Элементы комбинаторики

Комбинаторика

– Комбинаторика — раздел математики, посвящённый решению задач выбора и расположения элементов некоторого множества, подчиненных определённым условиям.

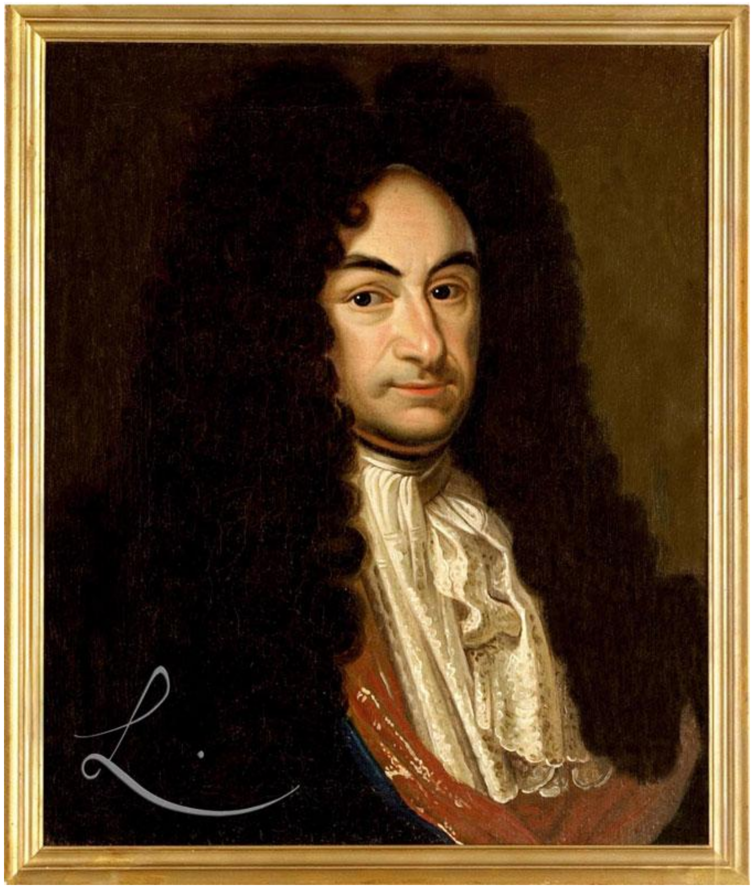
Комбинаторные методы применяются в теории кодирования, планировании эксперимента, топологии, математической логике, теории игр, кристаллографии, биологии, статистической физике, экономике и т.д. Комбинаторика является основой для изучения теории вероятностей и математической статистики.

История возникновения

Комбинаторика возникла в XVI веке. В то время в жизни привилегированных слоев общества большое место занимали азартные игры (карты, кости). Были широко распространены лотереи. Возникали вопросы: сколькими способами можно выбросить данное число очков, бросая две или три кости, или сколькими способами можно получить двух королей? Эти и другие проблемы оказались движущей силой в развитии комбинаторики.

Теоретические исследования вопросов комбинаторики предприняли Паскаль и Ферма, Бернулли, Лейбниц и Эйлер и др.

Готфрид Вильгельм Лейбниц



1.07.1646 - 14.11.1716

Всемирно известный немецкий учёный, занимался философией, математикой, физикой, организовал Берлинскую академию наук и стал её первым президентом.

В 1666 году вводит термин "комбинаторика" в своей диссертации об искусстве комбинаторики, в которой решает основные комбинаторные задачи.

Основные правила комбинаторики

Правило сложения (суммы)

Если объект А может быть выбран **n** способами, а объект В – **m** способами, то выбор «или А, или В» может быть осуществлен **n+m** способами.

Задача. На тарелке лежат 5 яблок и 4 апельсина. Сколькими способами можно выбрать один плод?

Решение: 5 + 4 = 9

Основные правила комбинаторики

Задача. В магазине есть 5 различных видов коробок конфет и 4 пачки печенья. Сколькими способами можно составить набор, состоящий из коробки конфет и пачки печенья?

Решение: $5 \cdot 4 = 20$

	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
p_1	$k_1 p_1$	$k_2 p_1$	$k_3 p_1$	$k_4 p_1$	$k_5 p_1$
p_2	$k_1 p_2$	$k_2 p_2$	$k_3 p_2$	$k_4 p_2$	$k_5 p_2$
p_3	$k_1 p_3$	$k_2 p_3$	$k_3 p_3$	$k_4 p_3$	$k_5 p_3$
p_4	$k_1 p_4$	$k_2 p_4$	$k_3 p_4$	$k_4 p_4$	$k_5 p_4$

Основные правила комбинаторики

Правило умножения (произведения)

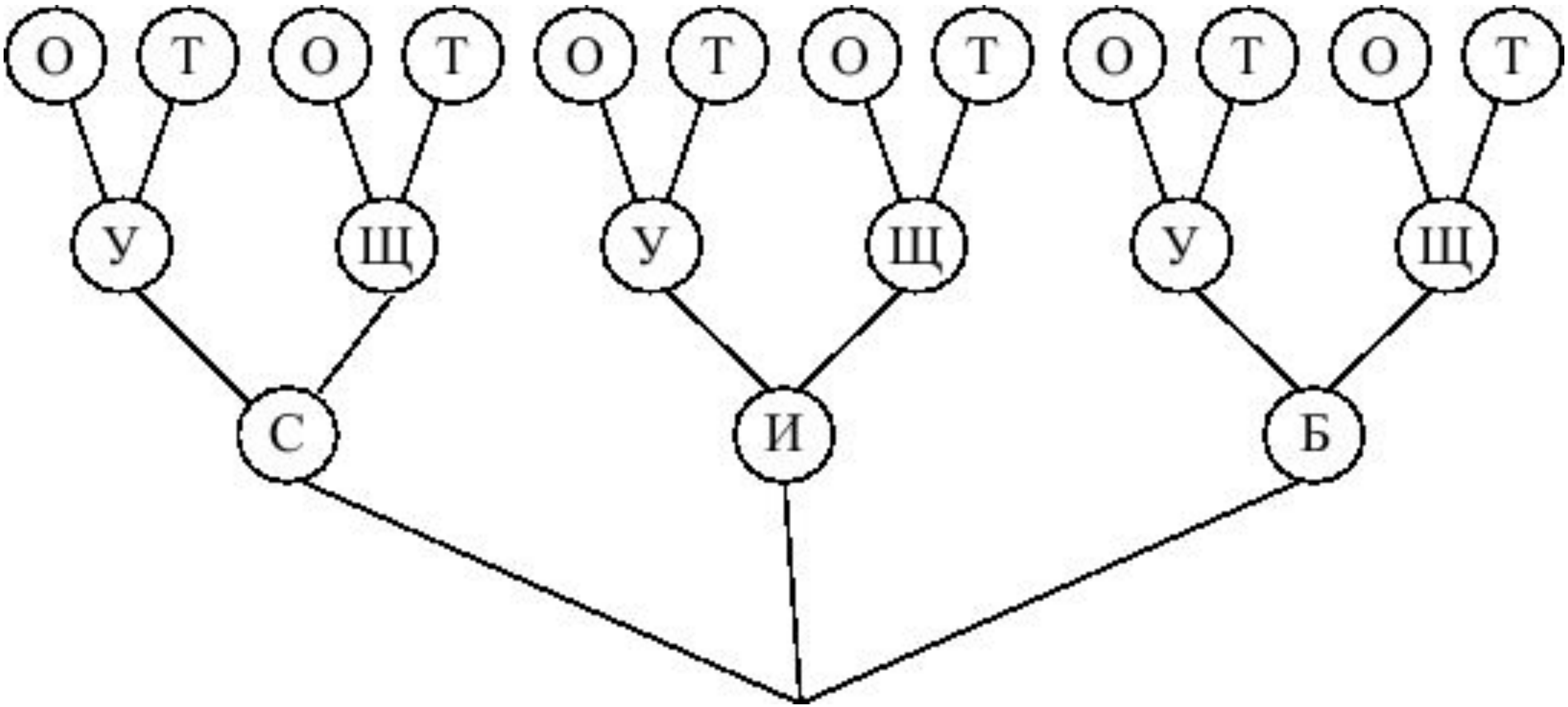
Если объект А может быть выбран **n** способами
и после каждого из таких выборов
объект В – **m** способами,
то выбор «А и В» в указанном порядке может
быть осуществлен **n** · **m** способами.

Основные правила комбинаторики

Задача. Сколько различных обедов П.И. Чичиков мог насчитать из блюд, выставленных на столе у П. П. Петуха, если бы на каждый обед выбирать только одно холодное блюдо, одно первое блюдо и одно второе блюдо?

На столе у П.П. Петуха на этот раз были выставлены из холодных блюд студень с хреном, свежая икра, свежепросоленная белужина; на первое - уха из стерлядей, щи с грибами; на второе - осетрина жареная, теленок, жаренный на вертеле.

Основные правила комбинаторики



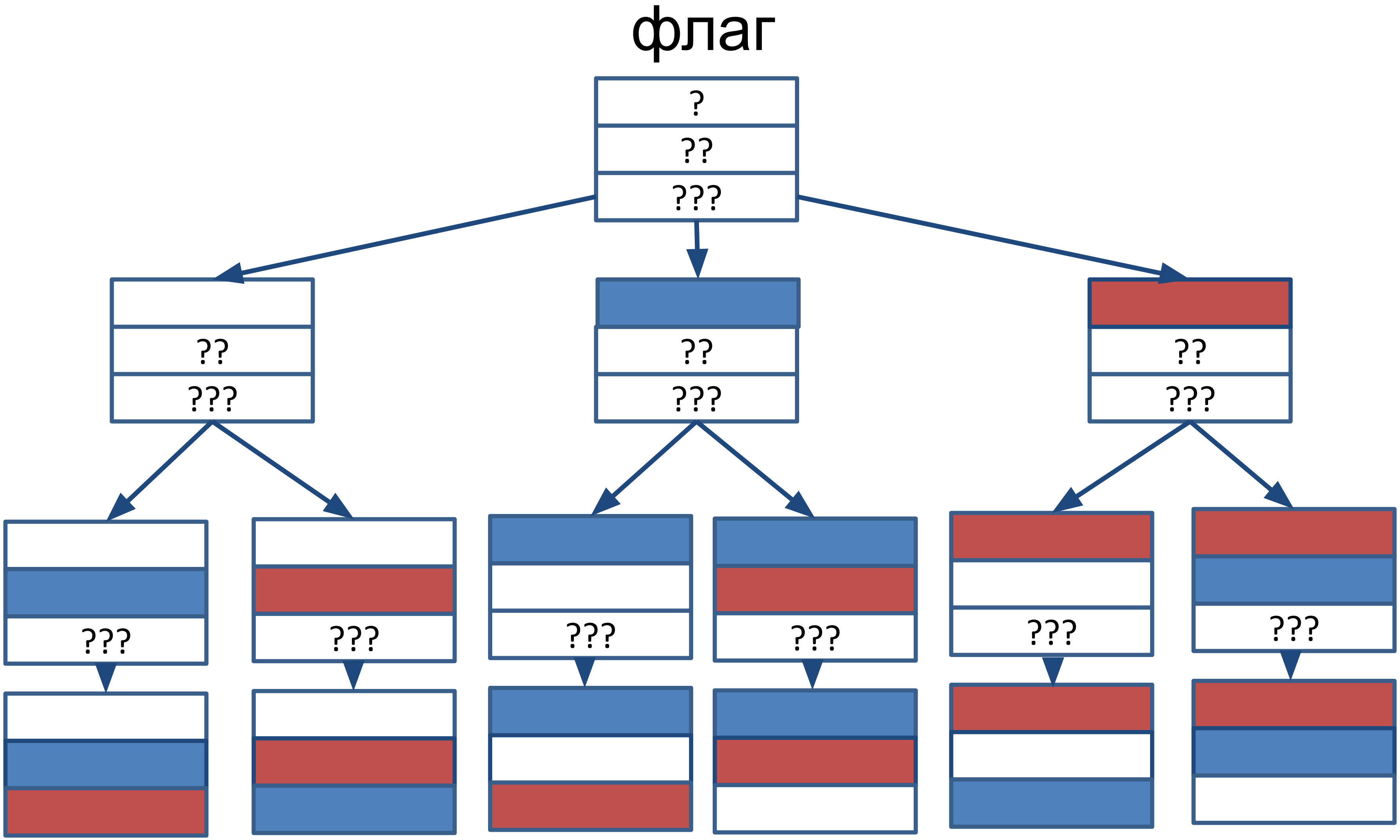
$3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ различных обедов

Дерево всевозможных вариантов

Задача. Несколько стран в качестве символа своего государства решили использовать флаг в виде горизонтальных полос одинаковых по ширине, но разных по цвету: белый, синий, красный. Сколько стран могут использовать такую символику при условии, что у каждой страны свой, отличный от других флаг?

Чем данная задача отличается от предыдущей?

Дерево всевозможных вариантов



Факториал

От (англ.) *factor* – множитель.

Произведение первых подряд идущих n натуральных чисел называют **факториалом** и обозначают через $n!$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ и т.д.

Размещения

Пусть дано множество, состоящее из ***n*** элементов.

Размещением из ***n***-элементного множества по ***k*** (***0***≤ ***k***≤***n***) элементов называется ***k***-элементное подмножество, в котором **важен** порядок расположения элементов.

Пример. {1,2,3,4,5} – n=5 элементов

Размещения по k=1: 1, 2, 3, 4, 5

Размещения по k=2: 12, 13, 14, 15, 21, 23, 24, 25, 31, 32, 34, 35, 41, 42, 43, 45, 51, 52, 53, 54

Размещения по k=3: 123, 124, 125, 132, 134, 135, 142, 143, 145, 152, 153, 154, …512, 513, 514, 521, 523, 524, 531, 532, 534, 541, 542, 543

Размещения по k=4: 1234, 1235, 1243, 1245, 1324, 1325, …

Перестановки

Перестановкой для ***n***-элементного множества называется ***n***-элементное размещение.

или:

Перестановкой называют упорядоченную выборку элементов из некоторого множества.

Пример. {1,2,3,4,5} – n=5 элементов

Перестановки: 12345, 12354, 12435, 12453, 12534, 12543, 13245, 13254, 13425, 13452, 13524, 13542, …

Сочетания

Пусть дано множество, состоящее из ***n*** элементов.

Сочетанием из ***n***-элементного множества по ***k*** (***0*≤ *k*≤*n***) элементов называется ***k***-элементное подмножество, в котором **не важен** порядок расположения элементов.

Пример. {1,2,3,4,5} – n=5 элементов

Сочетания по k=1: {1}, {2}, {3}, {4}, {5}

Сочетания по k=2: {1,2}, {1,3}, {1,4}, {1,5}, {2,3}, {2,4}, {2,5}, {3,4}, {3,5}, {4,5}

Сочетания по k=3: {1,2,3}, {1,2,4}, {1,2,5}, {1,3,4}, {1,3,5}, {1,4,5}, {2,3,4}, {2,3,5}, {2,4,5}, {3,4,5}

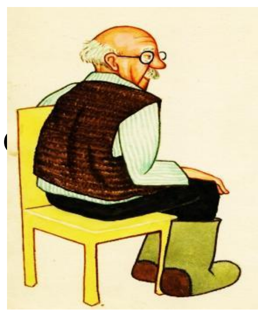
Сочетания по k=4: {1,2,3,4}, {1,2,3,5}, {1,2,4,5}, {1,3,4,5}, {2,3,4,5}

	Порядок существенен (упорядочен.)	Порядок несущественен (неупорядочен.)
Элементы не повторяются		
Элементы повторяются		

Задача. В семье 6 человек, а за столом в кухне 6 стульев. Было решено каждый вечер перед ужином рассаживаться на эти 6 стульев по-новому. Сколько дней члены семьи смогут делать это без повторений?

6• •2•1= 720 очти 2 года

6



5

4

3

2

1

№1

№2

№3

№4

№5

№6

Задача: Сколькими способами можно переставить буквы в слове «треугольник»?

В слове «треугольник» 11 букв и все буквы различны, порядок важен.

$$P_{11} = 11! = 39916800$$

Задача: Сколькими способами можно переставить буквы в слове «математика».

В слове «математика» 10 буквы, элементы повторяются (м-2, а-3, т-2, е-1, и-1, к-1).

Порядок важен.

$$\overline{P_{10}} = \overline{P_{2,3,2,1,1,1}} = \frac{10!}{2!3!2!1!1!1!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{4} = 151200$$

Задача: Имеются пять предметов для подарков. Сколько
можно составить различных подарочных наборов из двух предметов?

С помощью перечисления: ab, ac, ad, af, bc, bd, bf, cd, cf, df — 10 наборов. По формуле: порядок предметов здесь не важен и элементы повторятся не могут, поэтому число различных наборов равно

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 2\cdot 5 = 10$$

Задача: На почте продаются открытки 10 сортов. Сколько вариантов существует для покупки 12 открыток.

Порядок не важен (сочетание), открытки могут повторяться (с повторением).

$$\overline{C_{10}^{12}} = \frac{(10+12-1)!}{12!(10-1)!} = \frac{21!}{12!9!} = 293930$$

Задача: Сколькими способами можно составить трехцветный флаг какого-либо государства с тремя горизонтальными полосами одной и той же ширины, если есть материя пяти различных цветов?

Комбинации могут отличаться друг от друга как составом элементов, так и порядком их расположения

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$$

Задача: В стену здания вмонтированы 8 гнезд для флажков. В каждое гнездо вставляется либо голубой, либо красный флажок. Сколько различных случаев распределения флажков на здание.

Порядок важен, не все элементы используются (размещение) с повторением

$$\overline{A_2^8} = 2^8 = 256$$

Задача: В группе 20 студентов, из которых 5 отличников, 11 хорошистов и остальные троечники. Сколькими способами можно выбрать группу для выполнения лабораторной работы, состоящей из 3 хорошистов, 1 отличника и 1 троечника.

Задача: Имеется 4 чашки, 5 блюдец, 6 ложек (все чашки, блюдца, ложки различны). Сколькими способами можно накрыть стол к чаю на 3 человека, если каждый получает 1 чашку, 1 блюдце и 1 ложку.