Урок № 11

УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ

ПЛОСКОСТЬ - от лат. *planum* ровная поверхность.

<u>План урока:</u>

1 Прямая на плоскости и плоскость в пространстве.

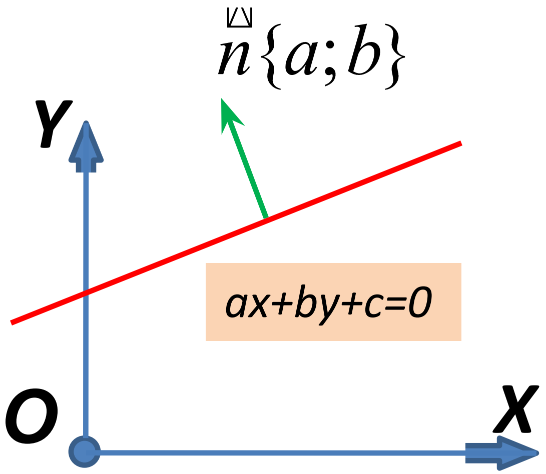
2 Вывод формулы уравнения плоскости.

3 Решение задач о нахождении уравнения плоскости.

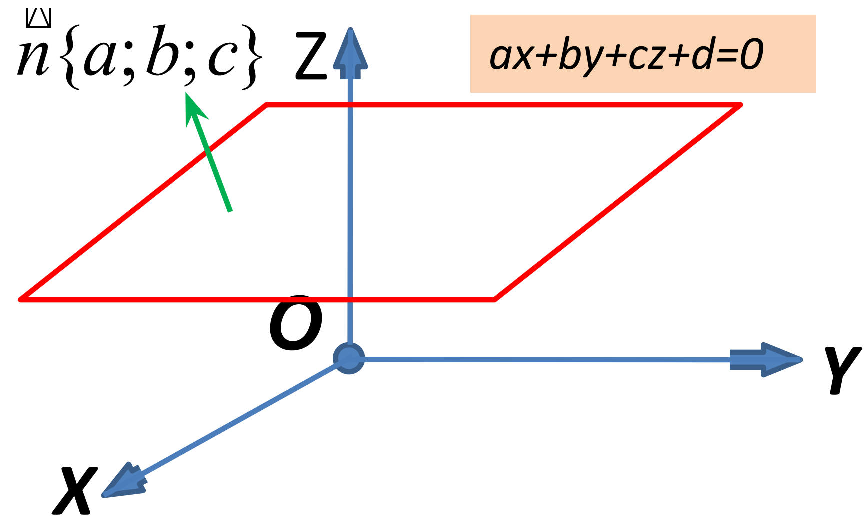
4 ДЗ.

Прямая на плоскости и плоскость в пространстве.

Уравнение прямой
на плоскости



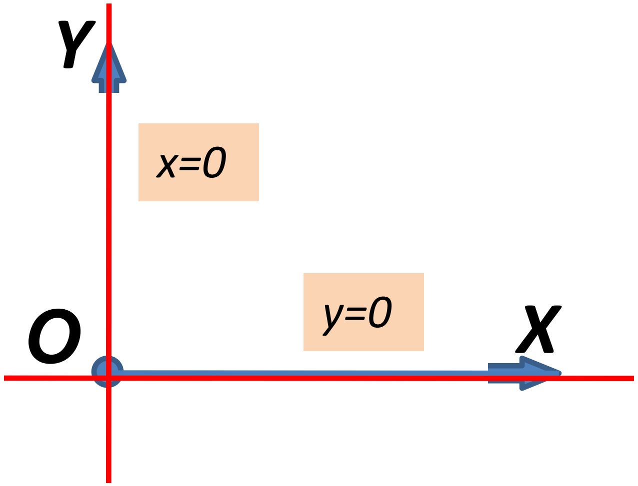
Уравнение плоскости
в пространстве

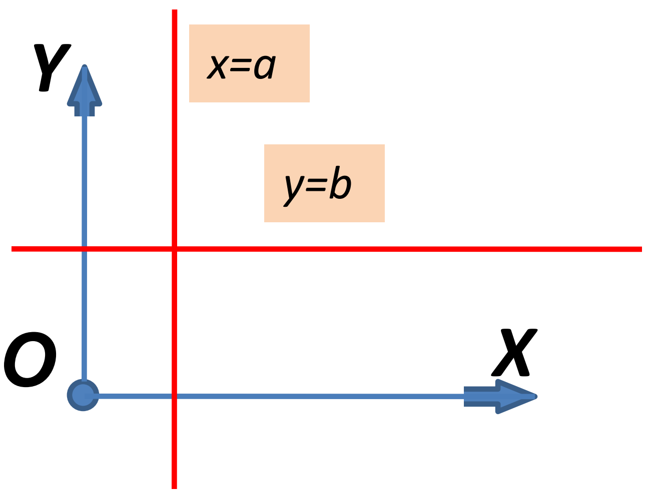


Вектор нормали прямой – это вектор, который перпендикулярен данной прямой.

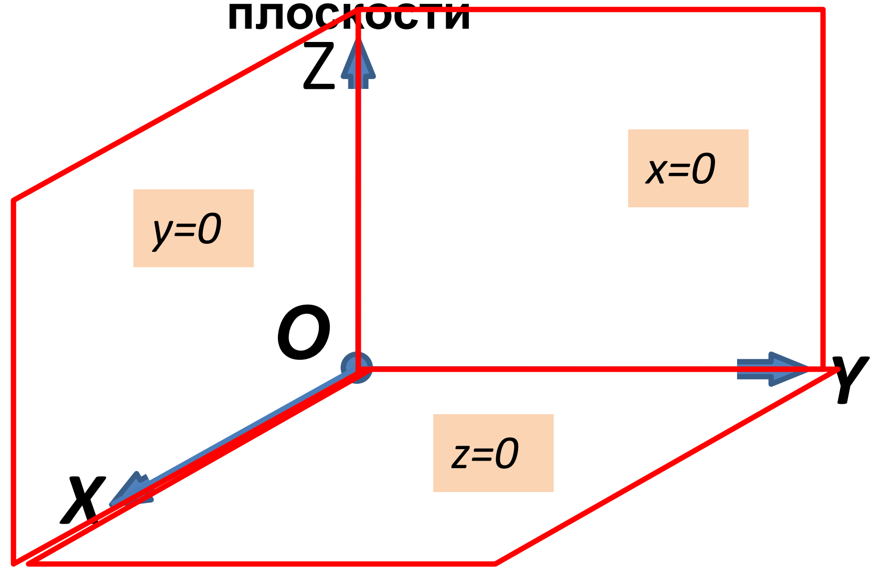
Вектор нормали плоскости – это вектор, который перпендикулярен данной плоскости.

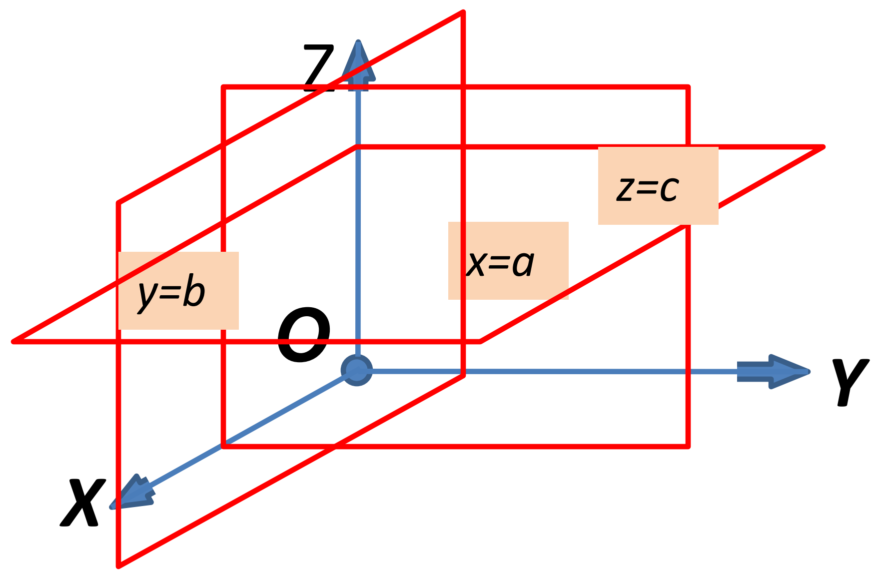
Частные случаи уравнения прямой



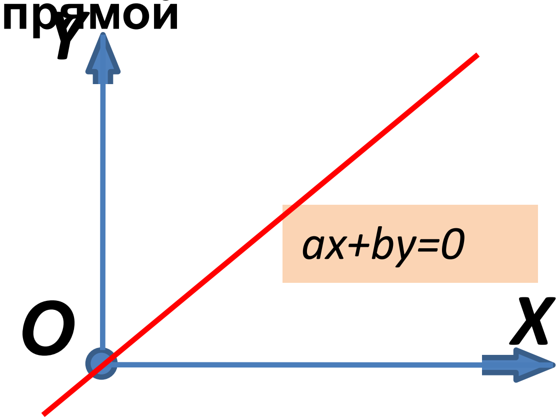


Частные случаи уравнения плоскости



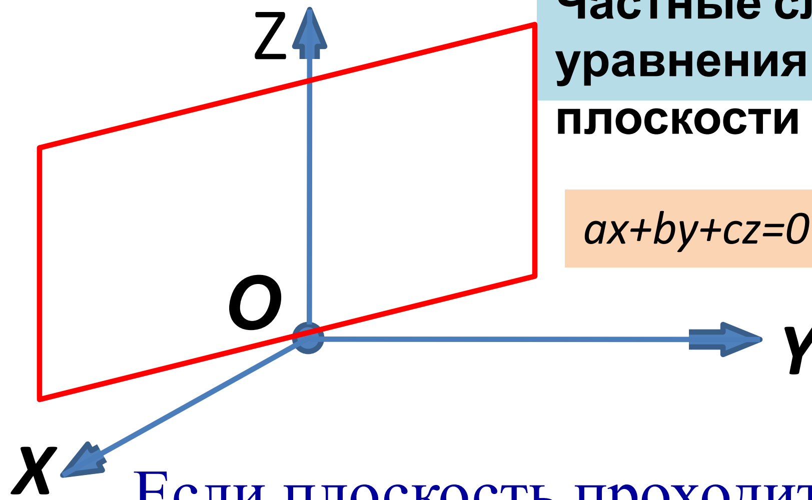


Частные случаи уравнения прямой



Если прямая проходит через начало координат, то $c=0$

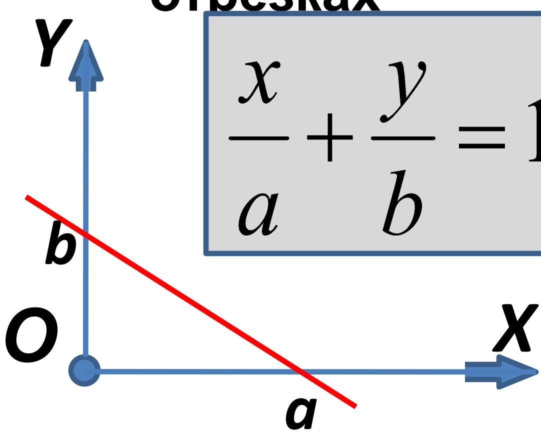
Частные случаи уравнения плоскости



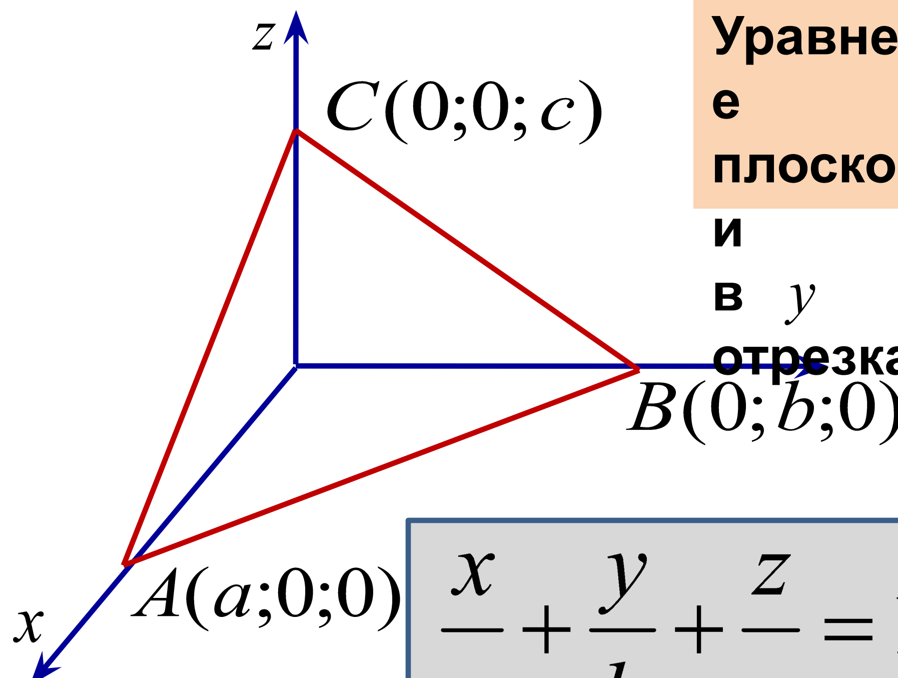
Если плоскость проходит через начало координат, то $d=0$

Уравнение прямой в отрезках

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

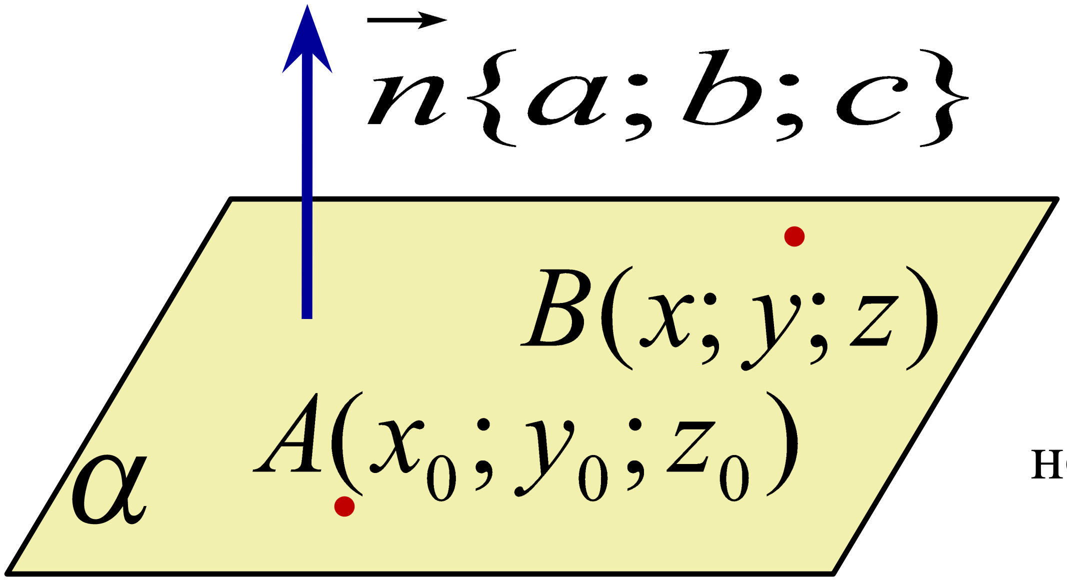


Уравнение плоскости в отрезках



$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

Уравнение плоскости, проходящей через данную **точку перпендикулярно** данному **вектору**



$$A(x_0;y_0;z_0)\in\alpha$$

$$\vec{n}\perp\alpha$$

$$\vec{n}\{a;b;c\}$$

нормальный вектор плоскости

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB}\{x-x_0;y-y_0;z-z_0\}$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\cos\alpha$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$$

$$\boxed{a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0}$$

$$\boxed{ax+by+cz+d=0}$$

, где $d=-(ax_0+by_0+cz_0)$

Уравнение плоскости

1 Общее уравнение плоскости

$$ax + by + cz + d = 0$$

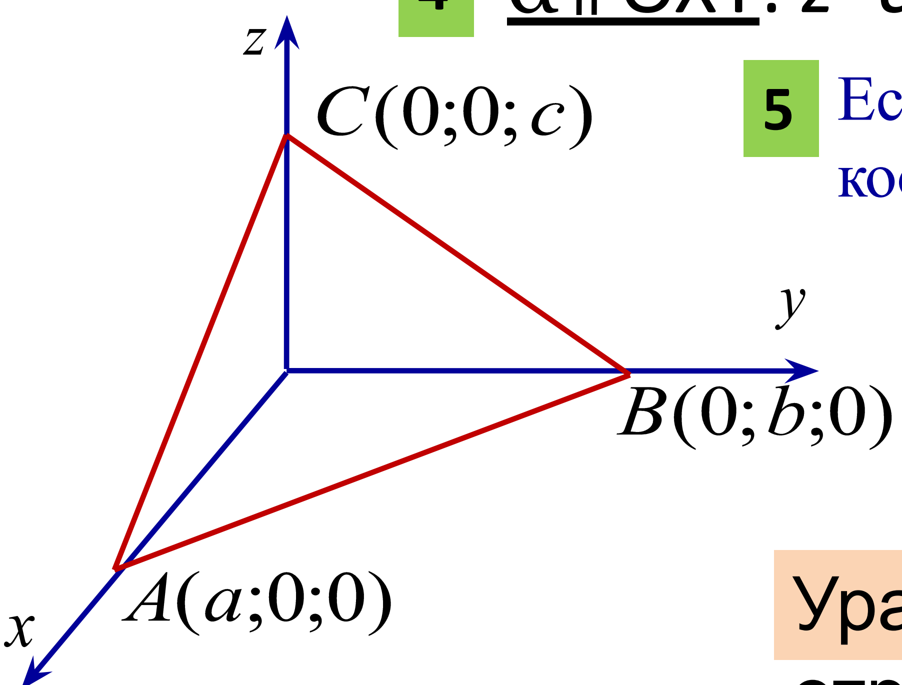
Частные случаи уравнения плоскости

2 O(0;0;0), O $\in$ α, то ***d=0***

$$ax + by + cz = 0$$

3 <u>α=OXY</u>: *z=0*, <u>α=OXZ</u>: *y=0*, <u>α=OYZ</u>: *x=0*.

4 <u>α || OXY</u>: *z=c*, <u>α || OXZ</u>: *y=b*, <u>α || OYZ</u>: *x=a*.

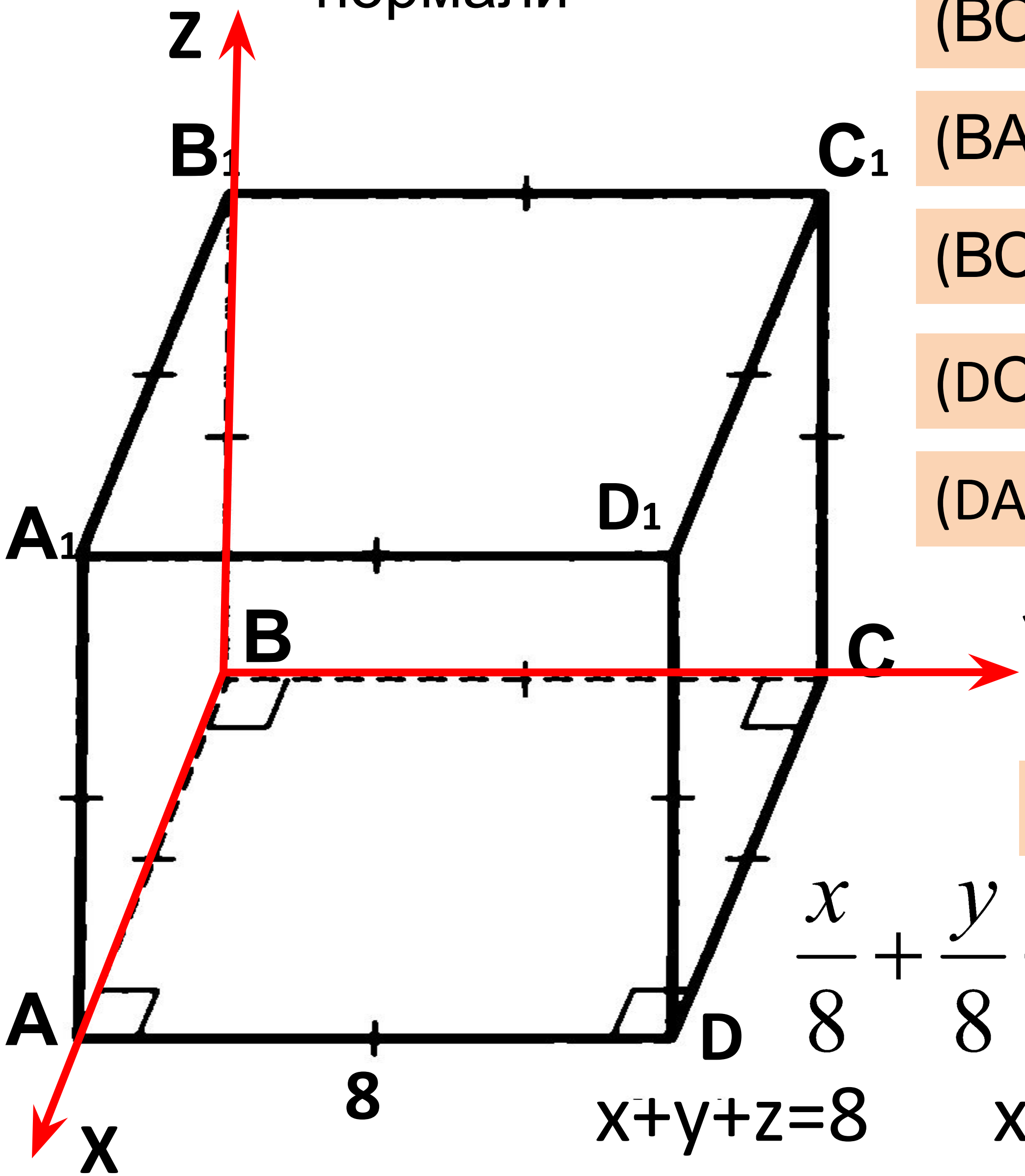


5 Если плоскость пересекает оси координат в точках A, B, C, то

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Уравнение плоскости в отрезках

1) Запишите уравнения плоскостей по рисунку и координаты вектора нормали



(BCC1): $x=0$ $\vec{n}\{1;0;0\}$

(BAA1): $y=0$ $\vec{n}\{0;1;0\}$

(BCA): $z=0$ $\vec{n}\{0;0;1\}$

(DCC1): $y=8$ $\vec{n}\{0;1;0\}$

(DAA1): $x=8$ $\vec{n}\{1;0;0\}$

(D1C1B1): $z=8$ $\vec{n}\{0;0;1\}$

(ACB1): $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

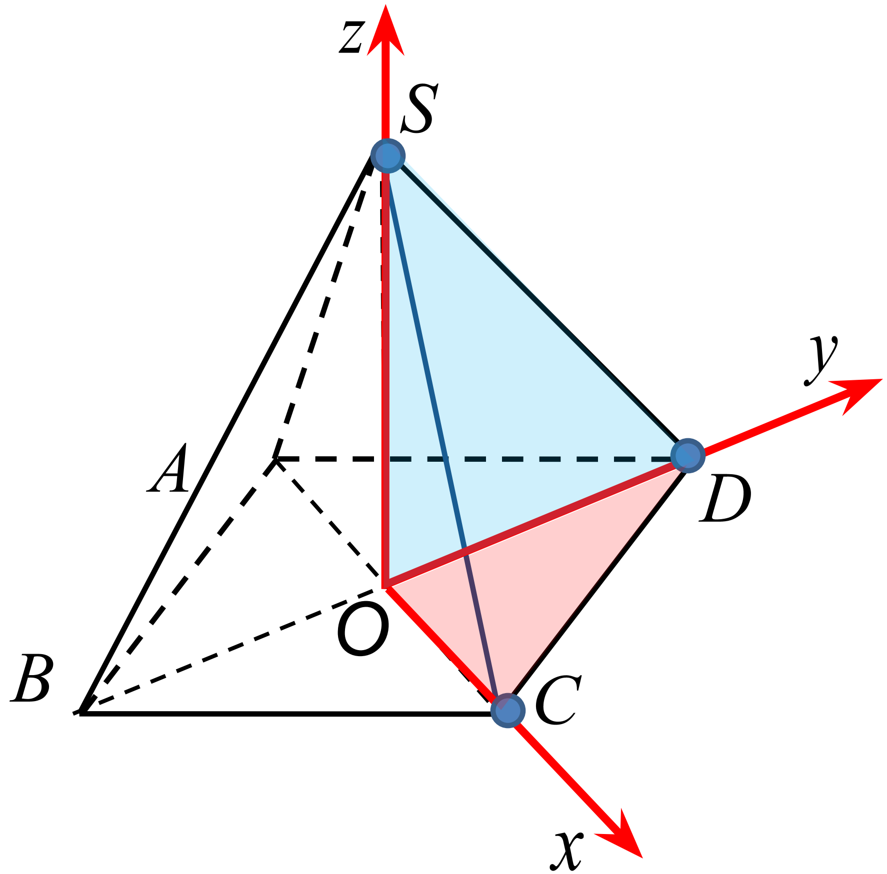
$$\frac{x}{8}+\frac{y}{8}+\frac{z}{8}=1$$

$x+y+z=8$ $x+y+z-8=0$ $\vec{n}\{1;1;1\}$

2) Запишите уравнения плоскости по рисунку, укажите вектор нормали

Предложите как лучше выбрать систему координат?

В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD*, все ребра которой равны *1*



(SCD): $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

$$OD=OC=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Delta DOC = \Delta DOS$$

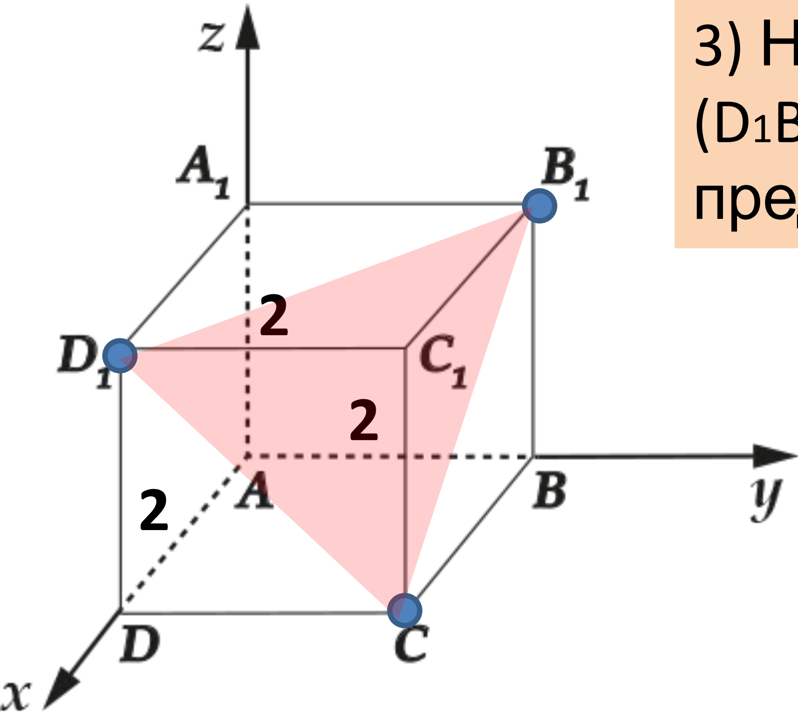
по гипотенузе и катету

$$OS=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{y}{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{z}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1$$

$$\sqrt{2}x+\sqrt{2}y+\sqrt{2}z-1=0 \qquad \vec{n}\{\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2}\}$$

3) Напишите уравнение плоскости (D_1B_1C), укажите вектор нормали, если представленная фигура куб



$D_1(2;0;2)$, $B_1(0;2;2)$, $C(2;2;0)$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{cases} 2a+2c+d=0 \\ 2b+2c+d=0 \\ 2a+2b+d=0 \end{cases}$$

$2a-2b=0$

$2a+2b+d=0$

$4a+d=0$

$a=-1/4d$

$2a+2c+d=0$

$2(-1/4d)+2c+d=0$

$-1/2d+2c+d=0$

$2c=-1/2d$

$c=-1/4d$

$2a+2b+d=0$

$2(-1/4d)+2b+d=0$

$-1/2d+2b+d=0$

$2b=-1/2d$

$b=-1/4d$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$-1/4dx-1/4dy-1/4dz+d=0$

$x+y+z-4=0$ $\quad \vec{n}\{1;1;1\}$

4) Напишите уравнение плоскости (АМс), укажите вектор нормали, если представленная фигура прямоугольный параллелепипед

Введем систему координат как показано на рисунке

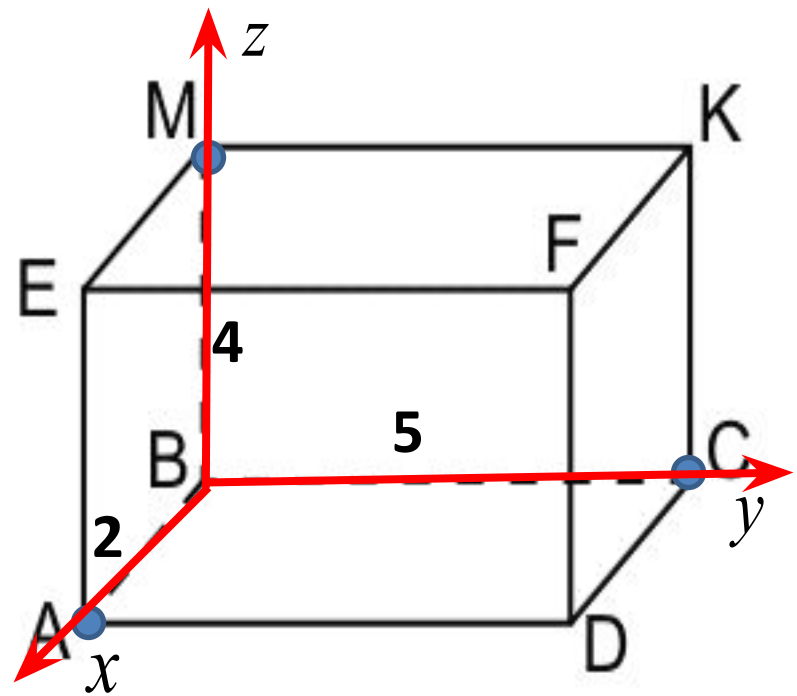
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{5}+\frac{z}{4}=1$$

10x+4y+5z=20

10x+4y+5z-20=0

$$\vec{n}\{10;4;5\}$$



Задача 5(6): Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A(-2;3;5), B(4;-3;0), C(0;6;-5) и найти координаты вектора нормали. (A(-1;3;-2), B(4;-2;0), C (3;-2;-1))

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{cases} -2a + 3b + 5c + d = 0 \\ 4a - 3b + d = 0 \\ 6b - 5c + d = 0 \end{cases}$$

Цель – выразить каждую из трех переменных *a, b, c* через *d*

Сложив 1 и 3 уравнение системы получим уравнение с 3-мя неизвестными *a, b, d*

$$-2a + 9b + 2d = 0$$

Получили уравнение, которое «созвучно» со 2 уравнением системы с 3-мя неизвестными *a, b, d*, умножим на 2 данное уравнение и сложим его со 2 уравнением (для того чтобы избавиться от переменной a)

$$-4a + 18b + 4d = 0$$

$$15b + 5d = 0$$

$$15b = -5d$$

$$b = \frac{-d}{3}$$

$$4a - 3b + d = 0$$

$$4a + d + d = 0$$

$$4a = -2d$$

$$a = -\frac{d}{2}$$

$$6b - 5c + d = 0$$

$$-2d - 5c + d = 0$$

$$-5c = d$$

$$c = \frac{-d}{5}$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$a = -\frac{d}{2} \qquad b = \frac{-d}{3} \qquad c = \frac{-d}{5}$$

$$\frac{-d}{2}x + \frac{-d}{3}y + \frac{-d}{5}z + d = 0$$

$$15x + 10y + 6z - 30 = 0$$

Проверка правильности составленного уравнения плоскости (подставим координаты точек в данное уравнение плоскости)

A(-2;3;5), B(4;-3;0), C(0;6;-5)

$$\begin{cases} -30 + 30 + 30 - 30 = 0 \\ 60 - 30 - 30 = 0 \\ 60 - 30 - 30 = 0 \end{cases}$$

Запишем координаты вектора нормали к плоскости

$$\vec{n}\{15;10;6\}$$

Составить уравнение плоскости: A(-1;3;-2), B(4;-2;0), C (3;-2;-1)

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{cases} -a + 3b - 2c + d = 0 \\ 4a - 2b + d = 0 \\ 3a - 2b - c + d = 0 \end{cases}$$

0) система содержит **четыре** неизвестных

1) Работаем с первым уравнением системы, умножим на 4 и сложим со вторым (избавимся от переменной *a*)

1)

$$-a + 3b - 2c + d = 0$$

$$-4a + 12b - 8c + 4d = 0$$

$$4a - 2b + d = 0$$

$$10b - 8c + 5d = 0 \quad (1)$$

2) Работаем с первым уравнением системы, умножим на 3 и сложим с третьим (избавимся от переменной *a*)

2)

$$-a + 3b - 2c + d = 0$$

$$-3a + 9b - 6c + 3d = 0$$

$$3a - 2b - c + d = 0$$

$$7b - 7c + 4d = 0 \quad (2)$$

1) и 2) позволило получить два уравнения с **тремя** неизвестными (избавились от переменной *a*)

3) Работаем с полученными уравнениями (избавимся от переменной *b*), для этого первое уравнение умножим на (-7), а второе на 10 и сложим, получили уравнение с **двумя** неизвестными

3)

$$-70b + 56c - 35d = 0$$

$$70b - 70c + 40d = 0$$

$$-14c + 5d = 0 \quad (3)$$

4) Выразим *c* через *d*

$$c = \frac{5d}{14} \quad (4)$$

5) Подставим (4) в (1) и выразим *b* через *d*

$$10b - \frac{20d}{7} + 5d = 0$$

$$b = -\frac{3d}{14} \quad (5)$$

6) Подставим (5) во второе уравнение исходной системы и выразим *a* через *d*

$$4a - 2b + d = 0$$

$$4a + \frac{3d}{7} + d = 0$$

$$a = -\frac{5d}{14} \quad (6)$$

7) Подставим (4);(5);(6) в общее уравнение плоскости

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$ax+by+cz+d=0$$

$$a=-\frac{5d}{14} \qquad b=-\frac{3d}{14} \qquad c=\frac{5d}{14}$$

$$\frac{-5d}{14}x+\frac{-3d}{14}y+\frac{5d}{14}z+d=0$$

Разделим обе части уравнения на *d*, и умножим на (-14)

$$5x+3y-5z-14=0$$

Проверка правильности составленного уравнения плоскости (подставим координаты точек в данное уравнение плоскости)

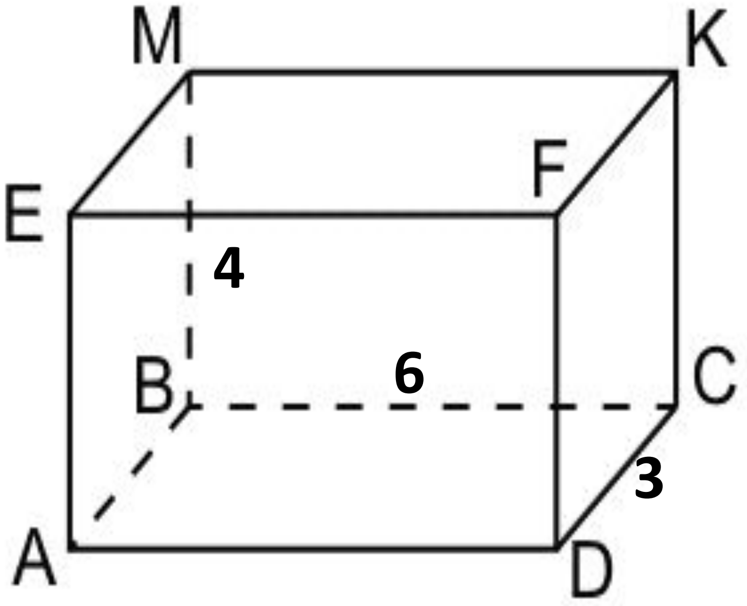
A(-1;3;-2), B(4;-2;0), C(3;-2;-1)

$$\begin{cases} -5+9+10-14=0 \\ 20-6-14=0 \\ 15-6+5-14=0 \end{cases}$$

Уравнение плоскости проходящей через три точки A(-1;3;-2), B(4;-2;0), C(3;-2;-1) имеет вид $5x+3y-5z-14=0$

Домашнее задание с урока

Знать уравнение плоскости, вектор нормали к плоскости, выбрать произвольные три точки, заданные в системе координат в пространстве, составить уравнение плоскости (2 задачи), задача ниже



3) Напишите уравнение плоскостей, которые являются гранями прямоугольного параллелепипеда и (ВЕК). Укажите для каждой плоскости вектор нормали. Подумайте как легче ввести в этом случае систему координат (какую вершину выбрать началом координат, подскажет (ВЕК)).