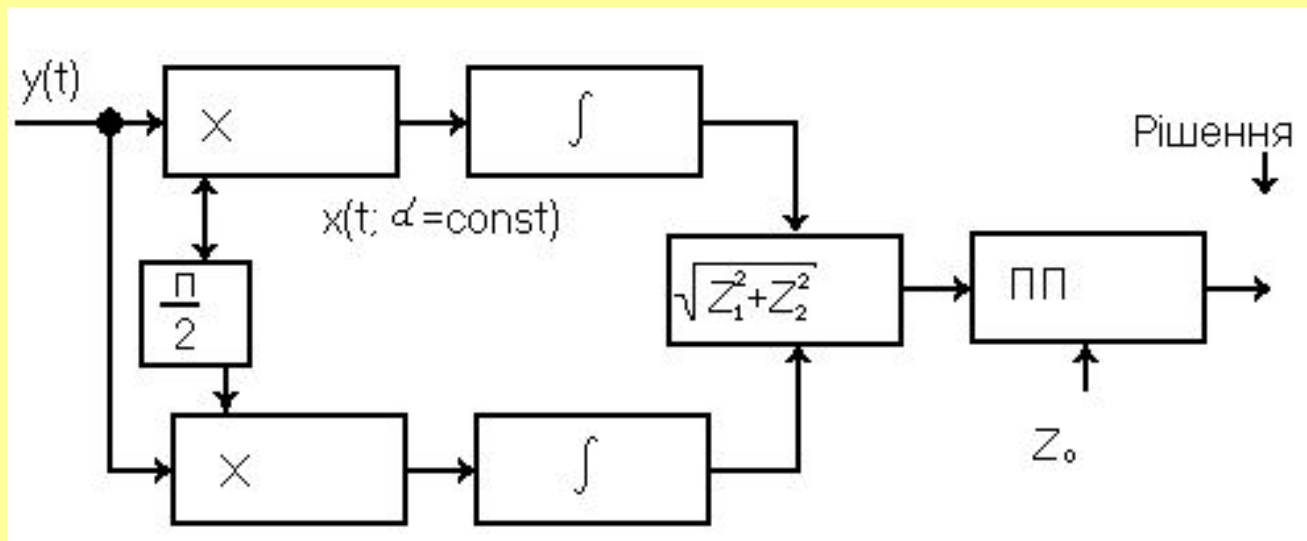


Рис.

Модуль кореляційного інтеграла визначається у відповідності з виразом:

$$Z(\alpha) = \sqrt{Z_1(\alpha)^2 + Z_2(\alpha)^2}$$



**Рис. 6. Структурна схема оптимального виявлювача для сигналів із випадковими параметрами**

Обчислення кореляційного інтеграла можливо за допомогою лінійного фільтра, імпульсна характеристика якого забезпечує обчислення кореляційного інтеграла для очікуваного сигналу (оптимальний фільтр). Амплітудно-частотна характеристика (АЧХ) оптимального фільтра з точністю до постійного множника співпадає з амплітудно-частотним спектром очікуваного сигналу.

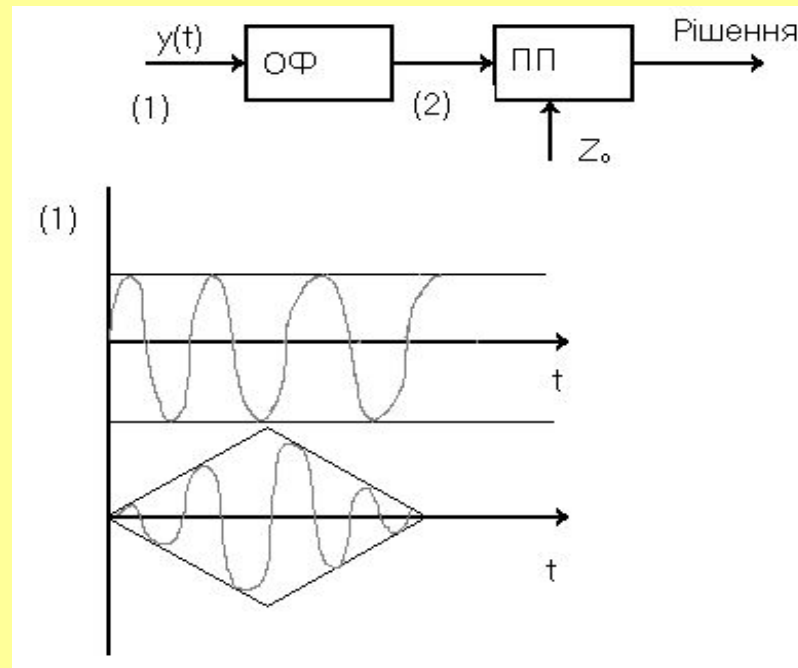


Рис. 7. Структурна схема виявлювача при використанні оптимального фільтра

# Методика вирішення завдання оптимального вимірювання параметрів цілей

## *Кількісні показники якості вимірювання параметрів*

В процесі вимірювання деякого параметра  $\alpha$  видається його оцінка  $\alpha^*$ , яка в загальному випадку відрізняється від істинного значення  $\alpha$ , внаслідок шумів та інших причин.

Якість вимірювання характеризується помилкою, значення якої дорівнює  $\varepsilon = \alpha^* - \alpha$ .

Помилки вимірювання поділяються на грубі, систематичні і випадкові.

Оскільки помилка  $\varepsilon$  є випадковою величиною, то показниками якості вимірювання служать її усереднені значення:

**Математичне очікування помилки** -  $m\{\varepsilon\}=\varepsilon_{сер}$ .

Якщо  $\varepsilon_{сер}=0$ , то оцінка параметра називається незміщеною. При  $\varepsilon_{сер}\neq 0$  - оцінку називають зміщеною, а сама величина  $\varepsilon_{сер}$  являє собою систематичну помилку вимірювання.

**Середньоквадратична помилка (СКП)** -  $\varepsilon_{скп}$  (або  $\sigma_{\alpha}$ )

$$\varepsilon_{скп}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varepsilon - \varepsilon_{сер})^2 \rho(\varepsilon) d\varepsilon$$

де  $\rho(\varepsilon)$  - щільність розподілення  $\varepsilon$ .

**Імовірнісна (серединна) помилка** -  $\varepsilon_{імов}$ , в якості якої приймається помилка, ймовірність появи якої дорівнює 0,5.

$$P(|\varepsilon|\geq\varepsilon_{імов})=P(|\varepsilon|\leq\varepsilon_{імов})=0,5$$

**Максимальна помилка** -  $\varepsilon_{max}$ , рівна величині  $|\varepsilon|$ , ймовірність перевищення якої 0,01.

$$P(|\varepsilon|\geq\varepsilon_{max})=0,01$$

За основний показник якості радіолокаційного вимірювання найчастіше приймають  $\varepsilon_{скп}$



## *Критерій оптимальності вимірювання параметрів*

**В задачі вимірювання будь-який відхил оцінки  $\alpha^*$  від істинного значення параметра  $\alpha$  є помилкою. Отже число помилкових ситуацій при вимірюванні дуже велике і практично помилка вимірювання характеризується неперервною випадковою величиною.**

**Таким чином, в задачі вимірювання використовують неперервні функції ціни (вартості)  $r(\alpha, \alpha^*)$ .**

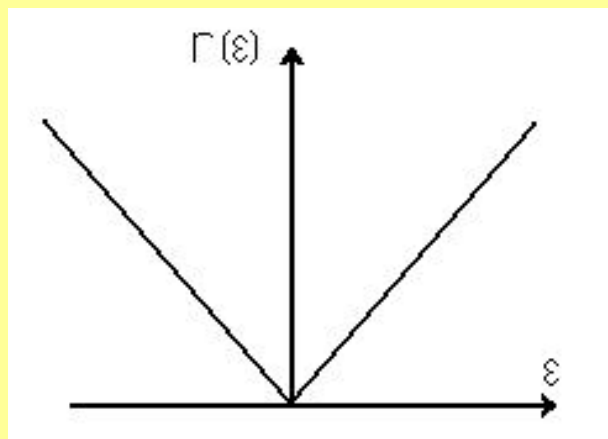
**Найчастіше використовують наступні варіанти функції вартості:**

**а) лінійна функція  $r(\varepsilon) = |\varepsilon| = |\alpha^* - \alpha|$**

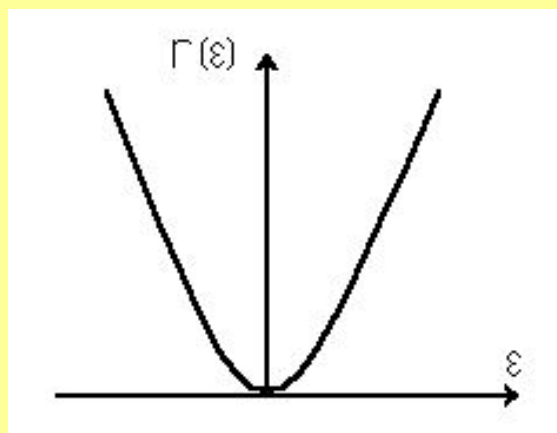
**б) квадратична функція  $r(\varepsilon) = \varepsilon^2 = (\alpha^* - \alpha)^2$**

**в) допустима або проста функція  $r(\varepsilon) = r_0$ , якщо  $|\varepsilon| \geq \varepsilon_0$ ;**

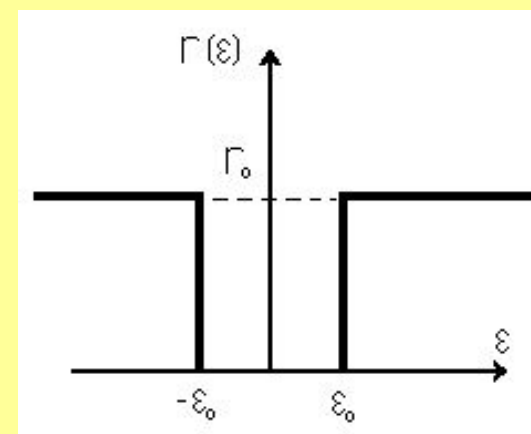
**$r(\varepsilon) = 0$ , якщо  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$**



а)



б)



в)

Рис. 8

Найбільше використання в задачах синтезу отримала квадратична функція вартості, через те що вона підкреслює значущість великих помилок.

При виборі квадратичної функції вартості критерій мінімуму середнього ризику зводиться до критерію мінімуму квадрата СКП вимірювання. Іншими словами до мінімуму дисперсії, що характеризує ступінь відхилення випадкової величини  $\alpha^*$  відносно істинного значення.

## *Правило оптимального вимірювання*

### *Правило оптимальної оцінки:*

**оптимальною за критерієм мінімуму дисперсії помилки вимірювання оцінкою параметру  $\alpha$  є відношення правдоподібності або монотонно зв'язана з ним функція (достатня статистика), коли приймає максимальне значення.**

### *Правило оптимального виміру:*

**оптимальний вимірювач повинен обчислювати відношення правдоподібності або достатню статистику прийнятого сигналу  $y(t)$  для усіх можливих значень вимірюваного параметра  $\alpha$  і фіксувати в якості оцінки те його значення, при якому вони максимальні.**

# Структурні схеми пристроїв оптимального вимірювання параметрів цілей

*I варіант.* Використовується паралельний огляд по параметру  $\alpha$ , структурна схема є багатоканальною.

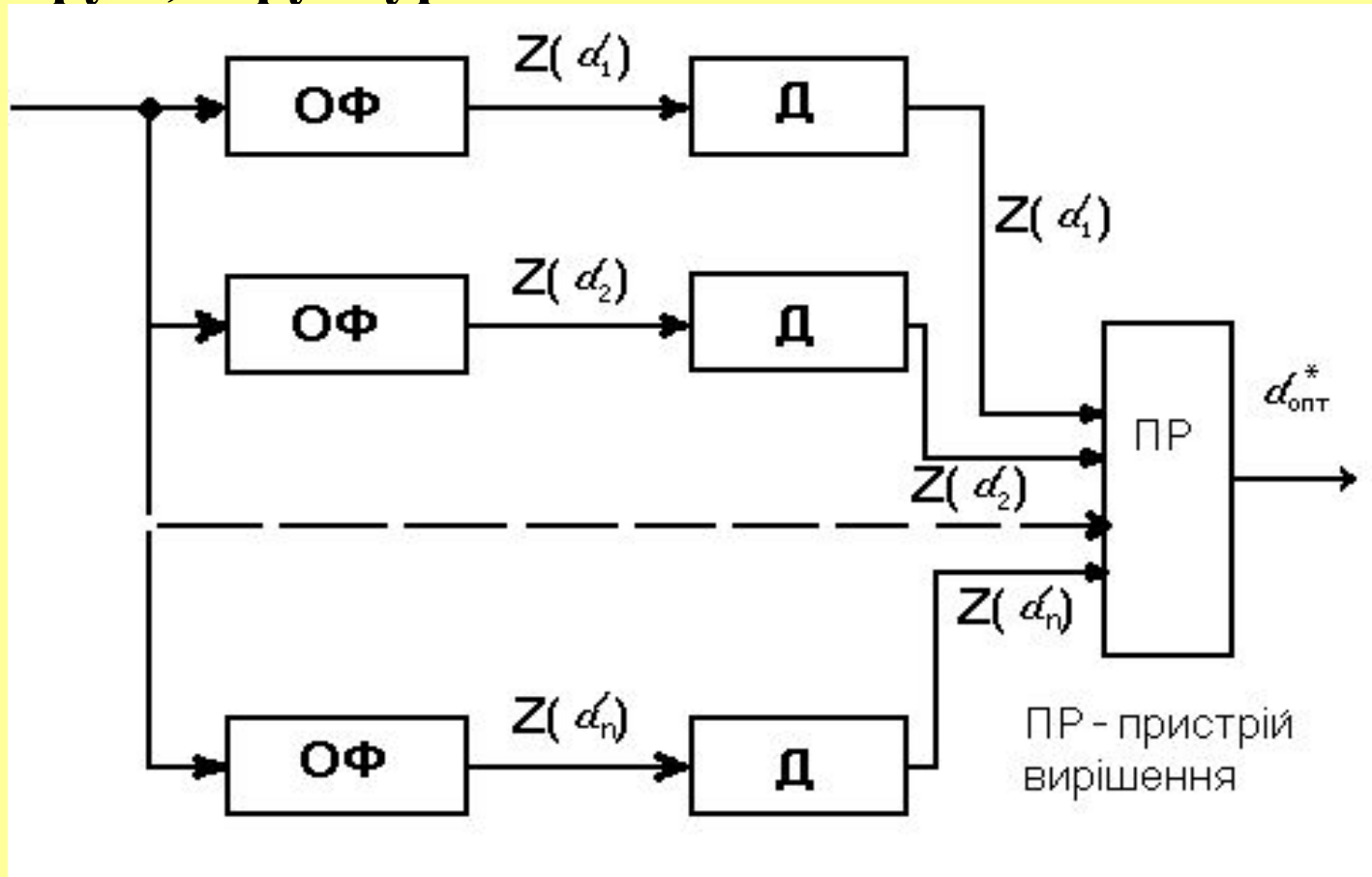
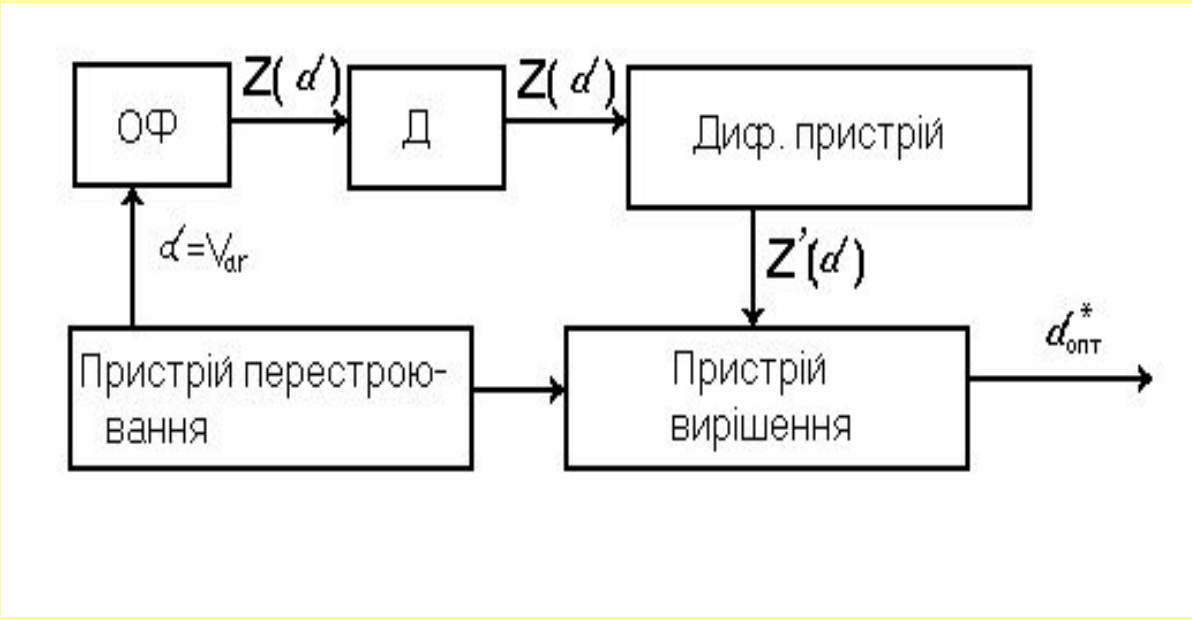
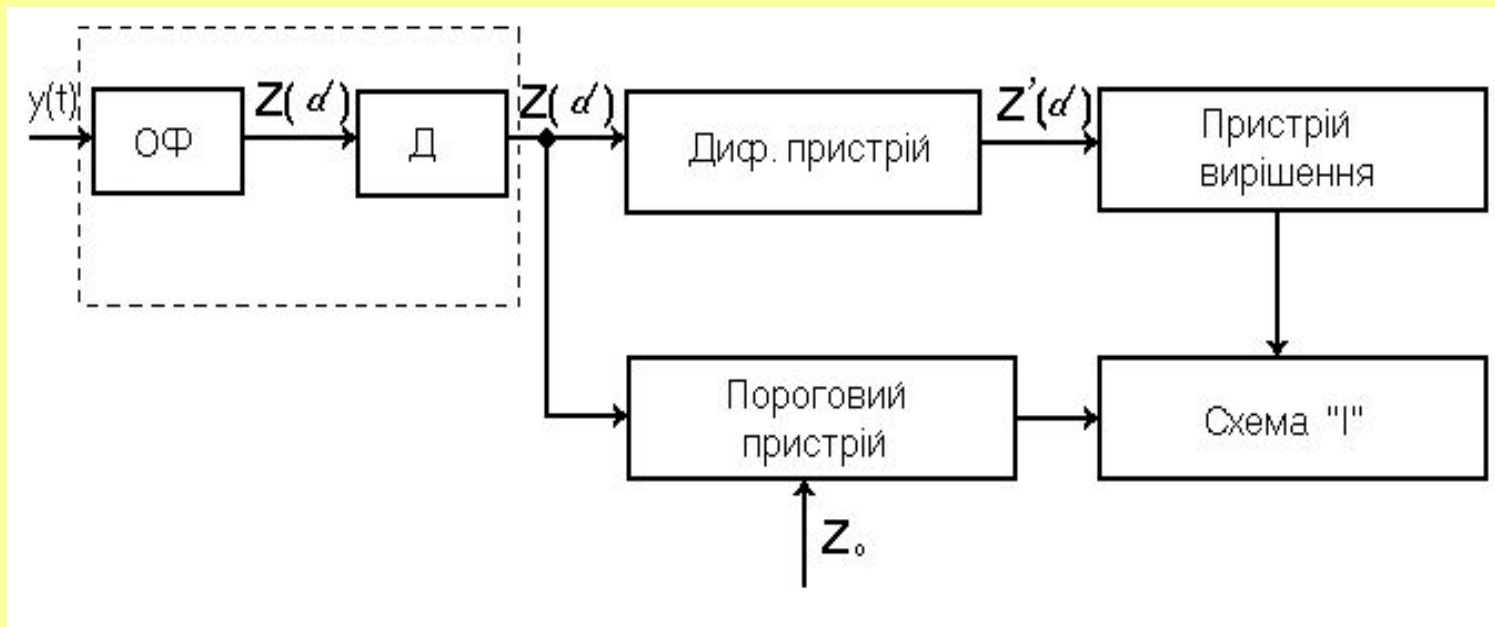


Рис.

**II варіант.** Використовується послідовний огляд по параметру  $\alpha$ .



**Рис.  
10.**



**Рис. 11. Структурної схеми оптимального приймача виявлення і вимірювання.**