Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ижевский государственный технический университет
имени М. Т. Калашникова»

Кафедра «Мехатронные системы»

Курс «Механика роботов и мехатронных модулей»

Тема «Динамический анализ и синтез в робототехнике»

Автор Зубкова Ю.В., старший преподаватель

Ижевск
2013

Динамический анализ механизмов

Задачи динамики:

- **прямая задача**: по заданным силам и моментам определить обобщенные ускорения, интегрирование которых позволяет получить значения обобщенных координат и скоростей;
- **обратная задача**: по заданным обобщенным координатам, скоростям и ускорениям определить действующие в сочленениях манипулятора силы и моменты.

Предметом динамики манипулятора как раздела робототехники является математическое описание действующих на манипулятор сил и моментов в форме уравнений динамики движения.

Основные понятия и определения

Машина – техническое устройство, в результате осуществления технологического процесса определенного рода, можно автоматизировать или механизировать труд человека.

Виды машин:

- энергетические;
- **технологические;**
- транспортные;
- информационные.

Двигатель – техническое устройство, преобразующее один вид энергии в другой.

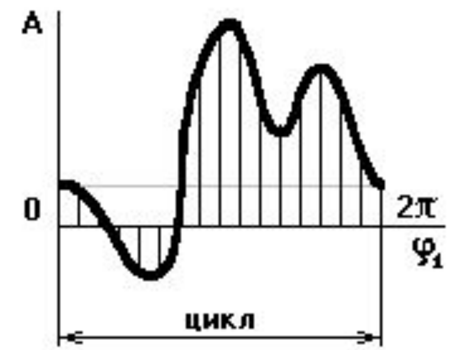
Техническое объединение двигателя и технологической (рабочей машины) **– Машинный агрегат (МА).**

Силы и моменты, действующие в машинном агрегате

1. Движущиеся силы и моменты $F_д$ и $M_д$

Работа движущих сил и моментов за цикл положительна: $A_д>0$.

Цикл – промежуток времени, по истечению которого все кинематические параметры принимают первоначальное значение, а технологический процесс, происходящий в рабочей машине, начинает повторяться вновь.



2. Силы и моменты сопротивления (F_c,M_c)

Работа сил и моментов сопротивления за цикл отрицательна: $A_c<0$.

3. Силы тяжести (G_i).

Работа силы тяжести за цикл равна нулю: $A_{Gi}=0$.

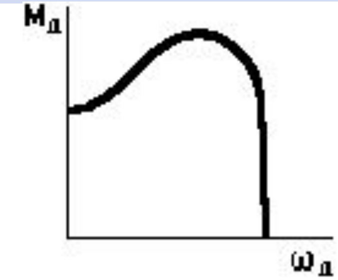
4. Расчетные силы и моменты ($Ф_{Si}$,$M_{Фi}$)

$Ф_{Si}$,$M_{Фi}$ – Главные векторы сил инерции и главные моменты от сил инерции.

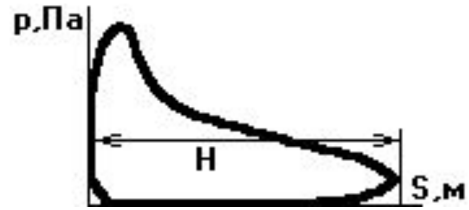
5. Реакции в кинематических парах (Q_{ij}).

Понятие о механических характеристиках

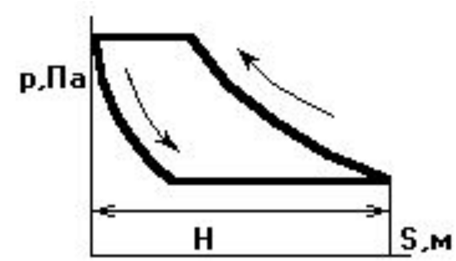
- Механическая характеристика 3-х фазного асинхронного двигателя.



- Индикаторная диаграмма ДВС



- Индикаторная диаграмма насоса



Правило знаков сил и моментов:

- Сила считается положительной, если она по направлению совпадает с направлением движения того звена, к которому эта сила приложена.
- Момент считается положительным, если его направление совпадает с направлением угловой скорости вращения данного звена.

Понятие о расчетной схеме машинного агрегата и переход от неё к динамической модели

Если жесткость c1 $\rightarrow\infty$, то можно перейти к двумассовой модели (необходимо 2 диф. уравнения). Если жесткость c2 $\rightarrow\infty$, то получим одномассовую динамическую модель.

Два вида одномассовых динамических моделей:

1. Если звено приведения совершает вращательное движение, то одномассовая модель имеет вид:

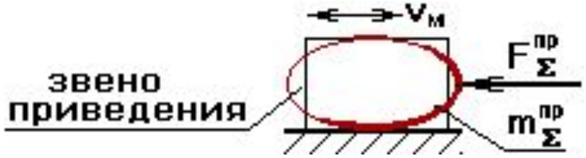
Закон движения должен быть один, поэтому ωм = ω1 , φм = φ1

$$T - T_{нач} = A_\Sigma$$

$$\frac{I_\Sigma^{прив}\cdot\omega_м^2}{2} - T_{нач} = \int_{\varphi_{М\ НАЧ}}^{\varphi_{М\ КОН}} M_\Sigma^{пр}\, d\varphi_м$$

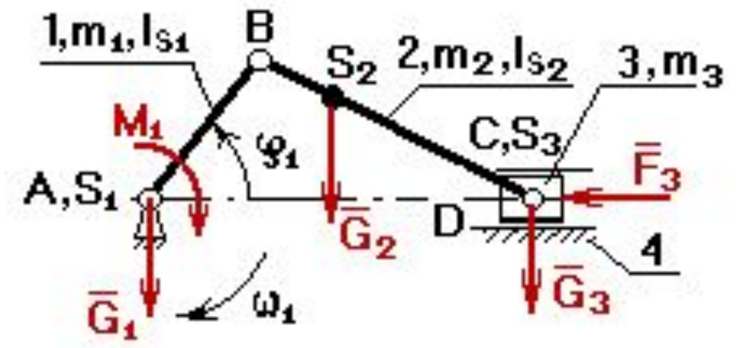
2. Если звено приведения совершает поступательное движение, то одномассовая модель имеет вид:

$$\frac{m_\Sigma^{прив}\cdot V_м^2}{2} - T_{нач} = \int_{s_{М\ НАЧ}}^{s_{М\ КОН}} F_\Sigma^{пр}\, d s_м$$



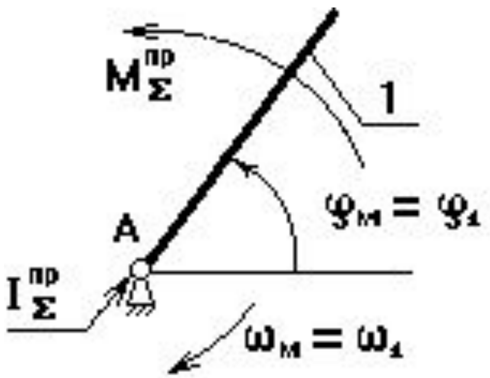
Приведение сил и масс к одномассовой динамической модели

ϕ_1 – обобщенная координата.
Нужно определить закон движения 1-го звена данного механизма.
Дано: ϕ_1, ω_1, l_{AB}, l_{BC}, l_{BS2}, G_2, G_3, F_3, I_{S1}, I_{S2}.
Определить, как изменяется ω_1.



Звено приведения – звено 1.

1. Приведение масс.



$T_{Мод} = T_{Мех}$

$T_{мод} = T_{пост} + T_{вращ}$

$$\frac{I_{\Sigma}^{ПР}\cdot\omega_{M}^{2}}{2}=\sum\frac{m_i\cdot v_i^2}{2}+\sum\frac{I_i\cdot\omega_i^2}{2}$$

кинетическая энергия модели — **кинетическая энергия поступ. движущ.звеньев** — **кинетическая энергия вращат. движущ.звеньев**

Приведение сил и масс к одномассовой динамической модели (продолжение)

В нашем случае:

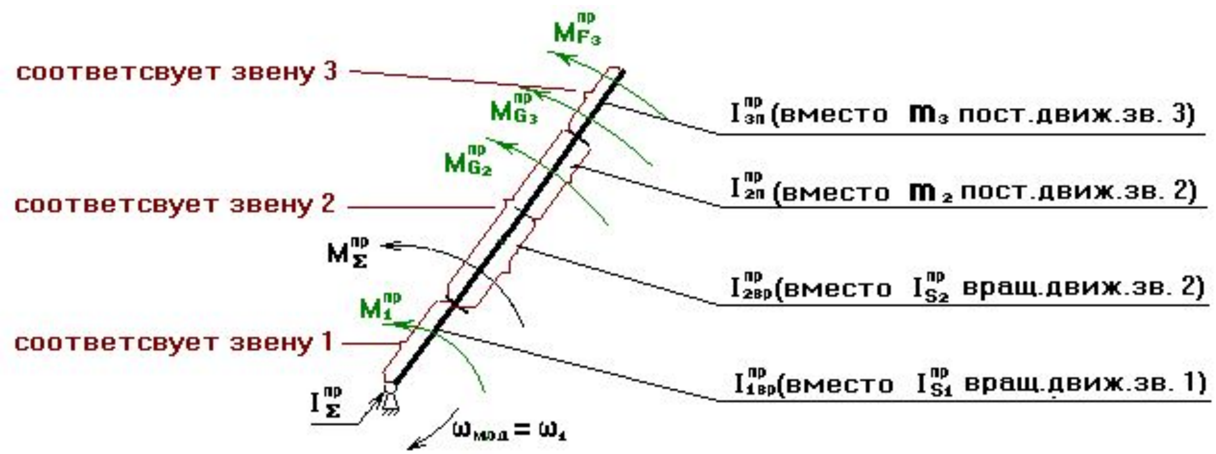
$$\frac{I_{\Sigma}^{\text{ПР}}\cdot\omega_{\text{М}}^2}{2}=\frac{m_3\cdot v_C^2}{2}+\frac{m_2\cdot v_{S2}^2}{2}+\frac{I_{S2}\cdot\omega_2^2}{2}+\frac{I_{S1}\cdot\omega_1^2}{2}$$

$$I_{\Sigma}^{\text{ПР}}=m_3\cdot\left(\frac{v_C}{\omega_{\text{М}}}\right)^2+m_2\cdot\left(\frac{v_{S2}}{\omega_{\text{М}}}\right)^2+I_{S2}\cdot\left(\frac{\omega_2}{\omega_{\text{М}}}\right)^2+I_{S1}\cdot\left(\frac{\omega_1}{\omega_{\text{М}}}\right)^2$$

$\omega_{\text{М}}=\omega_1$

$$I_{\Sigma}^{\text{ПР}}=m_3\cdot v_{qC}^2+m_2\cdot v_{qS2}^2+I_{S2}\cdot u_{21}^2+I_{S1}$$

$$I_{\Sigma}^{\text{ПР}}=I_{1\text{ВР}}^{\text{ПР}}+I_{2\text{ВР}}^{\text{ПР}}+I_{2\text{П}}^{\text{ПР}}+I_{3\text{П}}^{\text{ПР}}$$



Определим $I_{2\text{ВР}}^{\text{ПР}}$:

$$T_{2\,\text{ВР}}=T_{\text{МОД}}$$

$$\frac{I_{S2}\cdot\omega_2^2}{2}=\frac{I_{2\,\text{ВР}}^{\text{ПР}}\cdot\omega_{\text{М}}^2}{2}$$

$$I_{2\,\text{ВР}}^{\text{ПР}}=I_{S2}\cdot\left(\frac{\omega_2}{\omega_{\text{М}}}\right)^2=I_{S2}\cdot u_{21}^2$$

Приведение сил и масс к одномассовой динамической модели (продолжение)

2. Приведение сил.

A**Σ –** работа суммарного приведенного момента на его возможное перемещение.

$$T - T_{нач} = A_{\Sigma}$$

$$\frac{I_2^{ПР} \cdot \omega_м^2}{2} - T_{НАЧ} = \int\limits_{\varphi_{М\ НАЧ}}^{\varphi_{М\ КОН}} M_2^{ПР}\, d\varphi_М \qquad (1)$$

$$M_{\Sigma}^{пр}\ d\varphi_1 = \sum F_i\, ds_i + \sum M_i\, d\varphi_i \quad \Big|\cdot \frac{1}{dt}$$

$$M_{\Sigma}^{пр} \cdot \omega_М = \sum F_i \cdot v_i \cdot \cos(F_i \widehat{\bullet} v_i) + \sum M_i \cdot \omega_i$$

$$M_{\Sigma}^{пр} = \sum F_i \cdot \frac{v_i}{\omega_М} \cdot \cos(F_i \widehat{\bullet} v_i) + \sum M_i \cdot \frac{\omega_i}{\omega_М}$$

передат функция

передаточ отношение

$$M_{\Sigma}^{пр} = \sum F_i \cdot v_{qi} \cdot \cos(F_i \widehat{\bullet} v_i) + \sum M_i \cdot u_{i-1}$$

Приведение сил и масс к одномассовой динамической модели (продолжение)

Вместо силы F_3 – момент $M^{\text{ПР}}_{F_3}$.

Определим $M^{\text{ПР}}_{F_3}$:

$$A_{M^{\text{ПР}}_{\Sigma}} = A_{F_3}$$

$$M^{\text{ПР}}_{\Sigma} \cdot \omega_{\text{М}} = F_i \cdot v_C \cdot \cos(F_i \,\hat{\cdot}\, v_C)$$

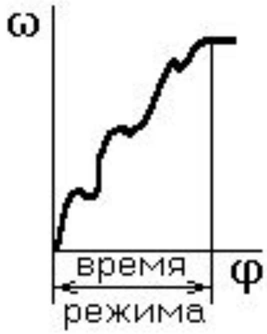
$$M^{\text{ПР}}_{\Sigma} = F_i \cdot v_{qC} \cdot \cos(F_i \,\hat{\cdot}\, v_C)$$

Формула для определения закона движения звена приведения в форме кинетической энергии (определение ωм)

Из выражения (1) получаем, что ωм равна

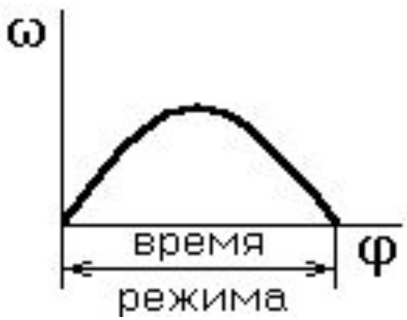
$$\omega_{\text{М}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (A_{\Sigma} + T_{\text{НАЧ}})}{I^{\text{ПР}}_{\Sigma}}}$$

Режимы работы машинного агрегата

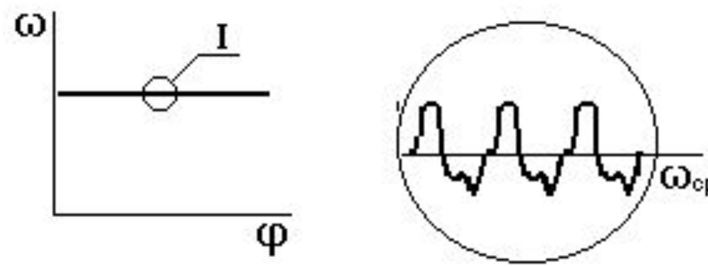


а) *разгон*

б) торможение (выбег)



в) безударный останов



г) движение

а),б),в) – неустановившийся режим;

г) – установившийся режим.

Законы движения звена приведения одномассовой динамической модели

1. Для неустановившегося режима работы машинного агрегата.

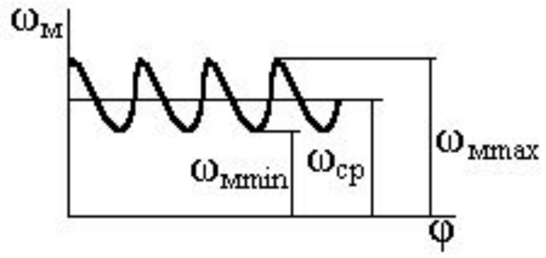
- угловая скорость: $\omega_M = \sqrt{\dfrac{2\cdot(A_\Sigma + T_{НАЧ})}{I_\Sigma^{ПР}}}$

- угловое ускорение: $\varepsilon_M = \dfrac{M_\Sigma^{ПР}}{2\cdot I_\Sigma^{ПР}} - \dfrac{\omega_M^2}{2\cdot I_\Sigma^{ПР}} \cdot \dfrac{d\,I_\Sigma^{ПР}}{d\varphi}$

Время режима определяется по формуле: $t = \int\limits_{\varphi\ нач}^{\varphi\ кон} \dfrac{d\varphi_M}{\omega_M}$

2. Для установившегося режима работы машинного агрегата.

$$\omega_{M\ CP} = \frac{\omega_{M\ max} + \omega_{M\ min}}{2}$$



Отклонения угловой скорости от среднего уровня характер
коэффициентом неравномерности δ:

$$\delta = \frac{\omega_{M\ max} - \omega_{M\ min}}{\omega_{M\ CP}}$$

Законы движения звена приведения одномассовой динамической модели (продолжение)

Для определения угловой скорости $\omega_М = \sqrt{\dfrac{2 \cdot (A_\Sigma + T_{НАЧ})}{I_\Sigma^{ПР}}}$,

где $I_\Sigma^{ПР} = \underbrace{I_I^{ПР}}_{const} + \underbrace{I_{II}^{ПР}}_{var}$

Для удержания колебаний угловой скорости ωм в заданных пределах, первая группа звеньев должна иметь $(I_I^{ПР})_{НЕОБХ}$.

Изменение ωм от ωм_max до ωм_min приводит к изменению кинетической энергии первой группы звеньев (ΔTI), которое равно:

$$(\Delta T_I)_{MAX} = \frac{(I_I^{ПР})_{НЕОБХ} \cdot \omega_{M\,max}^2}{2} - \frac{(I_I^{ПР})_{НЕОБХ} \cdot \omega_{M\,min}^2}{2} =$$

$$= \frac{(I_I^{ПР})_{НЕОБХ}}{2} \cdot (\omega_{M\,max} - \omega_{M\,min}) \cdot (\omega_{M\,max} + \omega_{M\,min})$$

$$\omega_{M\,CP} = \frac{\omega_{M\,max} + \omega_{M\,min}}{2} \qquad \delta = \frac{\omega_{M\,max} - \omega_{M\,min}}{\omega_{M\,CP}}$$

$$(\Delta T_I)_{MAX} = (I_I^{ПР})_{НЕОБХ} \cdot \delta \cdot \omega_{M\,CP}^2$$

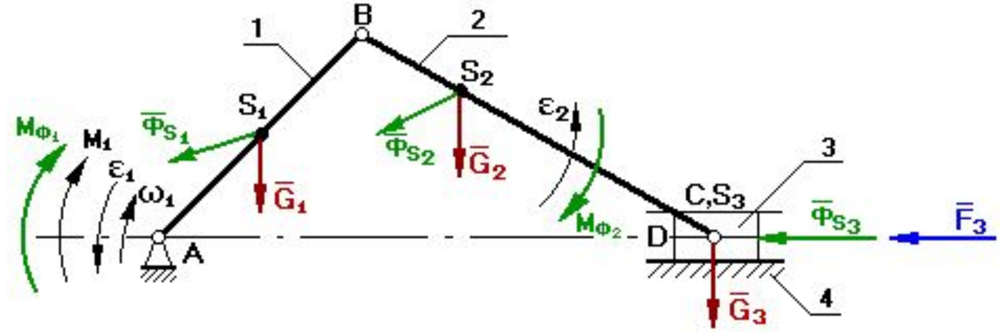
$$(I_I^{ПР})_{НЕОБХ} = \frac{(\Delta T_I)_{MAX}}{\delta \cdot \omega_{M\,CP}^2}$$

$$\omega_{M\,CP} = \frac{\pi \cdot n}{30}; \quad [рад/с]$$

Определение реакций в кинематических парах рычажных механизмов без учета трения

Данная задача может быть решена:

- **аналитическим способом**;
- графическим способом.



Дано:

F_3, G_1, Φ_{S1}, $M_{\Phi 1}$, G_2,

Φ_{S2}, $M_{\Phi 2}$, G_3, Φ_{S3},

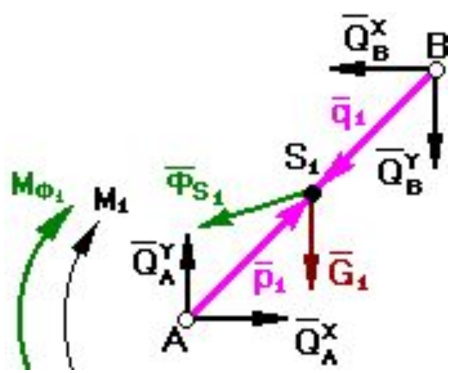
ω_i, ε_i, v_i, a_i.

Определить: M_1 и Q_{ij}.

Звено 1

Шарнир А - входной

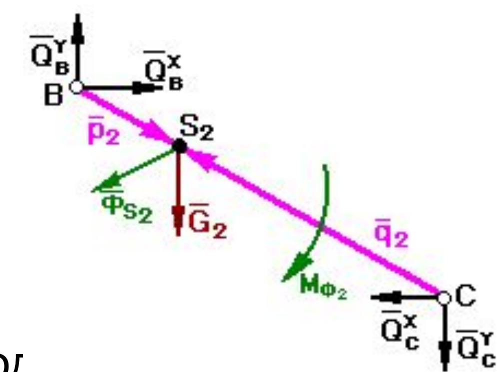
Шарнир В – выходной



Звено 2

Шарнир В - вход

Шарнир С - выходной



Определение реакций в кинематических парах рычажных механизмов без учета трения (продолжение)

Звено 3

При решении задачи используется принцип Даламбера:

$$\overline{\Phi}_{Si} = -m_i \cdot \overline{a}_{Si}$$

$$M_{\Phi i} = -\varepsilon_i \cdot I_{Si}$$

3 звено:

$$Q_C^X = F_3 + \Phi_{S3}$$

$$Q_C^Y + Q_{34} = G_3$$

2 звено:

$$Q_B^X - Q_C^X = \Phi_{S2}^X$$

$$Q_B^Y - Q_C^Y = \Phi_{S2}^Y + G_2$$

$$\overline{Q}_B \times \overline{p}_2 - \overline{Q}_C \times \overline{q}_2 = \overline{M}_{\Phi 2}$$

$$Q_B^X \cdot p_2^Y - Q_B^Y \cdot p_2^X - Q_C^X \cdot q_2^Y + Q_C^Y \cdot q_2^X = M_{\Phi 2}$$

1 звено:

$$Q_A^X - Q_B^X = \Phi_{S1}^X$$

$$Q_A^Y - Q_B^Y = \Phi_{S1}^Y + G_1$$

$$\overline{Q}_A \times \overline{p}_1 - \overline{Q}_B \times \overline{q}_1 - \overline{M}_1 = \overline{M}_{\Phi 1}$$

$$Q_A^X \cdot p_1^Y - Q_A^Y \cdot p_1^X - Q_B^X \cdot q_1^Y + Q_B^Y \cdot q_1^X - M_1 = M_{\Phi 1}$$

Определение реакций в кинематических парах рычажных механизмов без учета трения (продолжение)

O

неизвестные		Q_A^x	Q_A^y	Q_B^x	Q_B^y	Q_C^x	Q_C^y	Q_{34}	M_1		
$F_3+\Phi_{S3}$		0	0	0	0	1	0	0	0		Q_A^x
G_3		0	0	0	0	0	1	1	0		Q_A^y
Φ_{S2}^x		0	0	1	0	-1	0	0	0		Q_B^x
$\Phi_{S2}^y+G_2$	=	0	0	0	1	0	-1	0	0	x	Q_B^y
$M_{\Phi 2}$		0	0	p_2^y	$-p_2^x$	$-q_2^y$	q_2^x	0	0		Q_C^x
Φ_{S1}^x		1	0	-1	0	0	0	0	0		Q_C^y
$\Phi_{S2}^y+G_2$		0	1	0	-1	0	0	0	0		Q_{34}
$M_{\Phi 1}$		p_1^y	$-p_1^x$	$-q_1^y$	q_1^x	0	0	0	-1		M_1

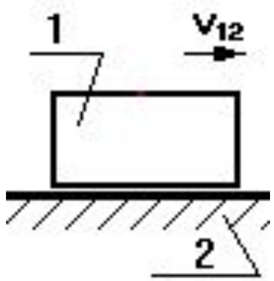
b **A** **x**

Учет трения при определении реакций в кинематических парах

Трение является сложным физико-химическим процессом, сопровождающийся выделением тепла.

Если суммарная высота микронеровностей взаимодействующих поверхностей:

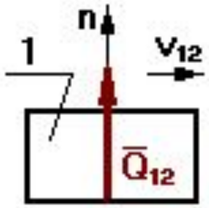
- **больше**, чем высота слоя смазки, то - **сухое** трение.
- **равна** высоте слоя смазки, то - **граничное** трение.
- **меньше**, чем высота слоя смазки, то - **жидкостное**.



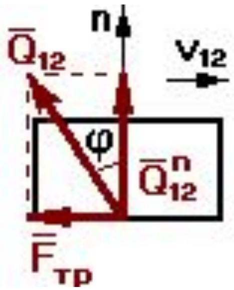
Учет трения в поступательной кинематической паре

При учете трения результирующая реакция Q21 отклоняется от общей нормали на **угол трения ф** в сторону противоположную направлению движения. **Коэффициент трения f** определяется экспериментально и зависит от многих факторов.

без учета трения



с учетом трения



$F_{тр}=Q^{n}_{12} * tg\,\phi$

$tg\,\phi = f$

$F_{тр}=Q^{n}_{12} * f$

Учет трения во вращательной кинематической паре

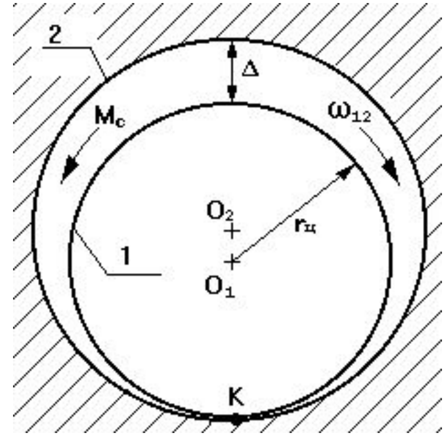
1 - цапфа

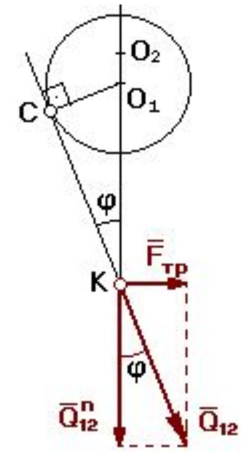
$r_ц$ - радиус цапфы

Δ - зазор

ρ - радиус круга трения;

ρ = O_1C





Из ΔO_1CK □ $\frac{O_1C}{O_1K}$ *= sin ϕ* □ *$O_1C = O_1K \sin\phi$*

$M_c = Q_{12} * O_1C = Q_{12} * r_ц * \sin\phi$

При малых углах *ϕ: sin ϕ ≈ tg ϕ* **=** *f .*

Тогда *:*

$M_c = Q_{12} * r_ц * f$

При учете трения во вращательной КП результирующая реакция отклоняется от общей нормали на угол трения ϕ и проходит касательно к ***кругу трения*** *радиуса ρ.*

Динамический анализ механизмов

Предметом динамики манипулятора как раздела робототехники является математическое описание действующих на манипулятор сил и моментов в форме уравнений динамики движения.

Задачи динамики:

- **прямая задача**: по заданным силам и моментам определить обобщенные ускорения, интегрирование которых позволяет получить значения обобщенных координат и скоростей;
- **обратная задача**: по заданным обобщенным координатам, скоростям и ускорениям определить действующие в сочленениях манипулятора силы и моменты.

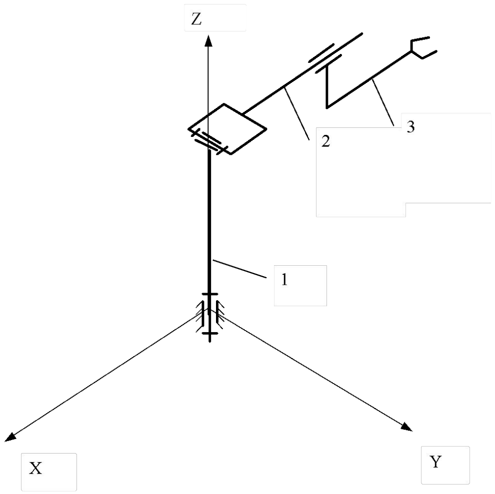
Динамическая модель манипулятора может быть построена на основе использования известных законов ньютоновой или лагранжевой механики.

Уравнения движения реального манипулятора могут быть получены традиционными методами Лагранжа – Эйлера, Ньютона – Эйлера или с помощью принципа Д'Аламбера.

Методы построения динамической модели манипулятора

1. Метод Лагранжа-Эйлера

Уравнения Лагранжа – Эйлера обеспечивают строгое описание динамики состояния манипулятора и могут быть использованы для разработки усовершенствованных **законов управления** в пространстве присоединенных переменных.



2. Метод Ньютона-Эйлера

Уравнения движения представляют собой **систему прямых и обратных рекуррентных уравнений**, последовательно применяемых к звеньям манипулятора.

Для построения **модели динамики переходных процессов** и дальнейшего анализа полученных уравнений необходима аналитическая форма, решено использовать для получения уравнений динамики **метод Лагранжа – Эйлера.**

Уравнения динамики манипулятора

Уравнения Лагранжа второго рода для голономной системы с *n* степенями свободы, которым отвечают обобщенные координаты q_i (*j* = 1,2,…,*n*)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=Q_{j\text{д}} \quad (j = 1,2,\ldots,n), \qquad (1)$$

где $L=\left(T-\Pi\right)$– функция Лагранжа, разности кинетической *T* и потенциальной *П* энергий системы.

Учитывая, что $L=T-\Pi$ и $\partial\Pi/\partial\dot{q}_j=0$, перепишем уравнение (1) в виде:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j \qquad (2)$$

Учёт внешнего воздействия – силы $F_\text{в}$, приложенной к захватному устройству:

$$Q_j=Q_{j\text{д}}+Q_{j\text{в}}+Q_{jF} \qquad (3)$$

Известно, что

$$T=\sum_{i=1}^{n}T_i \qquad (4)$$

Уравнения динамики манипулятора (продолжение)

Определим T_i по формуле:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i v_{0i}^2 + m_i \left(\mathbf{v}_{0i} \times \boldsymbol{\varpi}_i \right) \cdot \mathbf{r}_{i\text{ц}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varpi}_i^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\Theta}_{0i} \cdot \boldsymbol{\varpi}_i \qquad (5)$$

Если за полюс звена принять его центр инерции, величина $r_{i\text{ц}}$ будет равна нулю и выражение (5) упростится:

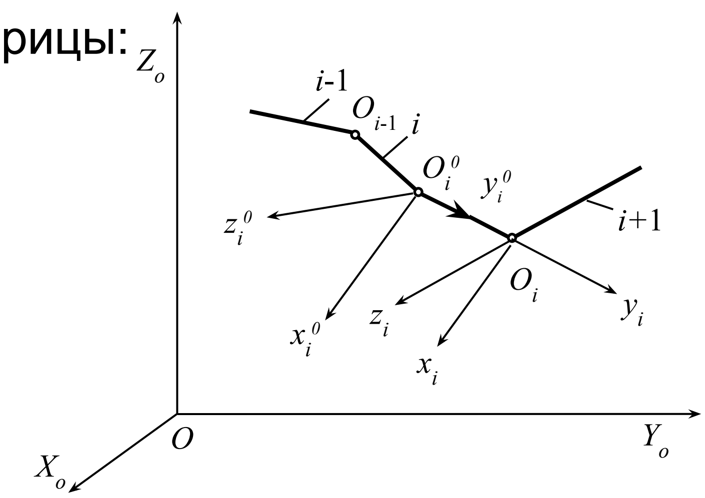
$$T_i = \frac{1}{2} m_i v_{0i}^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varpi}_i^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\Theta}_{0i} \cdot \boldsymbol{\varpi}_i \qquad (6)$$

Тензор вектора O_i^0 имеет вид диагональной матрицы:

$$\boldsymbol{\Theta}_{O_i}^0 = \begin{bmatrix} J_{x_i} & 0 & 0 \\ 0 & J_{y_i} & 0 \\ 0 & 0 & J_{z_i} \end{bmatrix}$$

моменты инерции относительно осей в которой определяются выражениями:

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \iiint \left(y_i^2 + z_i^2 \right) dm_i \\ J_y &= \iiint \left(x_i^2 + z_i^2 \right) dm_i \\ J_z &= \iiint \left(x_i^2 + y_i^2 \right) dm_i \end{aligned} \right\}$$



Связанные системы координат с началом в центре кинематической пары $\left(O_i x_i y_i z_i\right)$ и в центре инерции $\left(O_i^0 x_i^0 y_i^0 z_i^0\right)$

Уравнения динамики манипулятора (продолжение)

Определим вектор скорости центра инерции звена *i* через проекции на оси связанной с ним системы координат:

$$\mathbf{v}_{i\text{ц}} = \left(v_{ix\text{ц}}, v_{iy\text{ц}}, v_{iz\text{ц}}\right)^{\text{T}}$$

Вектор скорости через проекции на оси неподвижной системы осей:

$$\mathbf{v}_{0i\text{ц}} = \left(v_{0ix\text{ц}}, v_{0iy\text{ц}}, v_{0iz\text{ц}}\right)^{\text{T}}$$

По аналогии с $v_{i\text{ц}}$ введем вектор угловой скорости звена:

$$\varpi_i = \left(\varpi_{ix}, \varpi v_{iy}, \varpi_{iz}\right)^{\text{T}}$$

Запишем уравнение (6) в развернутой форме:

$$T_i = 0{,}5 m_i \left(v_{ix\text{ц}}^2 + v_{iy\text{ц}}^2 + v_{iz\text{ц}}^2\right) + 0{,}5\left(J_{xi}\varpi_{ix}^2 + J_{yi}\varpi_{iy}^2 + J_{zi}\varpi_{iz}^2\right) \quad (7)$$

С учётом уравнения (4) получим:

$$T_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[m_i\left(v_{0ix\text{ц}}^2 + v_{0iy\text{ц}}^2 + v_{0iz\text{ц}}^2\right) + \left(J_{x_i}\varpi_{ix}^2 + J_{y_i}\varpi_{iy}^2 + J_{z_i}\varpi_{iz}^2\right)\right] \quad (8)$$

Заключение

При решении задач динамики необходимо построить **динамическую модель** многозвенного механизма (манипулятора).

В качестве динамической характеристики выбирают **кинетическую энергию** механизма.

Динамический анализ заключается в исследовании движения механизма под действием движущих сил.

Прямая и обратная задачи динамики:

- **Прямая задача** состоит в том, чтобы по заданным силам и моментам определить обобщенные ускорения, интегрирование которых позволяет получить значения обобщенных координат и скоростей.
- **Обратная задача** динамики заключается в том, чтобы по заданным обобщенным координатам, скоростям и ускорениям определить действующие в сочленениях манипулятора силы и моменты.

На этапе **динамического синтеза** решается задача выбора параметров динамической схемы механизма: масс, их расположения, жесткостей звеньев.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ