Лекция №4

поверхности

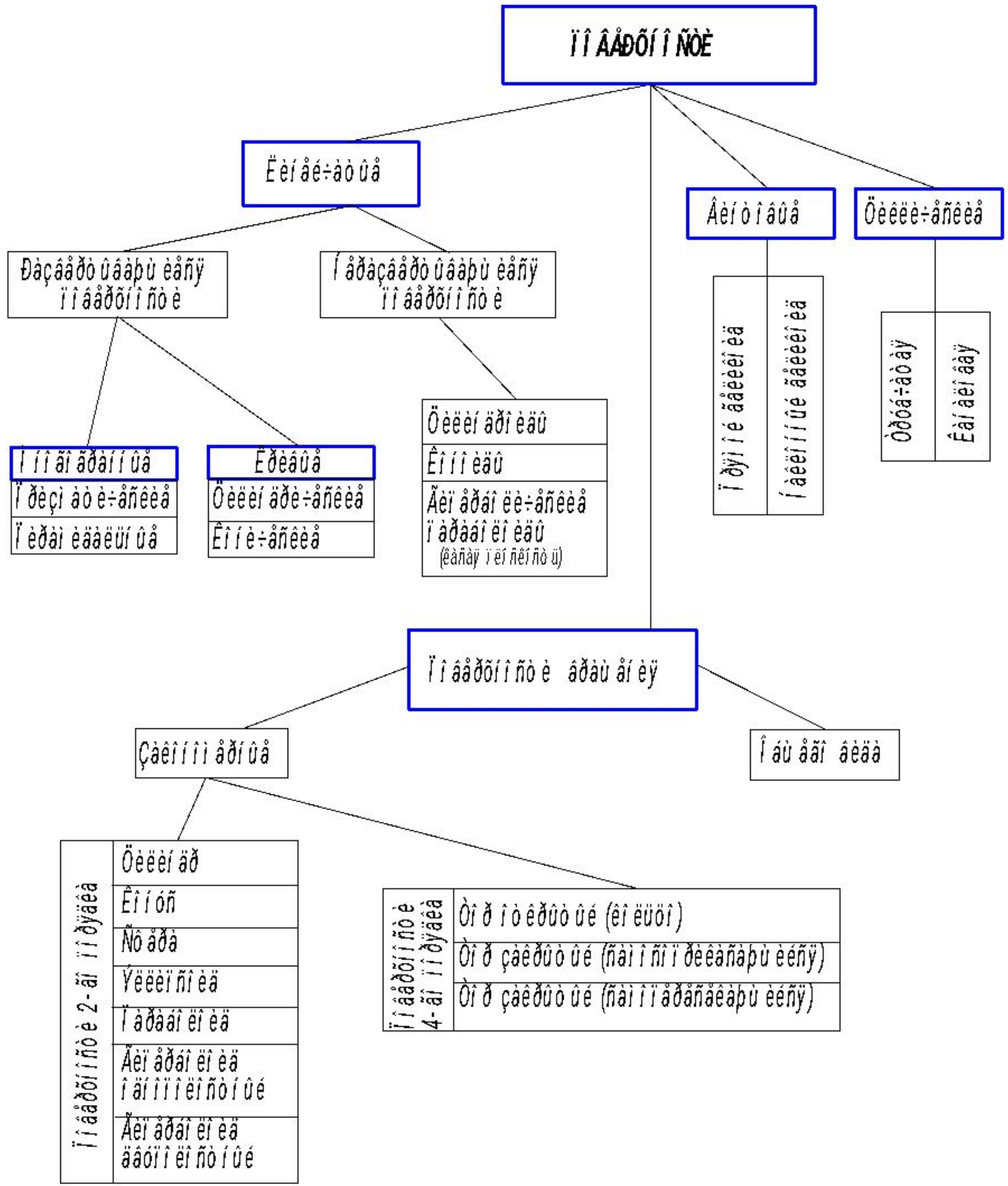
В начертательной геометрии поверхность задают кинематически - как множество всех положений перемещающейся по определенному закону линии в пространстве. Эта линия называется **образующей - *l*.** Как правило, она скользит по некоторой неподвижной линии, называемой **направляющей - *m***, направляющих может быть одна или несколько.

Образующая *l* , скользя по неподвижной направляющей *m*, создает плотную сеть линий. Такое упорядоченное множество линий поверхности называется ее каркасом:

- Каркасы бывают **непрерывными** – поверхность задана всем множеством образующих, или **дискретными**, когда имеется конечное число образующих.
- При построении дискретного каркаса поверхности необходимо учитывать закон каркаса.
- Закон каркаса - это закон движения образующей.

Определитель поверхности

Классификация поверхностей

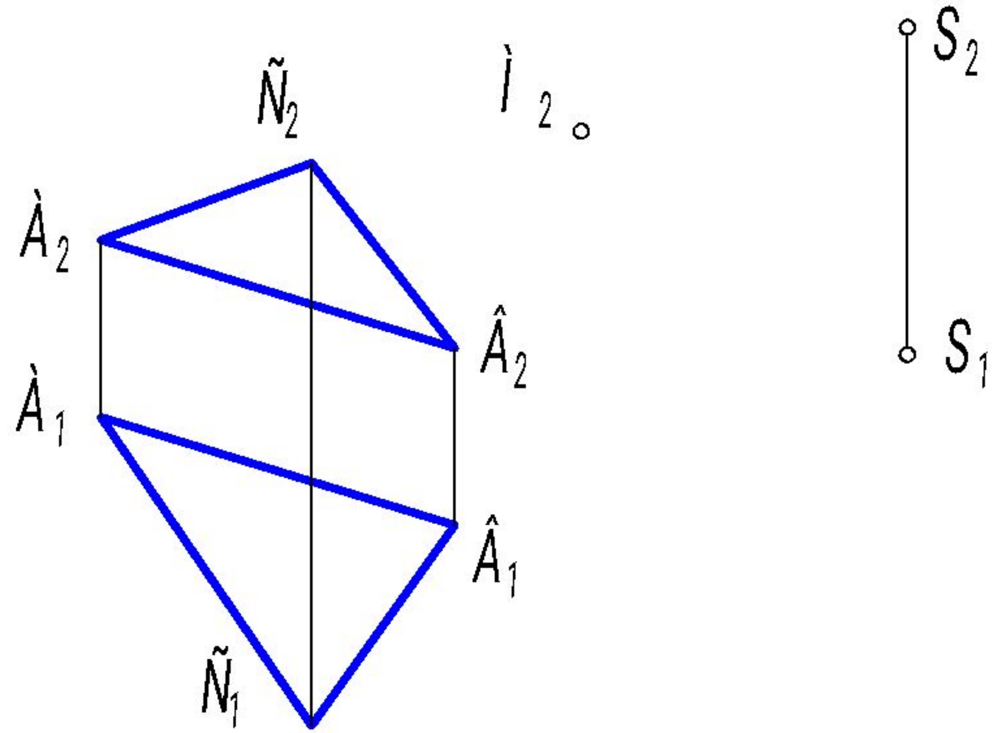


Поверхность считается графически заданной на комплексном чертеже, если можно построить точку на поверхности.

- Точка принадлежит поверхности, если она принадлежит линии, лежащей на поверхности. Так какую линию лучше выбрать для построения точки на поверхности? Для линейчатых поверхностей выбирают образующую. Для других поверхностей выбирают графически простые линии, к которым относят прямую и окружность.

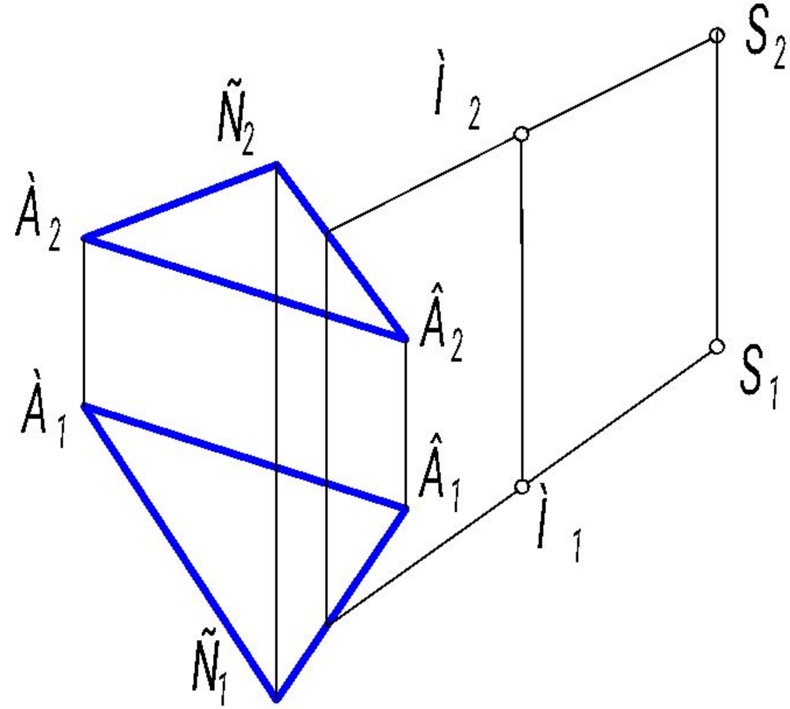
Рассмотрим пример задания треугольной призмы проекциями геометрической части определителя *Σ*

(ABC,S)



Поверхность действительно задана, т.к. можно построить недостающую проекцию точки *M(M₁)*, т.е. чертеж обратим, но не является наглядным. Следовательно, необходимо дополнить чертеж

поверхности ее очертаниями



Поэтому конструировать поверхности мы будем с помощью построения дискретного каркаса, проекции которого обеспечат обратимость и наглядность чертежа поверхности.

Сконструировать поверхность - это значит построить проекции поверхности, состоящие из проекций определителя и проекций характерных линий, к которым относятся **линии контура и линии обреза.**

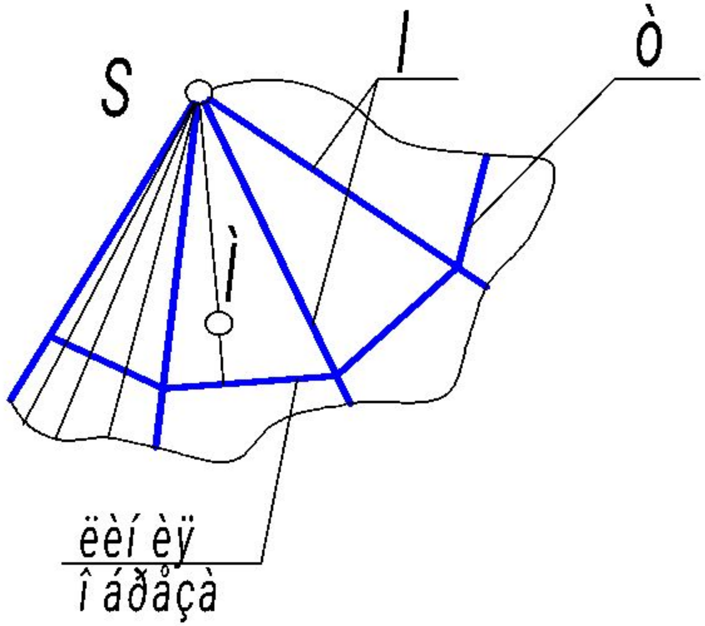
Алгоритм (последовательность построения чертежа любой поверхности):

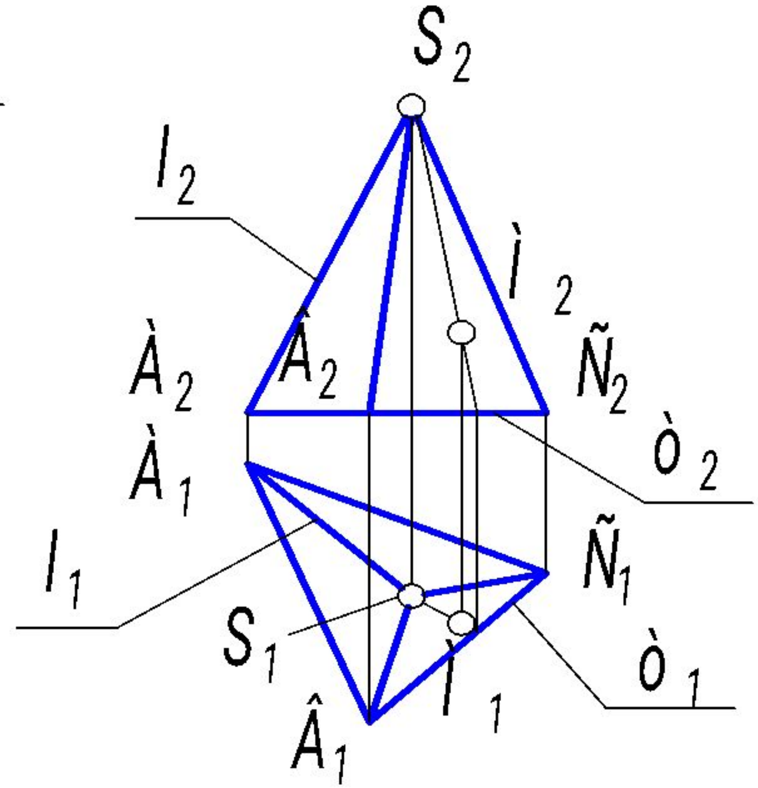
1. Задать проекции элементов определителя (будем иметь в виду задание проекций геометрической части определителя).
2. Построить проекции дискретного каркаса, состоящего из конечного числа графически простых линий.
3. Построить проекции линии обреза, которые для образования поверхности существенной роли не играют, они лишь ограничивают, обрезают поверхность.
4. Определить видимость проекций поверхности.
5. Обвести видимые линии проекций поверхности сплошной толстой линией.

Задание линейчатых поверхностей на комплексном чертеже

- Развертывающиеся поверхности
- Многогранные поверхности

Многогранники - геометрические тела, поверхность которых состоит из отсеков плоскостей, ограниченных многоугольниками.





Комплексный чертеж пирамидальной поверхности

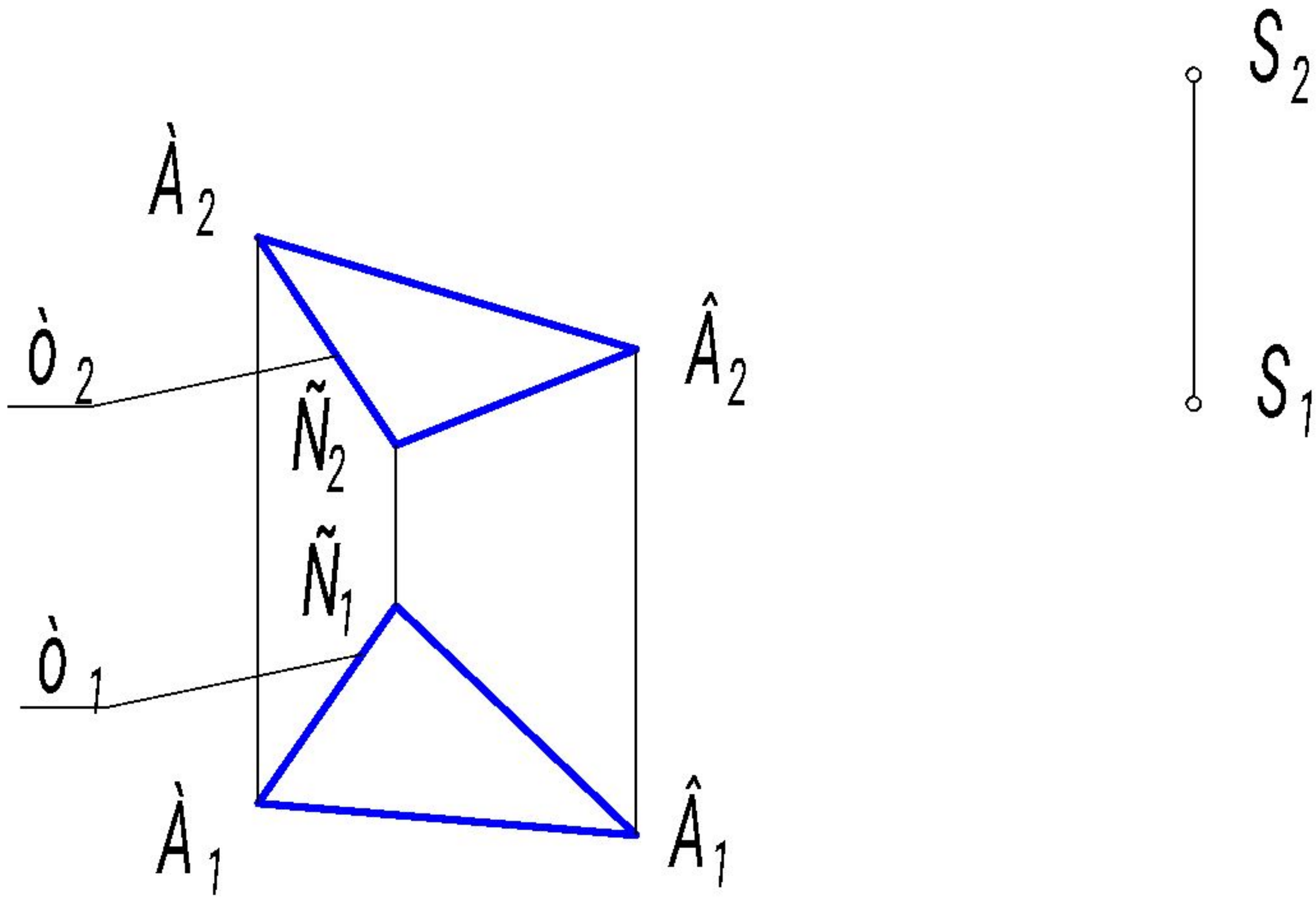
Пирамидальная поверхность образуется в результате перемещения прямолинейной образующей (*l*) по ломаной направляющей (*m*), в каждый момент движения проходя через некоторую фиксированную точку - *S* (вершину).

Определитель поверхности: Ф (m, S) - геометрическая часть $l \in m(ABC)$, $S \subset l$ - алгоритмическая часть или закон каркаса

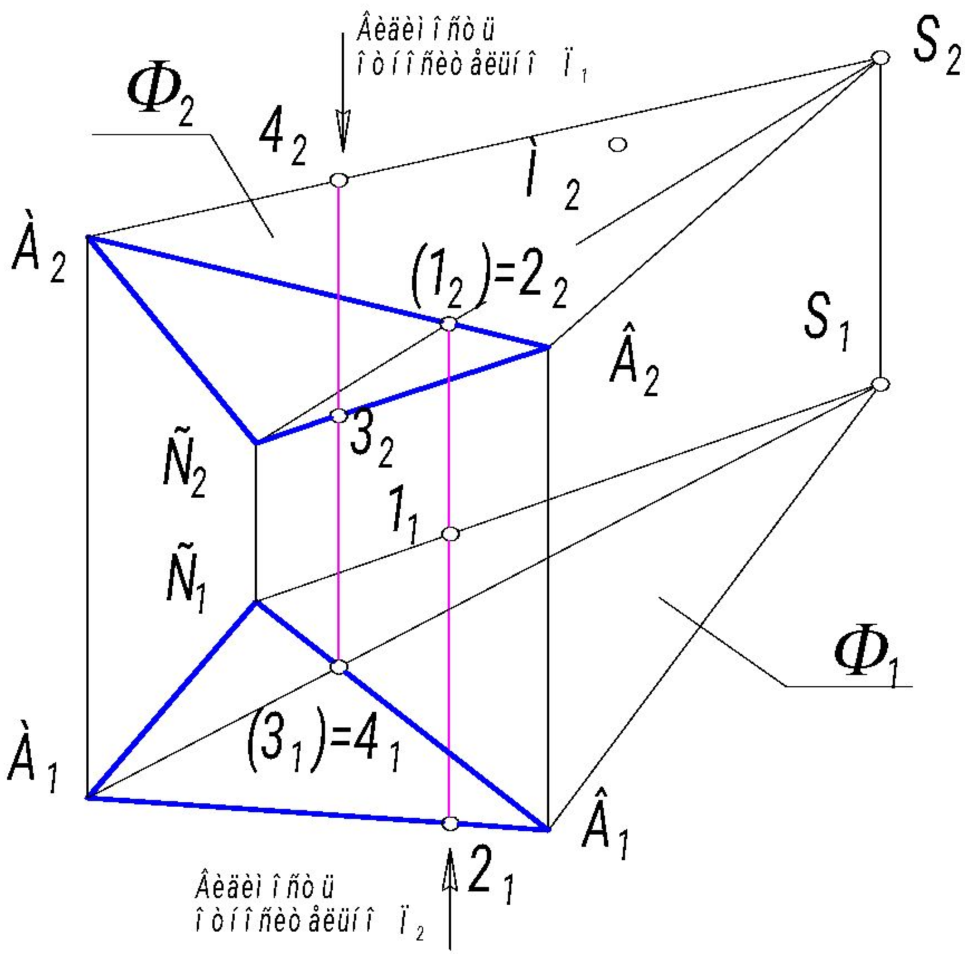
Задача: сконструировать пирамидальную поверхность Φ с дискретным каркасом из трех образующих $M(M_2) \in \Phi$, $M_1 = ?$

Алгоритм построения

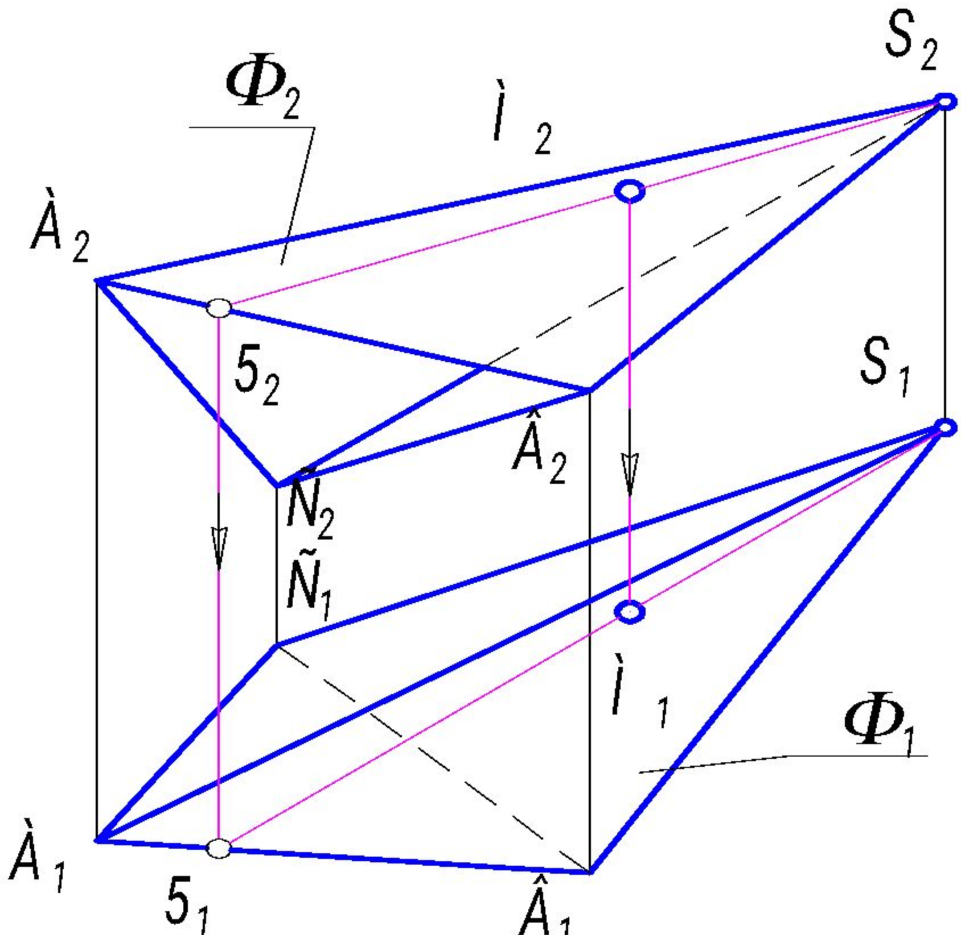
1. Задать проекции элементов определителя



2. Построить проекции поверхности (дискретный каркас) - это значит провести три образующие, соединив точки *A,B,C* с точкой *S*.



4. Определить видимость поверхности (ребер и направляющей ломаной относительно друг друга методом конкурирующих точек).

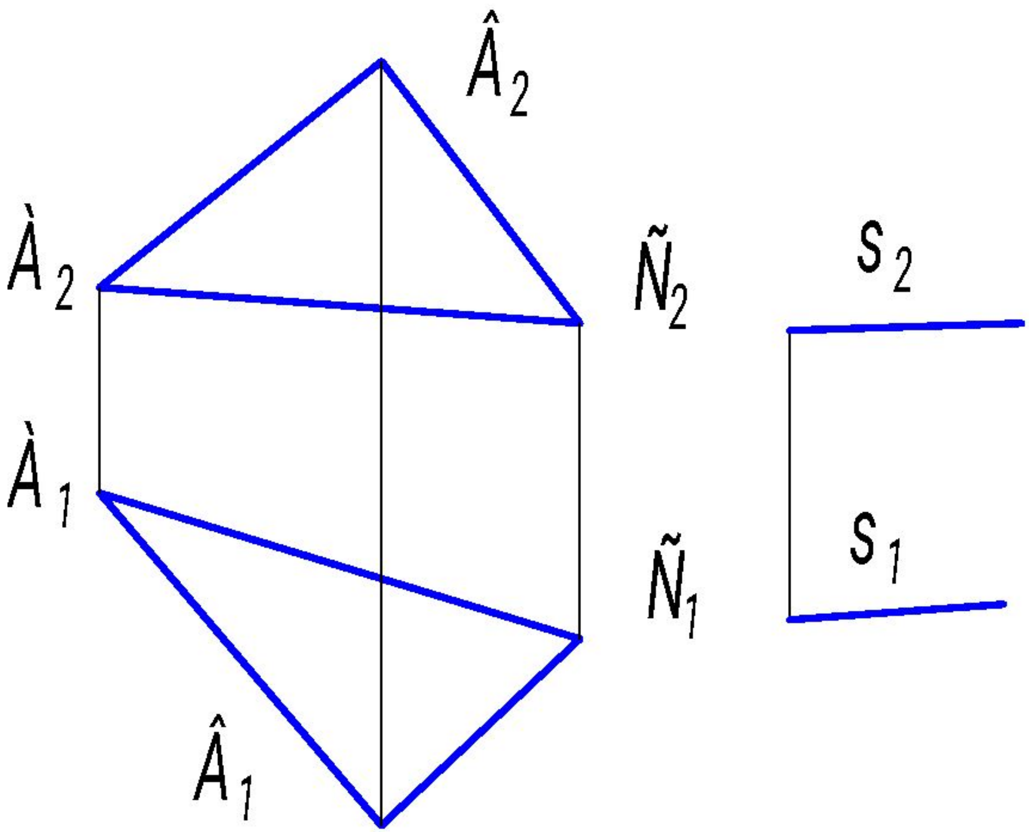


Комплексный чертеж призматической поверхности

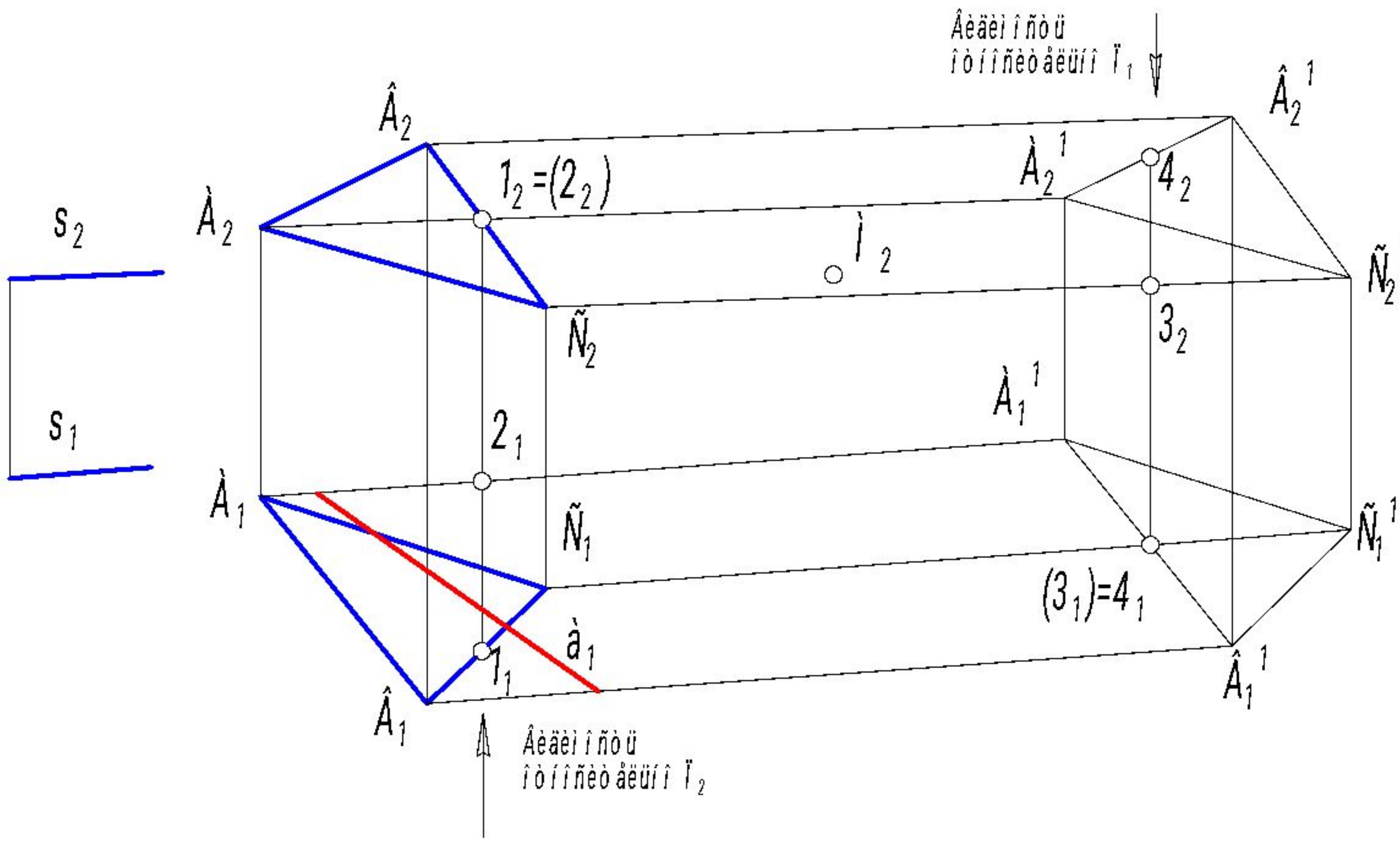
- Призматическая поверхность образуется перемещением прямолинейной образующей (l) по ломаной направляющей (m), при этом всегда оставаясь параллельной некоторому направлению (s)
- **Задача**: сконструировать призматическую поверхность Φ с дискретным каркасом из трех образующих, $M(M_2)$, $a(a_1) \in \Phi$, M_1, a_2 =? Определитель поверхности: $\Phi(m,s)$; $l \cap ABC$, $l \parallel S$

Алгоритм построения

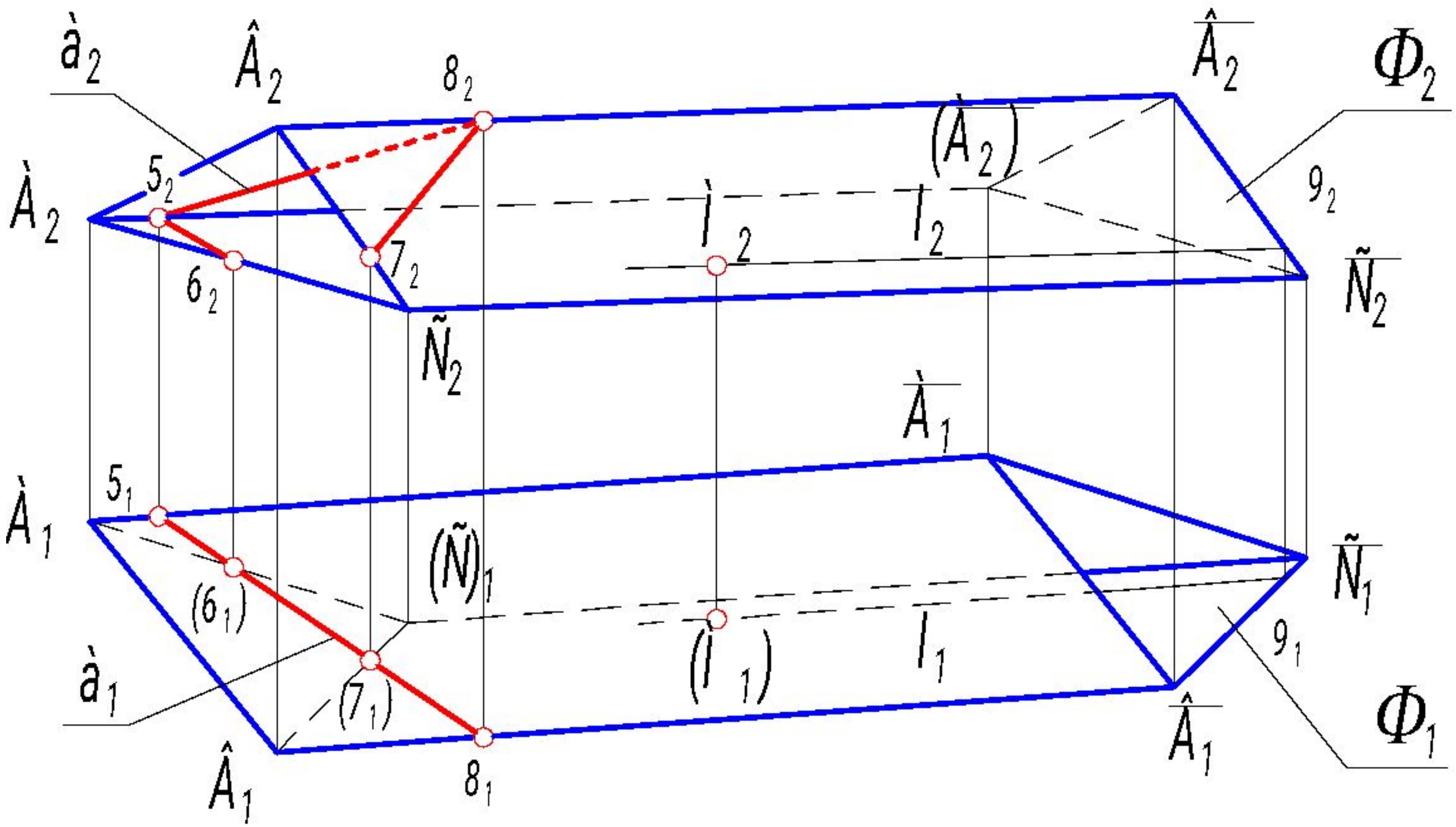
1. Задать проекции элементов определителя .



2. Построить проекции поверхности. Длины ребер возьмем одинаковыми: а) Провести фронтальные проекции образующих из точек $A_2B_2C_2 \parallel s_2$, отложить на них отрезки одинаковой длины, б) Провести горизонтальные проекции образующих из точек $A_1B_1C_1 \parallel s_1$;



4.Определить видимость поверхности.5. ломаную линию *a* строят по принадлежности ее звеньев соответствующим граням.



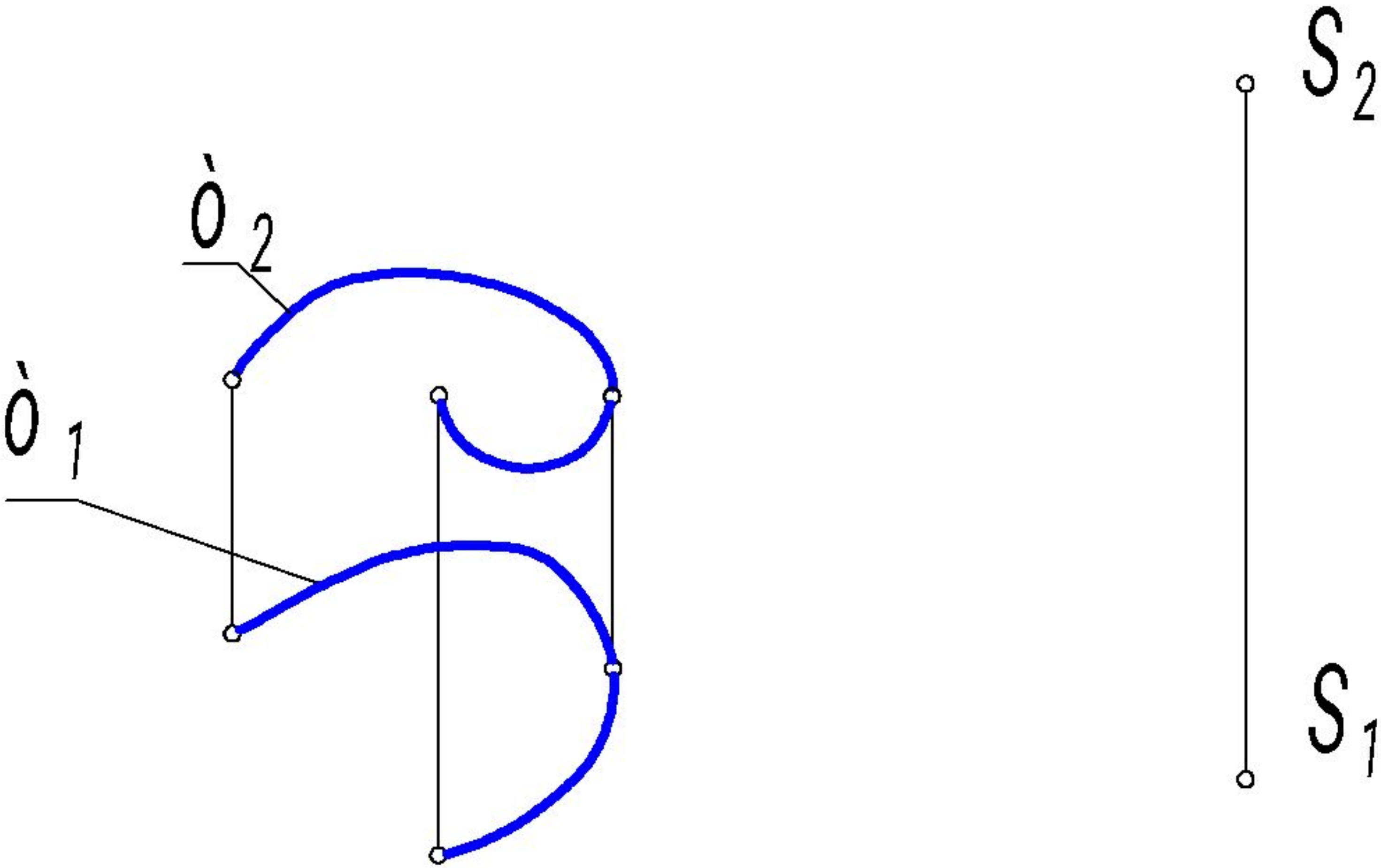
Задание конической поверхности общего вида на комплексном чертеже

- Коническая поверхность образуется перемещением прямолинейной образующей (*l*) по кривой направляющей (*m*), в каждый момент движения проходя через некоторую фиксированную точку (*s*).

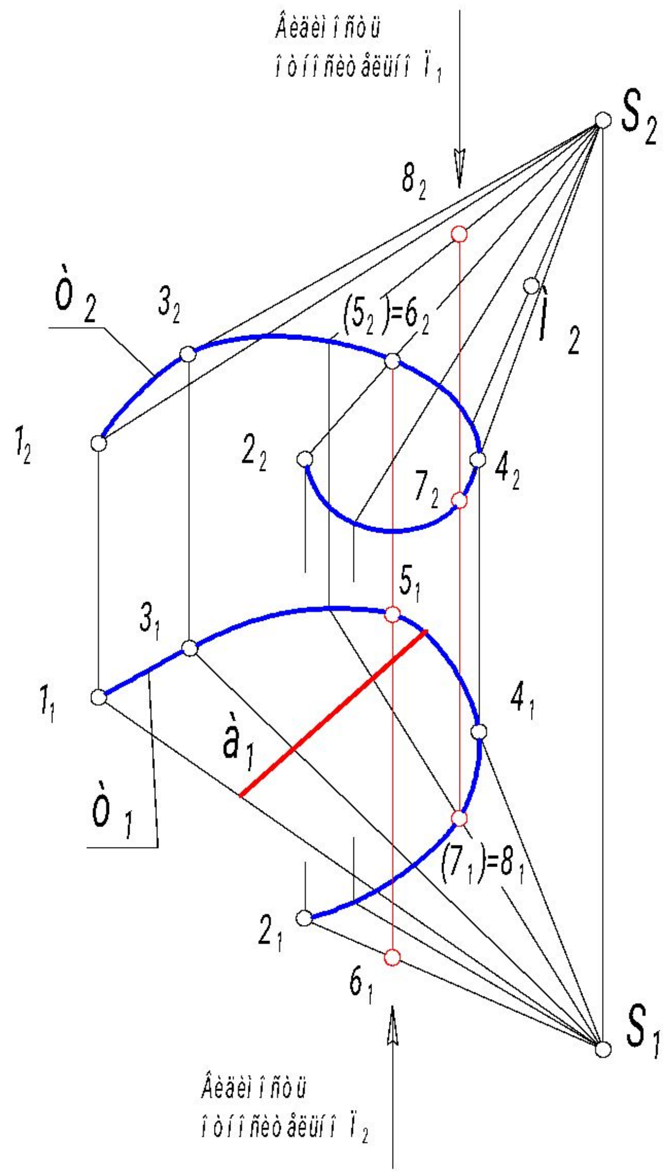
Задача: сконструировать коническую поверхность общего вида Φ; $M(M_2)$, $a(a_1) \subset \Phi$, M_1, a_2 =?
Определитель поверхности: $\Phi(m, S)$; $l \cap m$, $l \supset S$

Алгоритм решения:

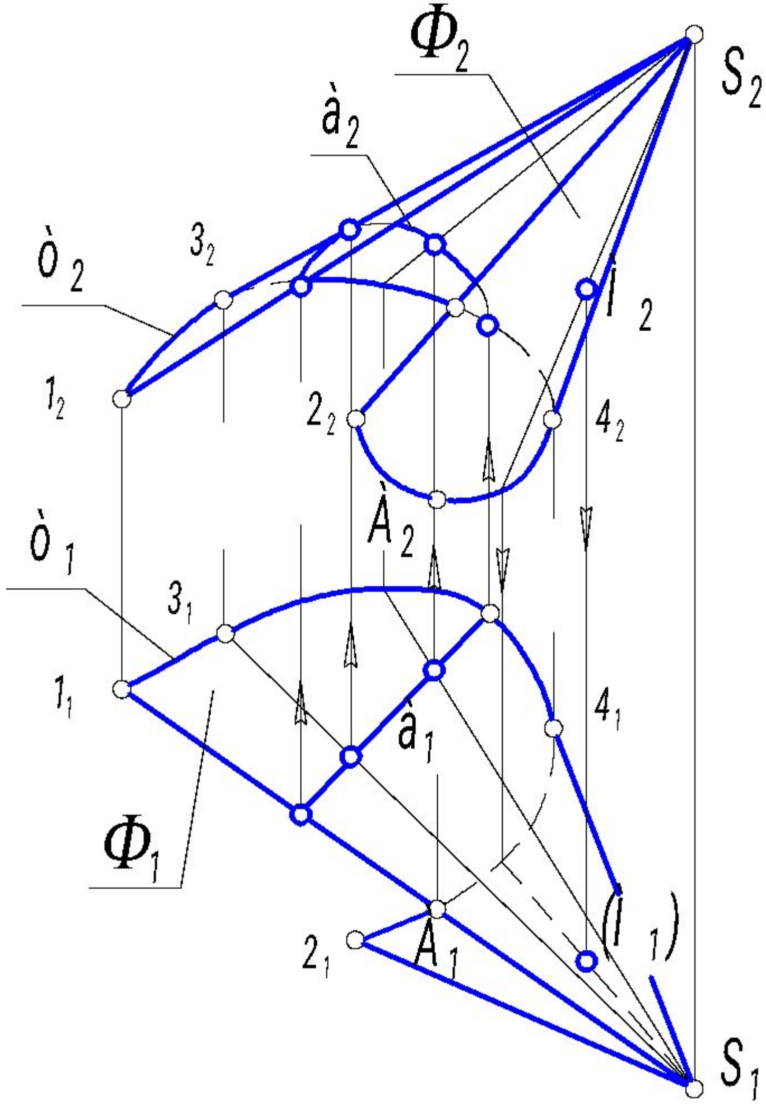
1. Задать проекции элементов определителя:


ò 2
ò 1
S 2
S 1

2. Построить дискретный каркас из 6 образующих на *П₁* и *П₂*



3. Определить видимость:

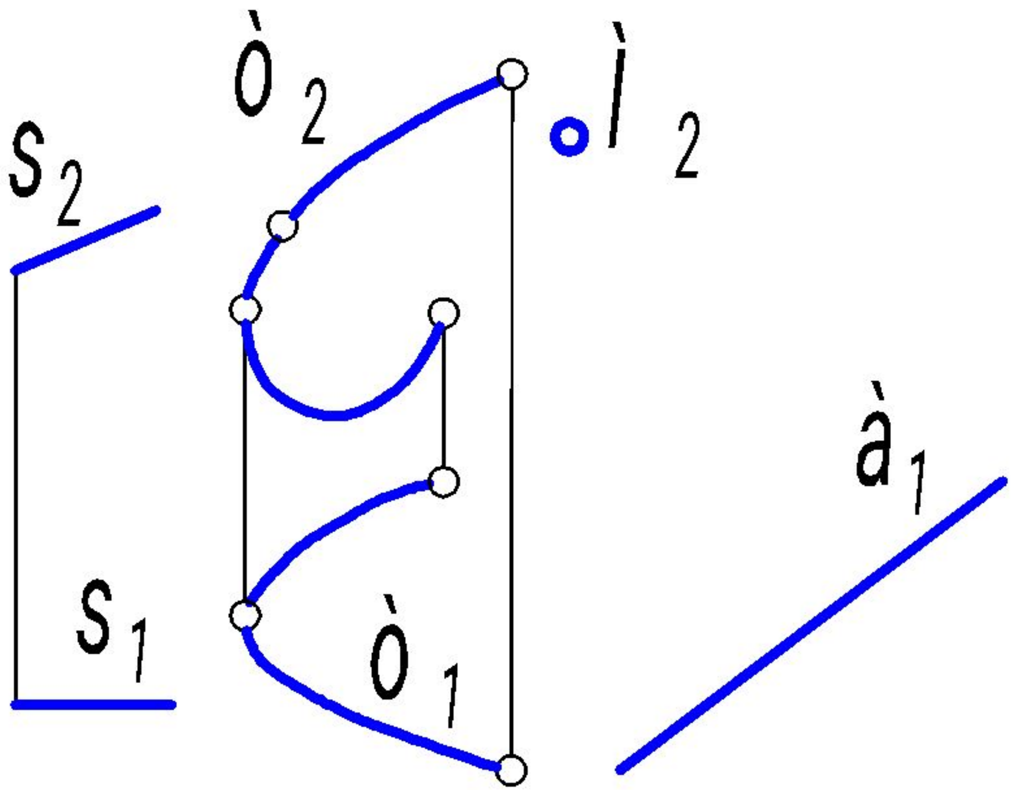


Задание цилиндрической поверхности общего вида на комплексном чертеже

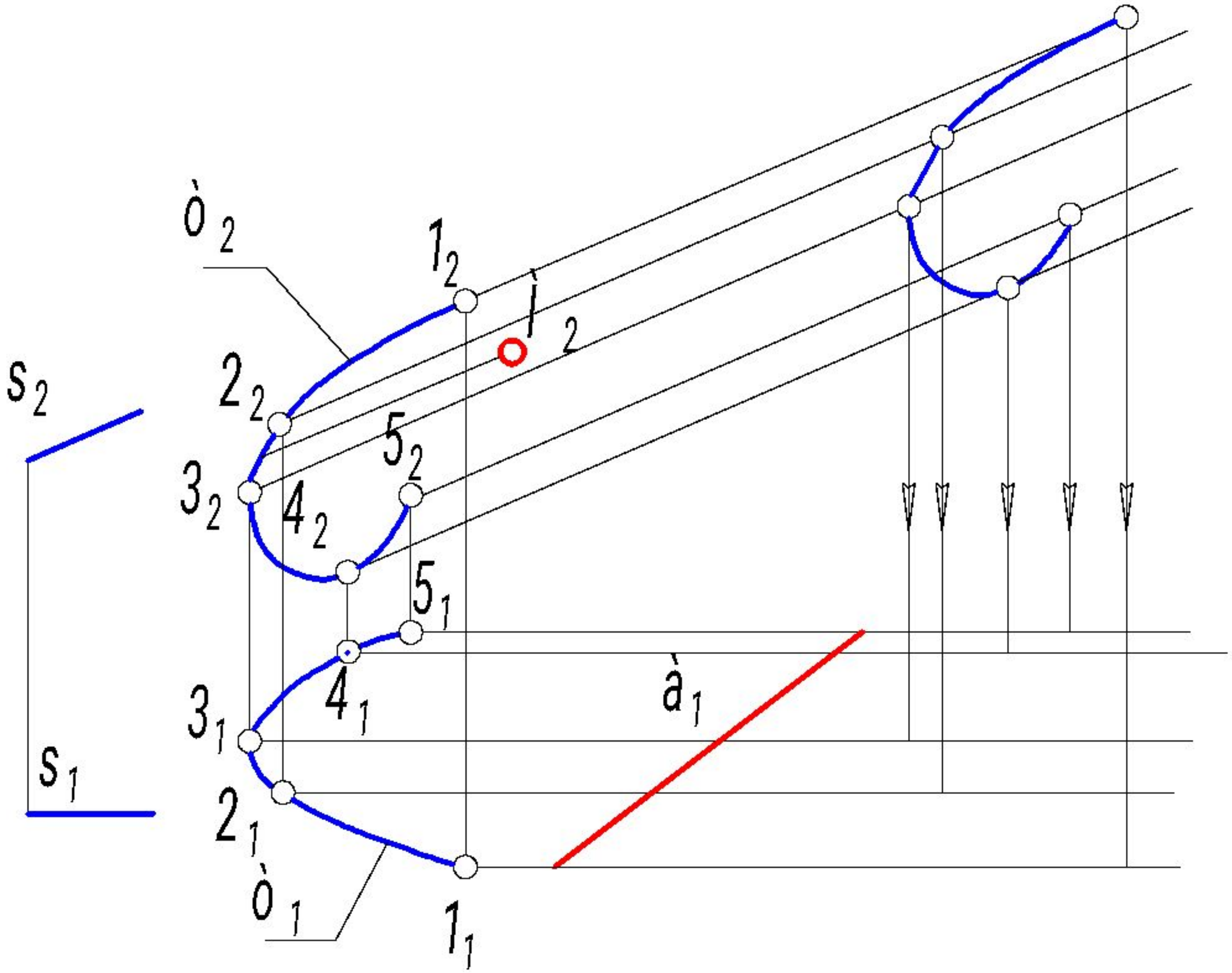
- Цилиндрическая поверхность образуется перемещением прямолинейной образующей (*l*) по кривой направляющей (*m*), в каждый момент движения оставаясь параллельной заданному направлению (*s*).
- **Задача**: сконструировать цилиндрическую поверхность общего вида Θ, $M(M_2)$, $a(a_1) \subset \Phi$, $M1$, a_2 =?
- Определитель поверхности: $\Theta\ (m, s);\ l \cap m,\ l \parallel s$

Алгоритм:

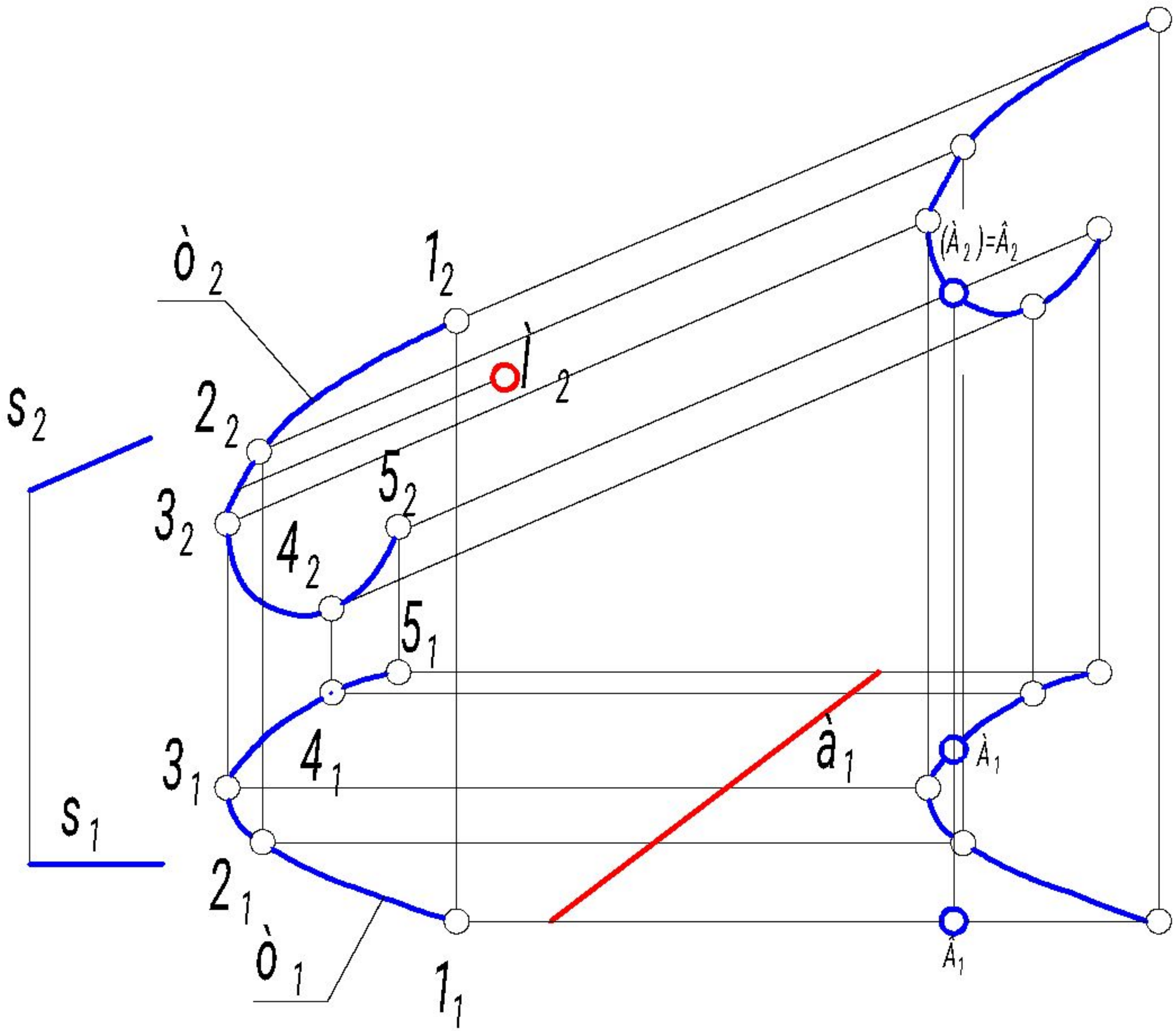
1. Задать проекции элементов определителя: *Θ(m, s)*



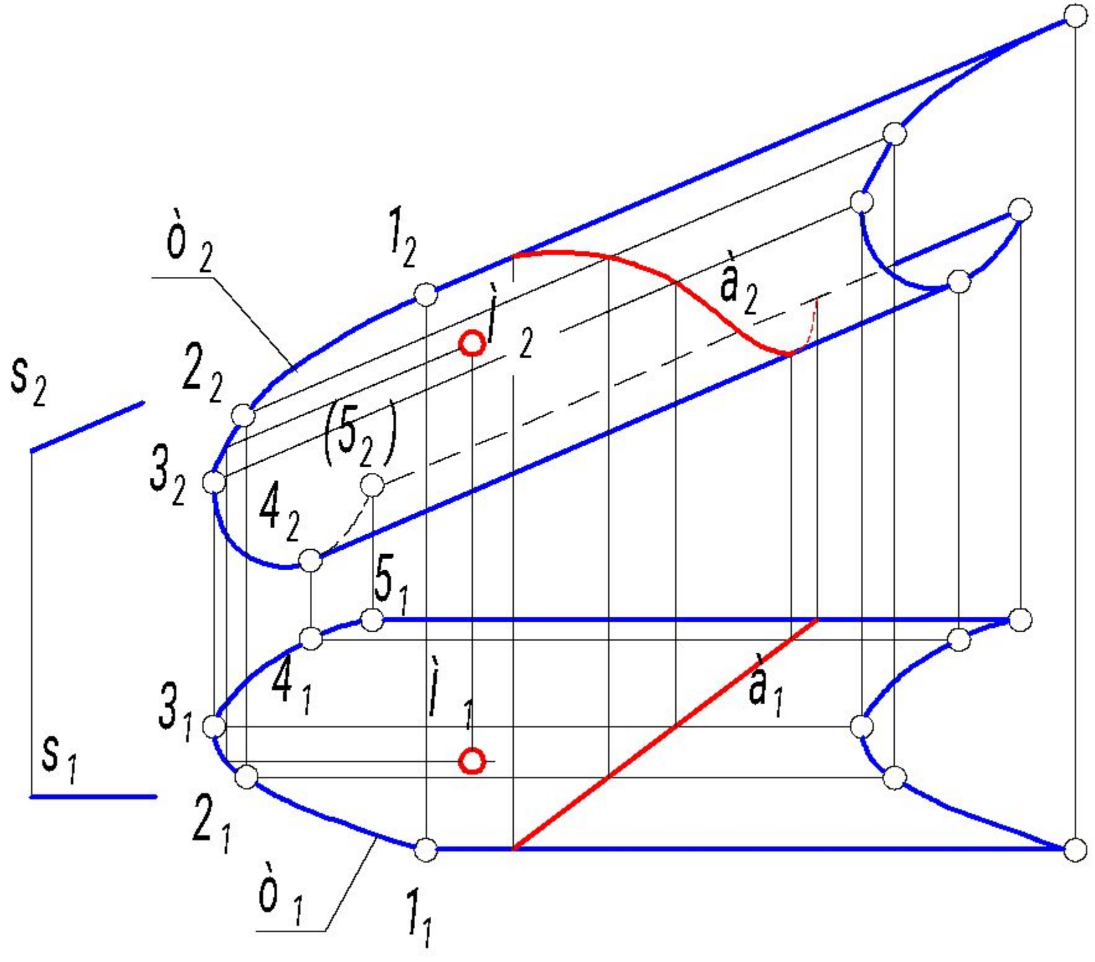
2. Построить две проекции дискретного каркаса поверхности из пяти образующих.



3. Построить горизонтальную проекцию линии обреза, определить видимость поверхности



4. Обвести поверхность с учетом видимости. 5.Построить *M1*

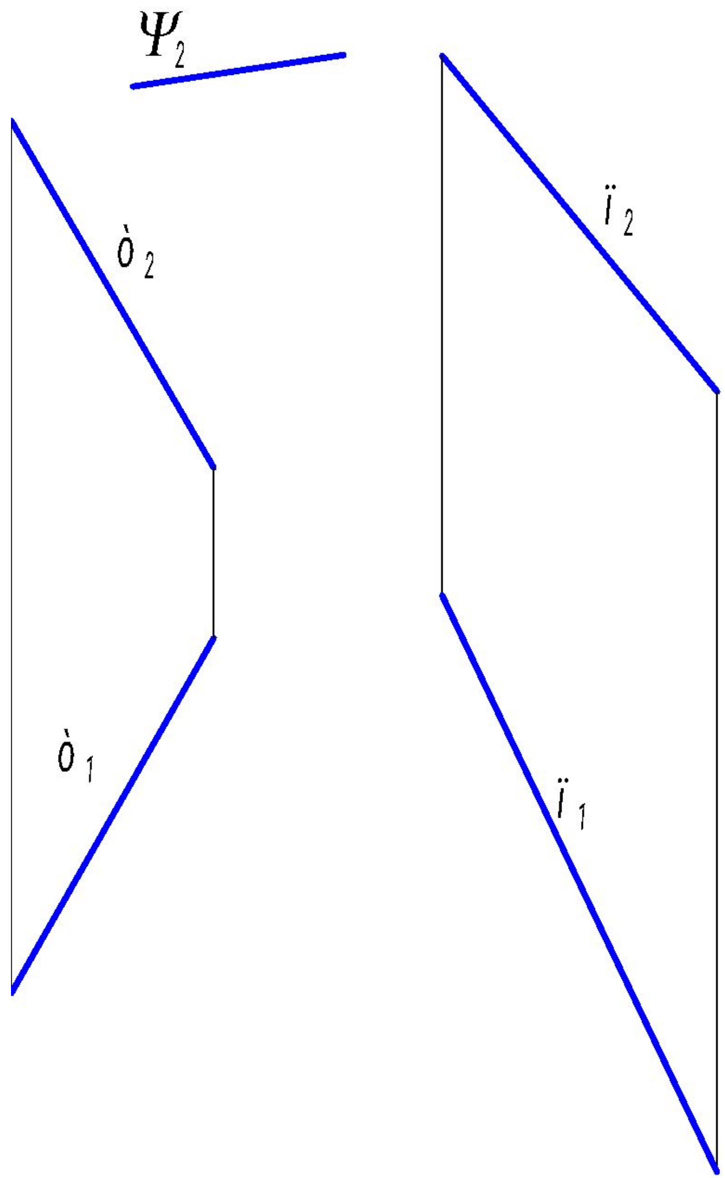


Неразвертывающиеся линейчатые поверхности с двумя направляющими

- К ним относятся поверхности с плоскостью параллелизма (поверхности Каталана).
- Линейчатые поверхности с двумя направляющими (*m, n*) - у которых образующая прямая линия (*l*) в каждый момент движения, пересекая направляющие, остается параллельной некоторой неподвижной плоскости, называемой плоскостью параллелизма.

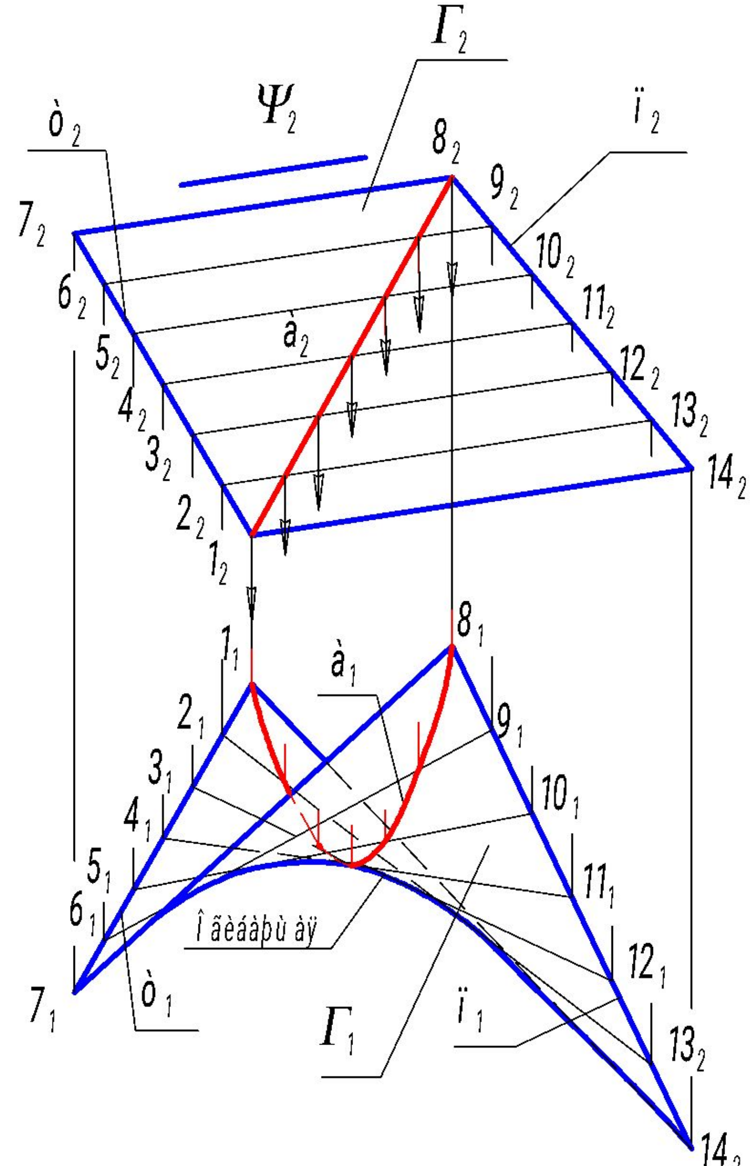
Гиперболический параболоид *Г (m, n, Ψ) a(a2)* $\in$ *Г, a1 = ?*

Закон каркаса: *l* $\cap$ *m. l* $\cap$ *n. l* || *Ψ*



Алгоритм:

Задать проекции элементов определителя *m(m1, m2); n(n1, n2)*.



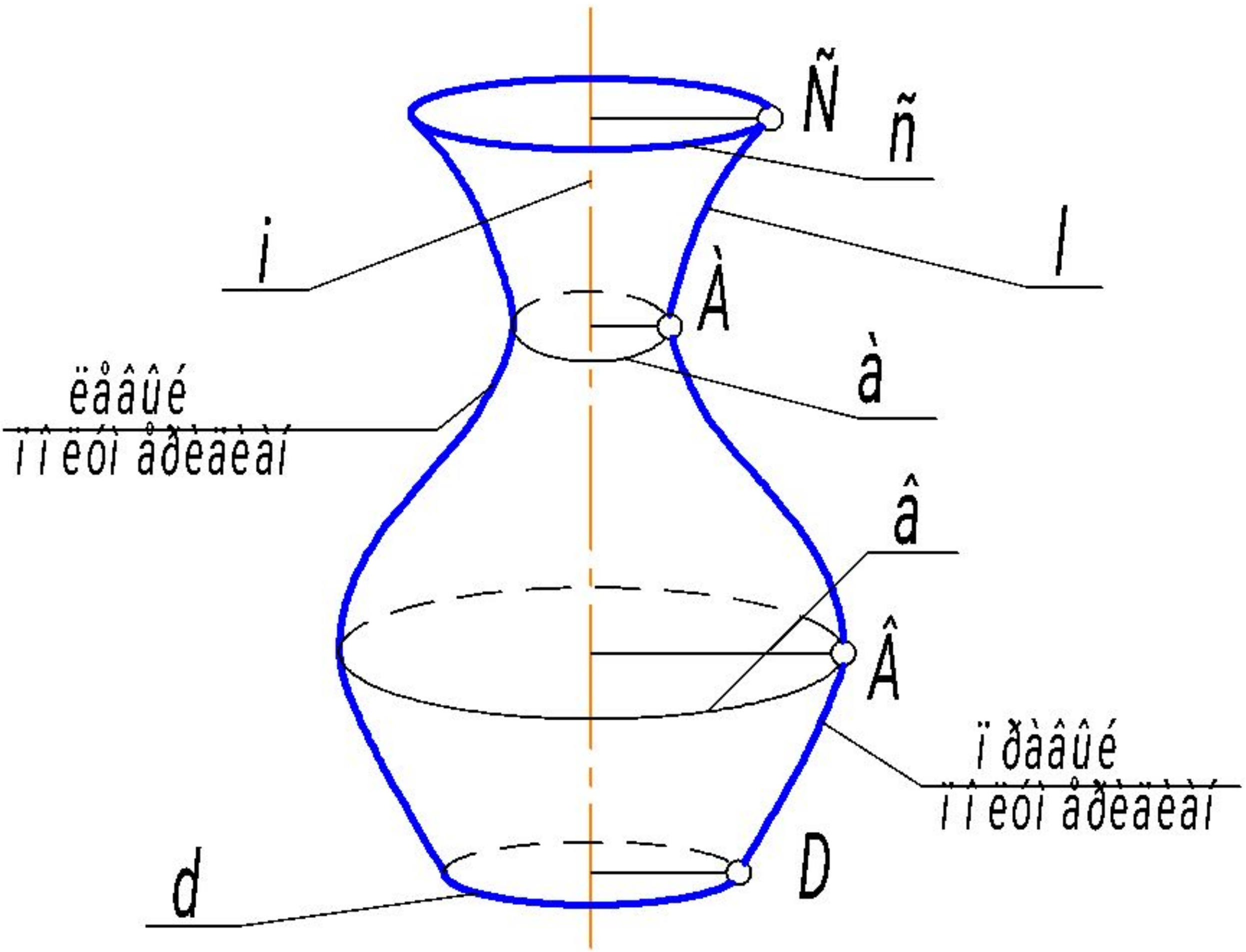
Поверхности вращения

- Поверхность вращения образует какая - либо линия - образующая (*l*) при ее вращении вокруг неподвижной оси (*i*).
- Образующая (*l*) может быть как прямая, так и кривая линия - плоская или пространственная.

Свойства поверхности вращения:

- Каждая точка образующей (*l*) при вращении вокруг оси опишет окружность с центром на оси, плоскость которой перпендикулярна оси. Эти окружности называются **параллелями**. Все параллели параллельны между собой.
- Самая большая параллель называется экваториальной (экватор) (см. рис.)- точка (*B*) максимально удалена от оси; самая малая параллель называется горловой (горло), у некоторых поверхностей вращения отмечают верхнюю (*C*) и нижнюю (*D*) параллели (часто они являются линиями обреза поверхности).
- Линии, которые получаются в сечении поверхности вращения плоскостями, проходящими через ось, называются **меридианами**. Все меридианы равны между собой. Каждый меридиан рассекается этой плоскостью на два полумеридиана (правый и левый).

При изображении поверхности вращения на комплексном чертеже обычно поверхность располагают так, чтобы ее ось была перпендикулярна к плоскости проекций. (например, *i* ⊥ *П1*)



l - î áðàçóþù àÿ

i - î ñü âðàù åí èÿ

ñ - âåðõí ÿÿ ï àðàëëåëü

à - ãî ðëî

â - ýêâàòî ð

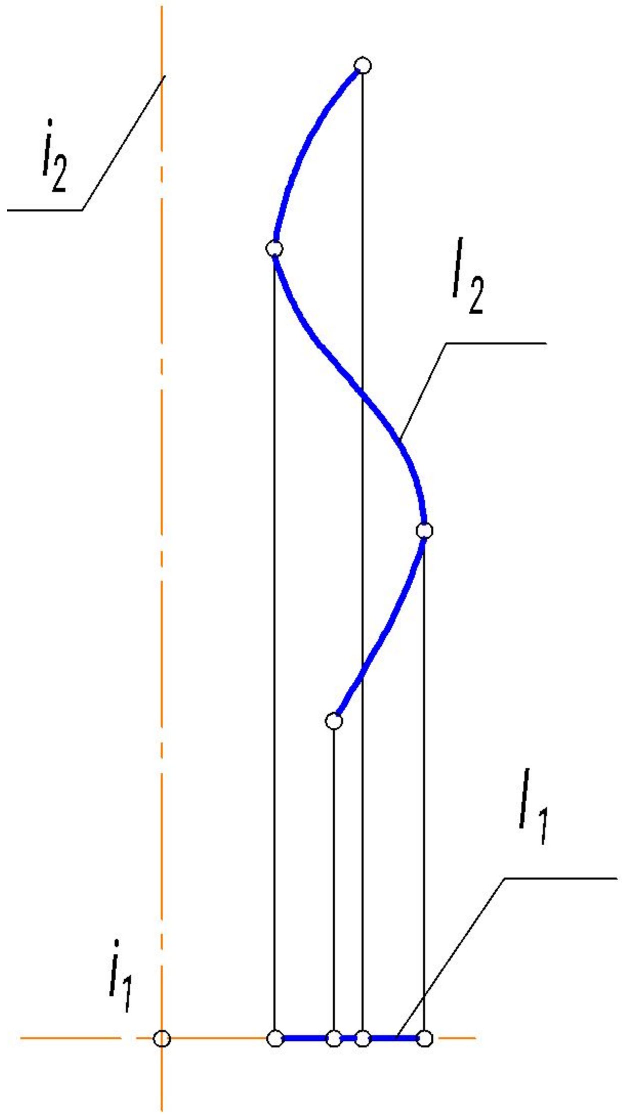
d - í èæí ÿÿ ï àðàëëåëü

Комплексный чертеж поверхности вращения общего вида

Задача: построить поверхность вращения общего вида, *Φ(l, i) l*□ *i, i* ⊥ *П1*

1. Задать проекции элементов определителя, графическая часть определителя может быть задана образующей (*l*) или любой кривой (*k*), лежащей на поверхности и пересекающей все ее параллели.

Определитель задан осью – *i* и образующей – *l*, которая совпадает с плоскостью фронтального меридиана

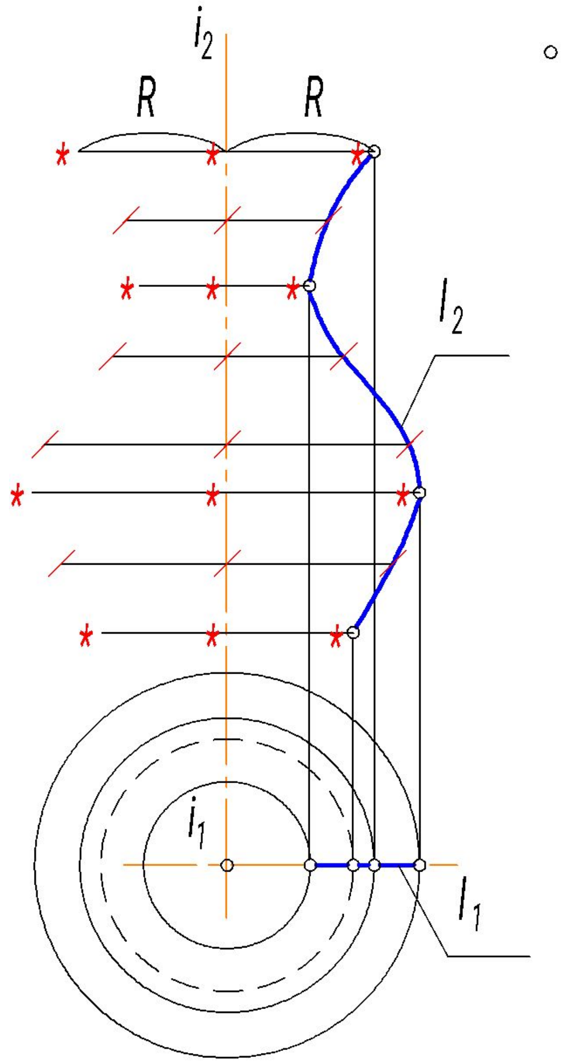


Алгоритм построения

Если поверхность вращения Φ задана $\Phi(i, k)$, $i \perp П1$, то:

1. Достраивается фронтальная проекция левого полумеридиана. Проводятся проекции параллелей в виде отрезков прямых (тонкими линиями), перпендикулярных оси (*i*): горло, экватор, нижняя и верхняя; дополнительные параллели для точного построения кривой.

2. После симметрично достроенного левого полумеридиана основной сплошной линией обводится очерк на $П_2$ -фронтальный (главный) меридиан.



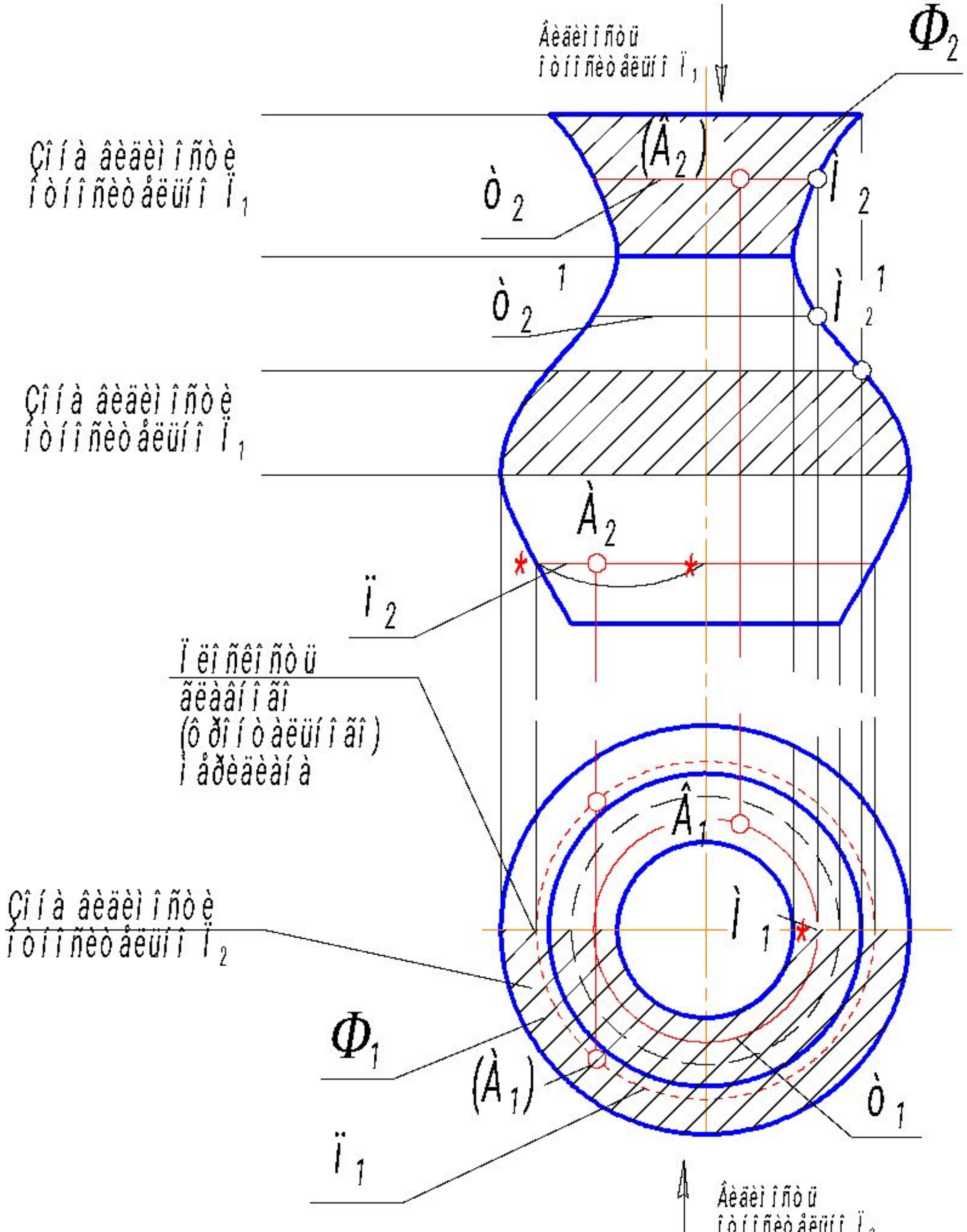
3. Горизонтальная проекция поверхности вращения есть концентрично расположенные окружности-параллели, которые проецируются без искажения на $П_1$ (т.к. $i \perp П_1$) поэтому i_1- точка - центр окружностей. Экватор, верхняя параллель, горло на $П_1$ видимы, нижняя - невидима,т.к.

расположена ниже экватора, а диаметр ее больше горла

- 4. Видимость точек, принадлежащих поверхности, относительно $П_1$ определяется особыми параллелями (заштрихованные зоны на фронтальной проекции поверхности): относительно $П_2$ - главным меридианом (заштрихованная зона на горизонтальной проекции).

5. Пусть *A(A2) и B(B2)* $\in \Phi$ *, A1 и B2 = ?* Чтобы построить вторую проекцию точки, лежащую на поверхности, через заданную проекцию точки проводят параллель.

- **а)** Через точку A_2 проводят окружность - параллель (n_2). Замеряют радиус этой параллели от оси до очерка и строят ее горизонтальную проекцию (n_1). Из точки A_2 проводят линию связи на *n1* , которая пересекает *n1* в двух точках, выбирают нижнюю, т.к. A_2 видима, т.е. точка A_2 находится перед главным меридианом. Определяют видимость точки A_1 - она невидима, т.к. расположена ниже экватора (в незаштрихованной зоне).
- **б)** Через точку B_1 проводят параллель m_1, отмечают точку пересечения с главным меридианом *M1*, по принадлежности ему отмечают M_2, M_21, выбирают M_2, т.к. B_1 на $П_1$ видима, т.е. ее параллель на *П2* должна находиться в зоне видимости относительно $П_1$. Через M_2 проводят фронтальную проекцию этой параллели m_2, из точки B_1 проводят линию связи до пересечения с m_2.
- Точка B_2 - невидима, т.к. на B_1 находится в незаштрихованной зоне, т.е. за главным меридианом.


Âèäèìîñòü
îòíîñèòåëüíî Ï1
Φ2
Çîíà âèäèìîñòè
îòíîñèòåëüíî Ï1
(Â2)
ò2
Ì2
ò2 1
Ì2 1
Çîíà âèäèìîñòè
îòíîñèòåëüíî Ï1
À2
ï2
Ïëîñêîñòü
ãëàâíîãî
(ôðîíòàëüíîãî)
ìåðèäèàíà
Â1
Ì1
Çîíà âèäèìîñòè
îòíîñèòåëüíî Ï2
Φ1
(À1)
ò1
ï1
Âèäèìîñòü
îòíîñèòåëüíî Ï2

Поверхности вращения второго порядка

1.Цилиндр вращения

Цилиндр вращения образуется вращением образующей- *l*(прямой линией) вокруг параллельной ей оси.

Определитель Г(i.l) - цилиндр.

2. Конус вращения

Конус вращения образуется вращением образующей- *l* (прямой линией) вокруг оси, которую она пересекает.

Определитель Ф(i, l) – конус.

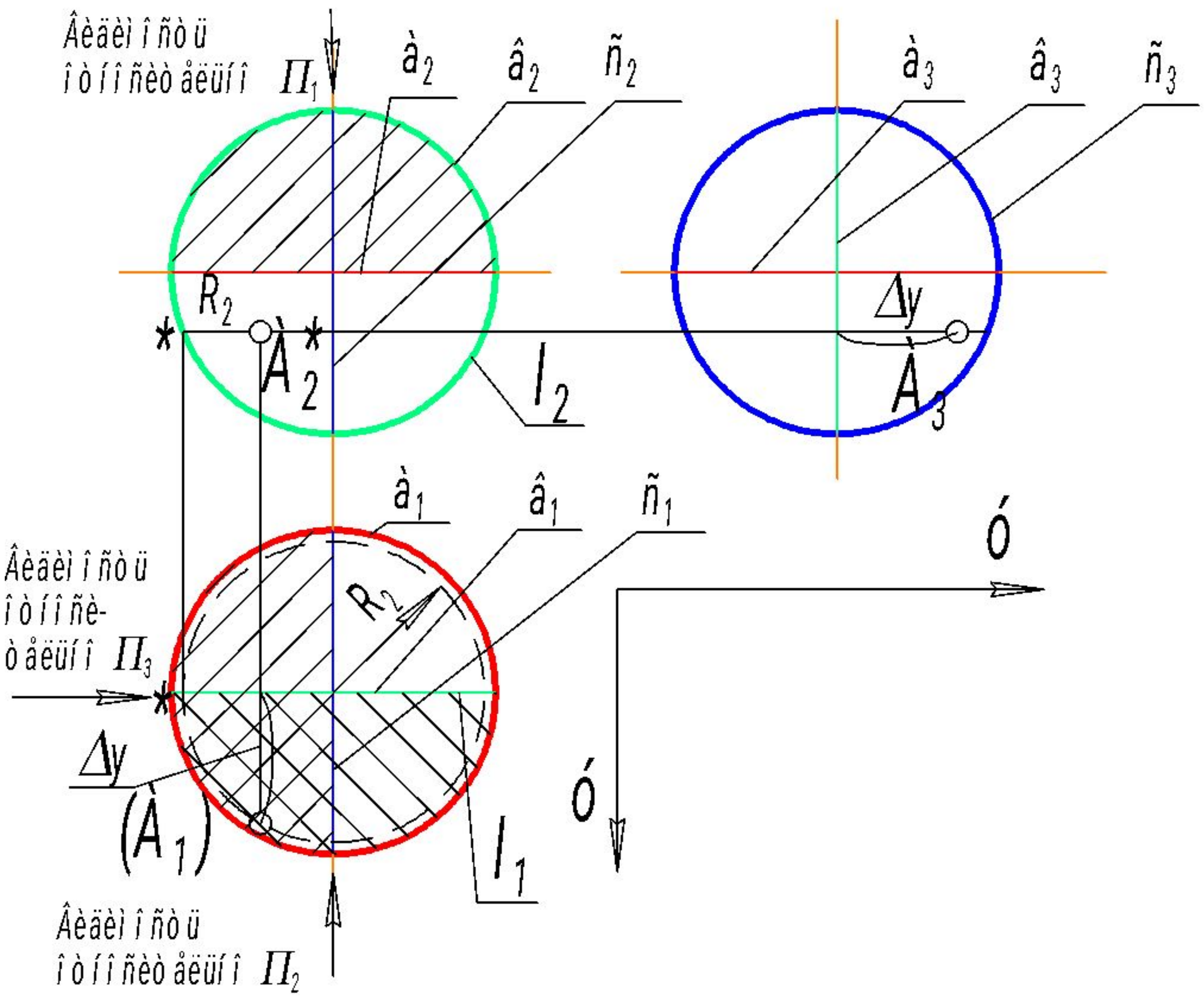
*3.*Сфера

Сфера образуется вращением окружности (l) вокруг оси (ее диаметра) (i)

Определитель Г(i l), - сфера,

Задать сферу

Г(i l), - сфера, $i \perp П_1$, $A(A_2) \in Г$; $A_1, A_3 = ?$



а ($а_1$, $а_2$, $а_3$) - экватор, определяет видимость относительно $П_1$
в ($в_1$, $в_2$, $в_3$) - главный (фронтальный) меридиан, определяет видимость относительно $П_2$
с ($с_1$, $с_2$, $с_3$) - профильный меридиан, определяет видимость относительно $П_3$

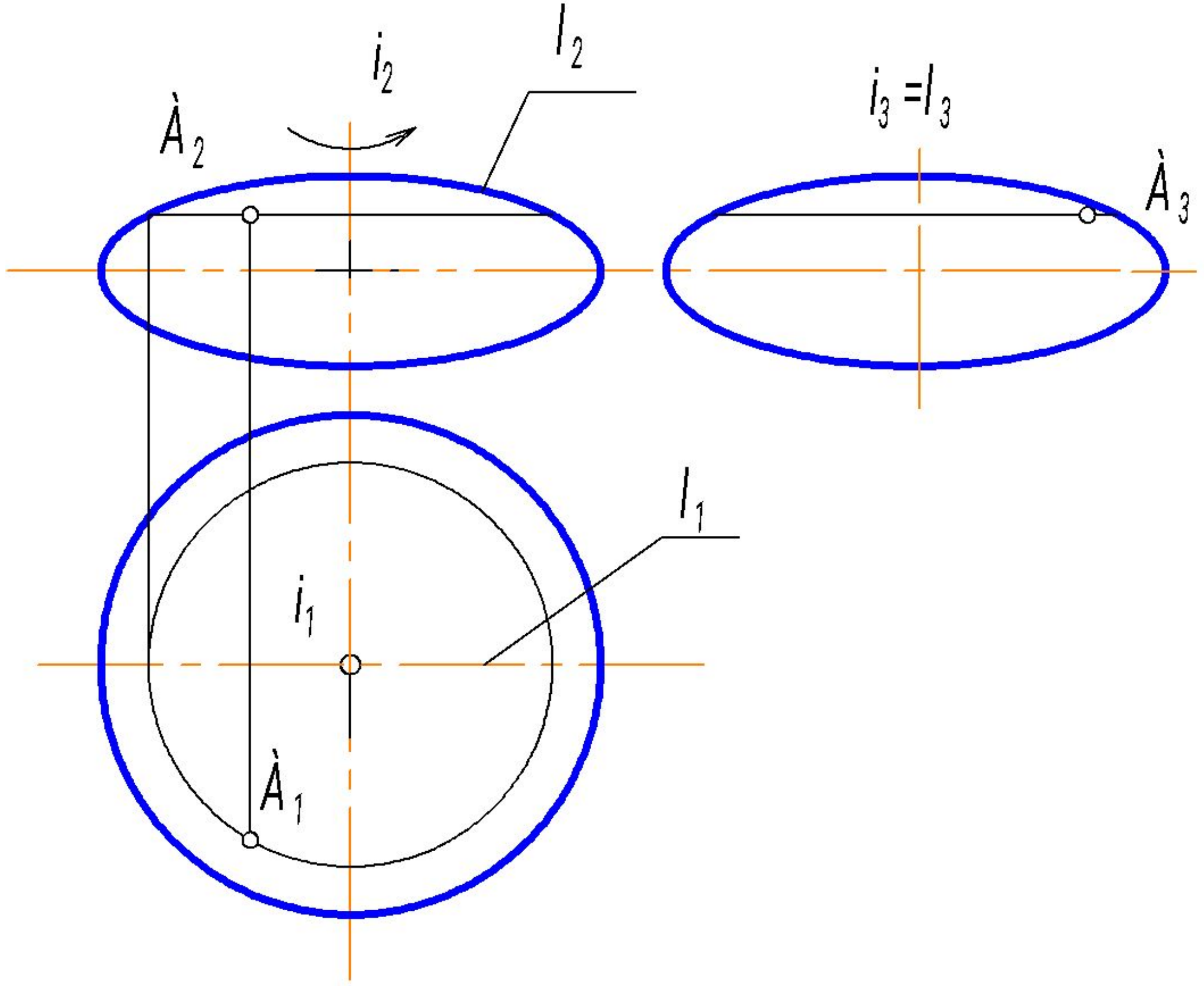
- **Алгоритм построения точки *А*($А_1$, $А_3$)**
- **1. а)** Для построения *А1* через точку *А2*(задана видимой) проводят параллель, замеряют радиус – R_2(от оси до очерка), строят горизонтальную проекцию этой параллели, проводят линию связи из точки $А_2 \Rightarrow А_1$.
- **б)** Определяют видимость $А_1$ - невидима, т.к. точка $А(А_2)$ на расположена ниже экватора (на $П_2$ - в незаштрихованной зоне).
- **2. а)** Для построения $А_3$ из точки $А_2$ проводят линию связи на $П_3$, на *П1* замеряют расстояние от фронтального меридиана (*в1*)- $\Delta у$ (параллельно оси *У*), переносят на $П_3$, откладывая от проекции фронтального меридиана ($в_3$) по линии связи (параллельно оси *У*) $\Rightarrow А_3$
- **б)** Определяют видимость $А_3$ - видима, т.к. точка $А(А_1)$ на *П1* расположена перед профильным меридианом (на $П_1$ в заштрихованной зоне).

Поверхности вращения второго порядка

- Это поверхности, образованные вращением кривой второго порядка вокруг оси, лежащей в плоскости симметрии кривой.

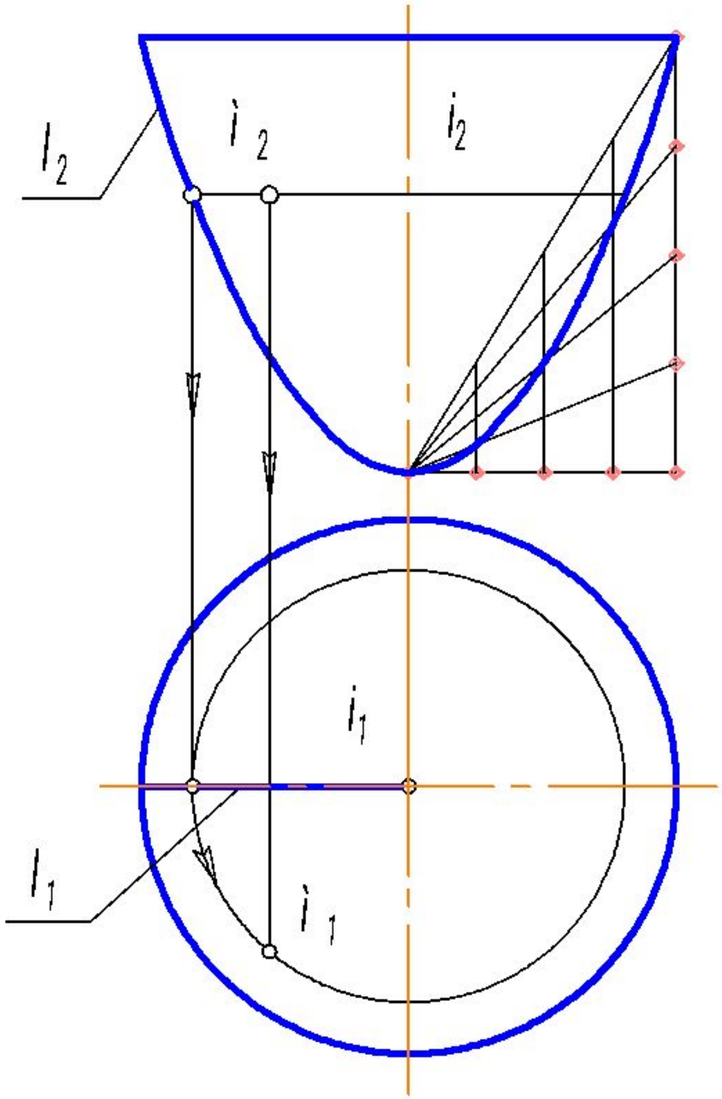
Эллипсоид вращения

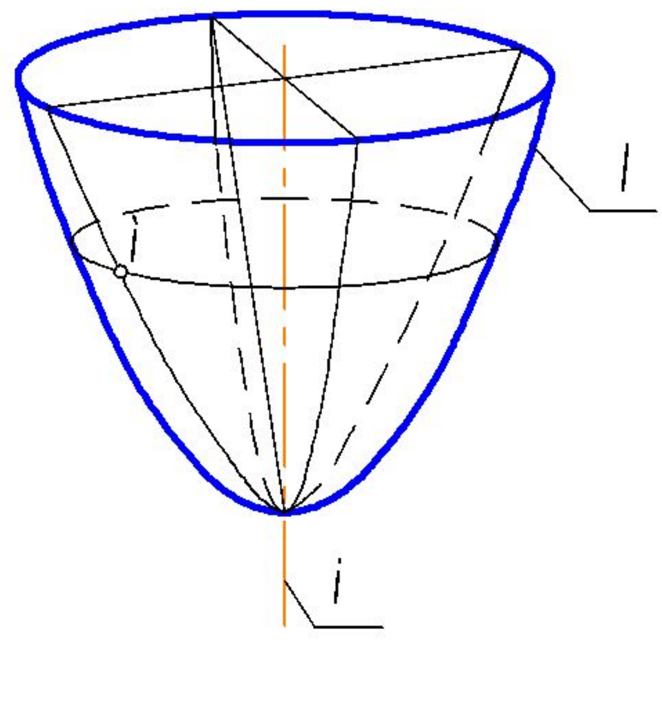
Образуется вращением эллипса вокруг оси .



Параболоид вращения

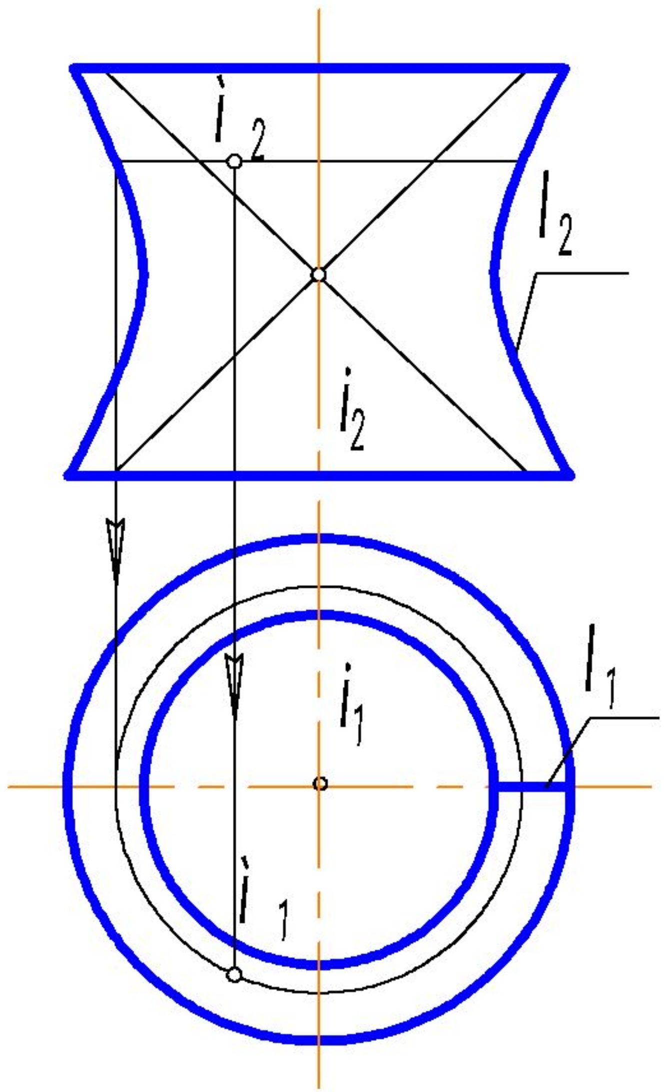
Образуется вращением параболы вокруг её оси.

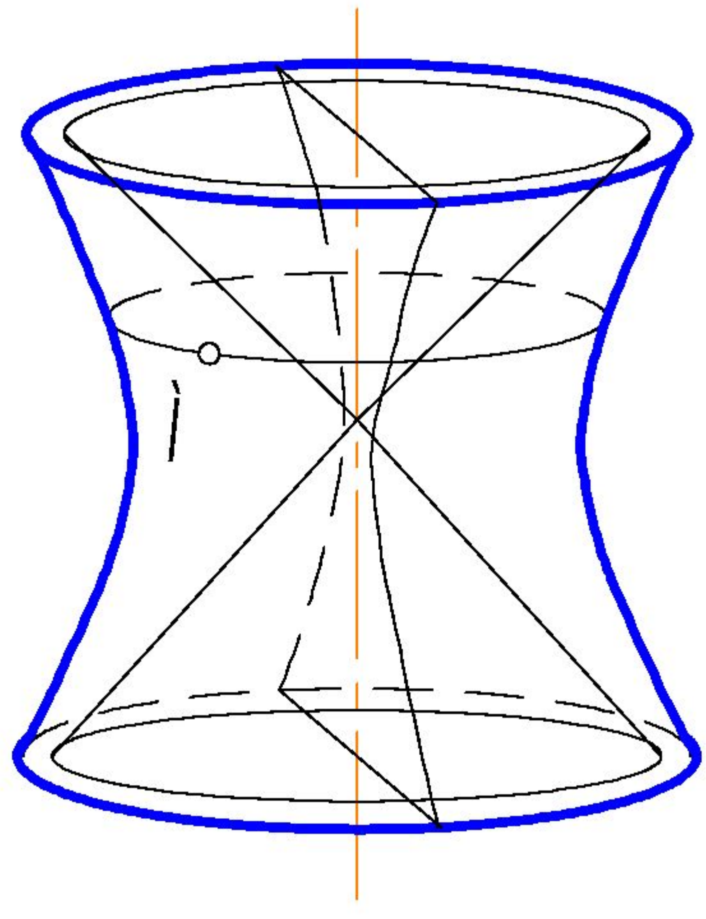




Гиперболоид вращения

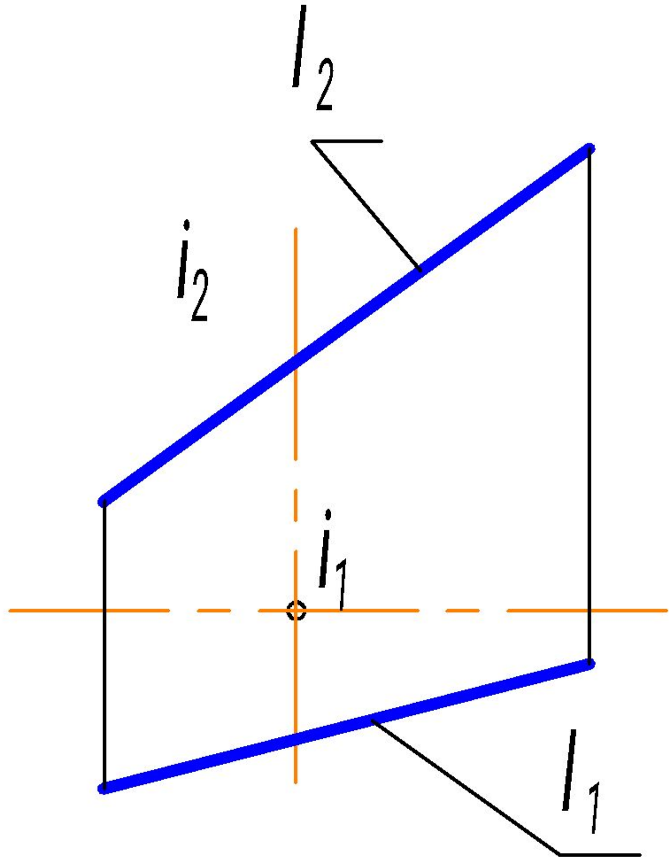
Образуется вращением гиперболы вокруг её оси.



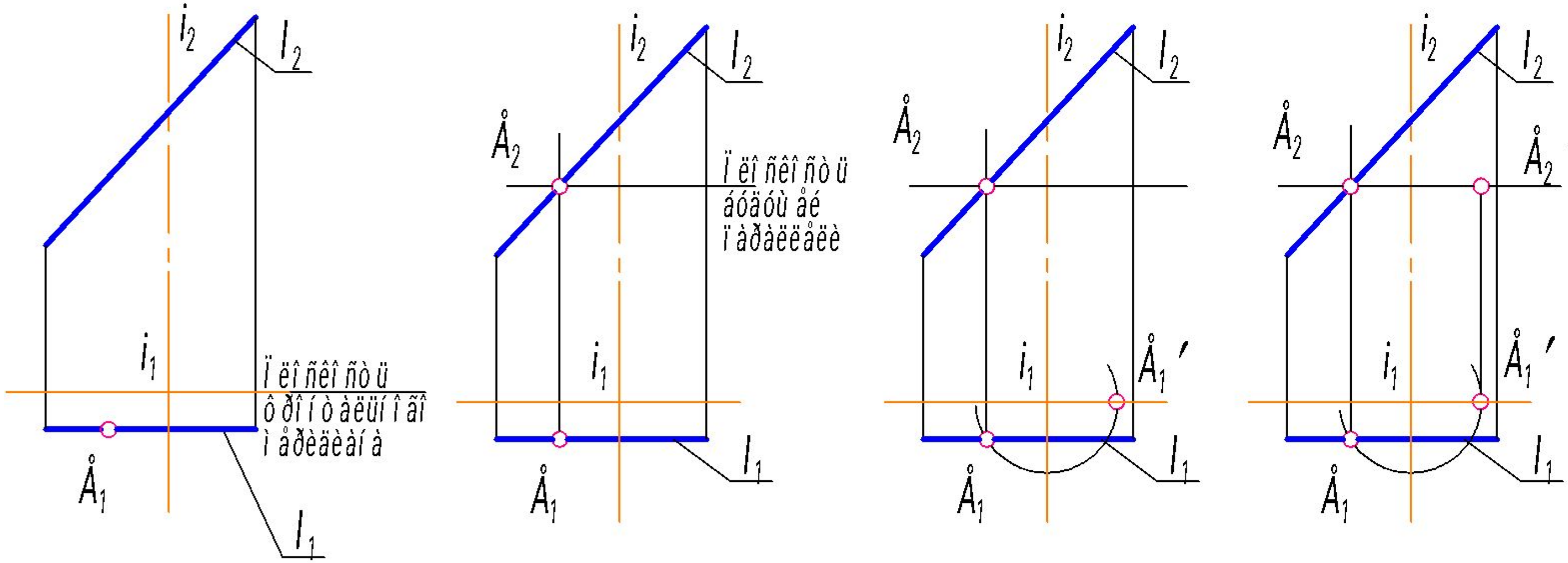


Определитель однополостного гиперболоида (образующая - прямая линия). Образующая и ось скрещивающееся прямые. Эту поверхность относят и к линейчатым поверхностям

$\Sigma\ (l,\ i \perp \Pi 1,\ l \overset{\circ}{\_}\ i)$.



Алгоритм построения главного меридиана однополостного гиперболоида, *Ψ(i, l)* (образующая - прямая линия).

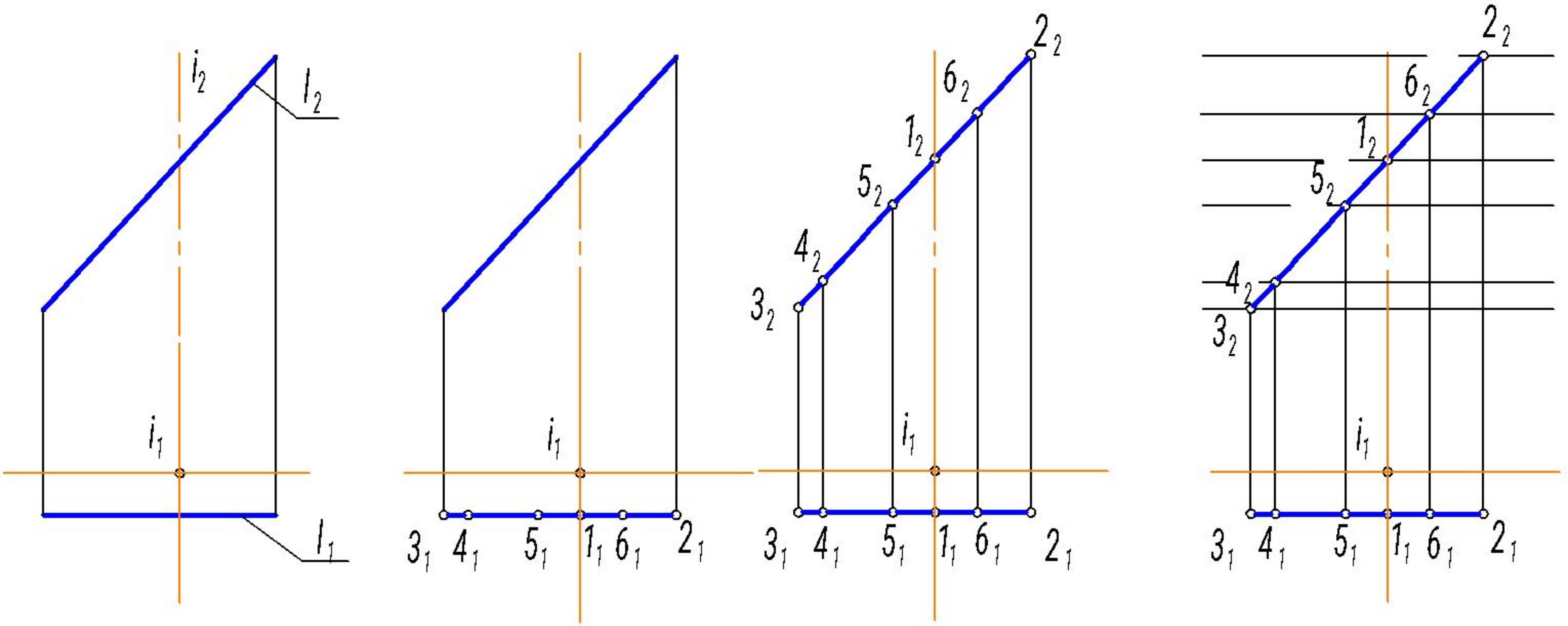


Графический алгоритм построения поверхности

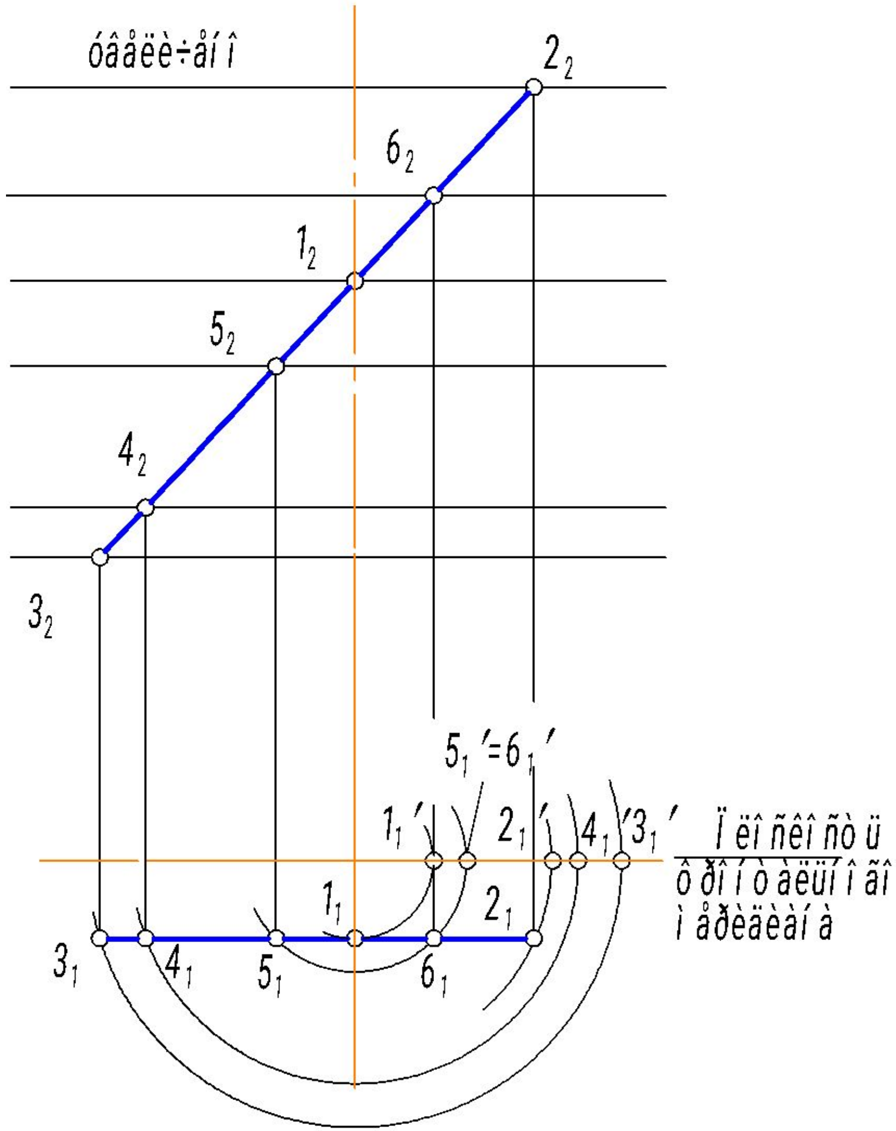
1. Задать проекции определителя $\Psi(i, l)$, $i \perp \Pi_1$;

2. Распределить точки на Π_1, которые определят положение будущих

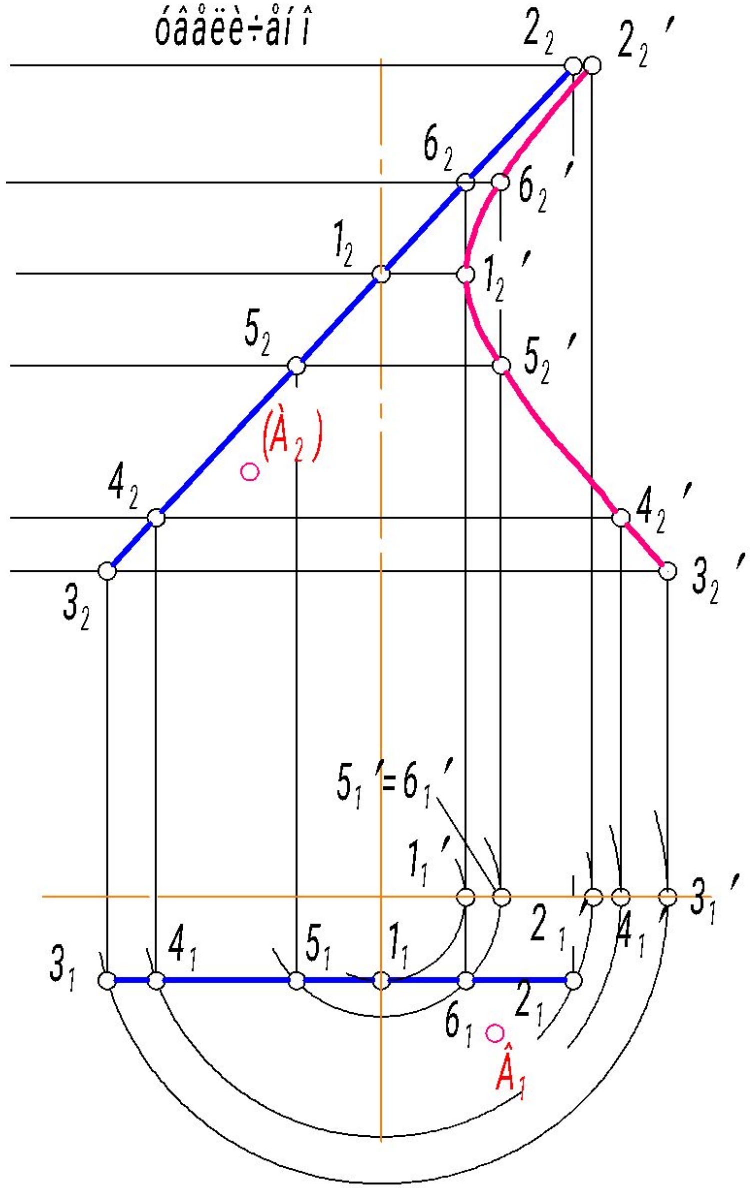
параллелей на Π_1 и Π_2:



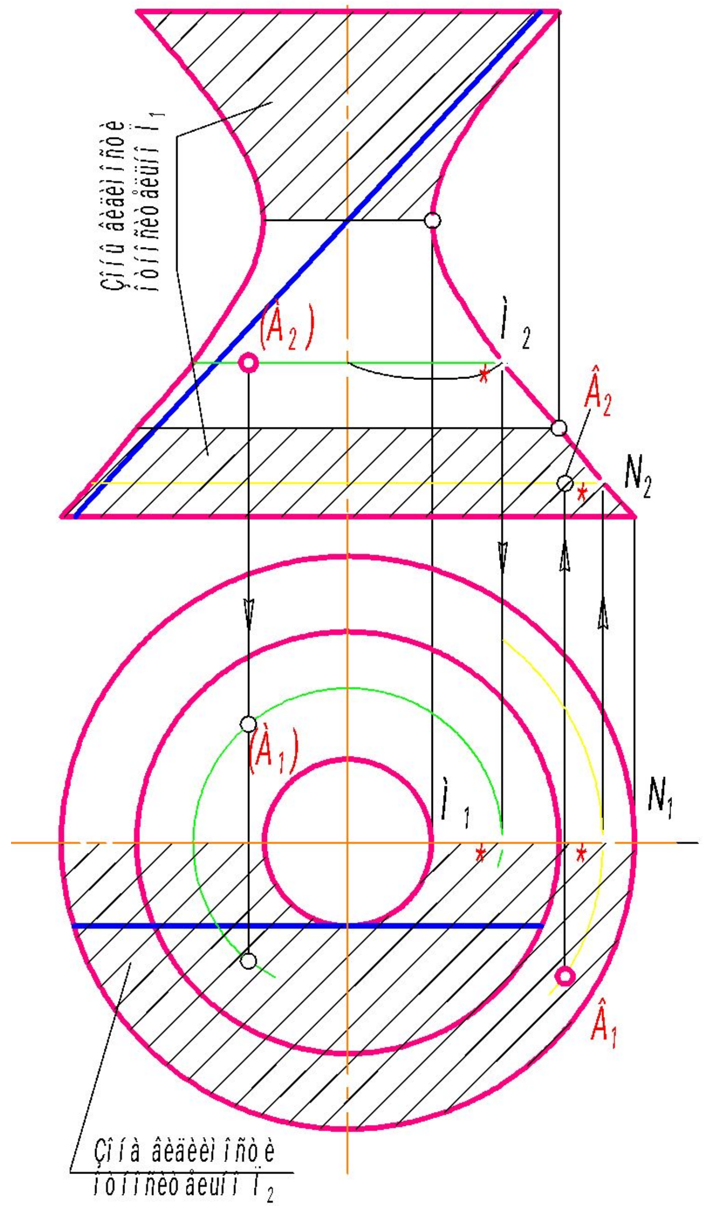
3. Далее все точки нужно ввести в плоскость фронтального меридиана



Полученные точки соединить плавной кривой → правый полумеридиан



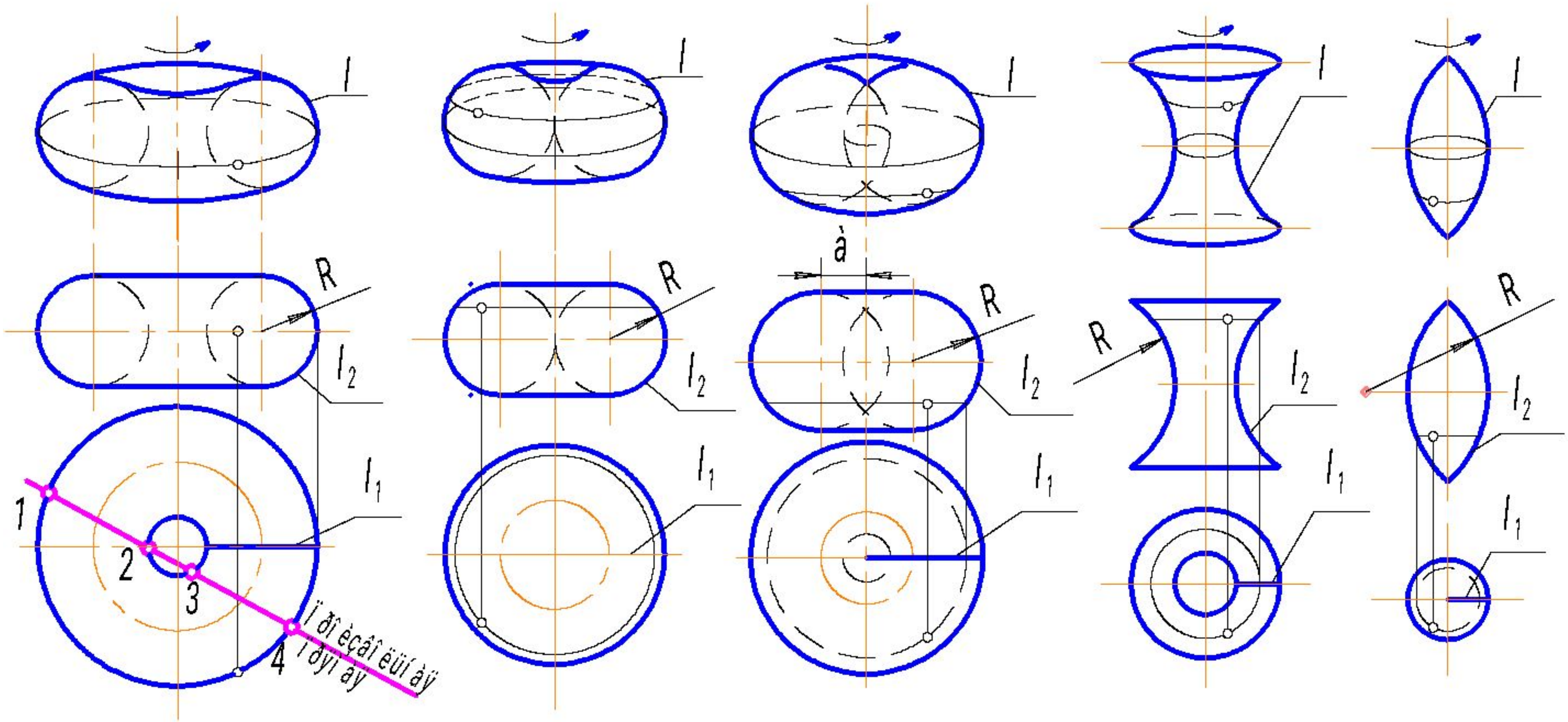
Определить видимость поверхности



Тор

- **Поверхность тора образуется при вращении окружности вокруг оси, расположенной в плоскости этой окружности, но не проходящей через ее центр. Определитель *Θ (l, i) l* □ *i*.**
- Произвольная прямая пересекает тор в общем случае в четырех точках, следовательно это поверхность четвертого порядка.

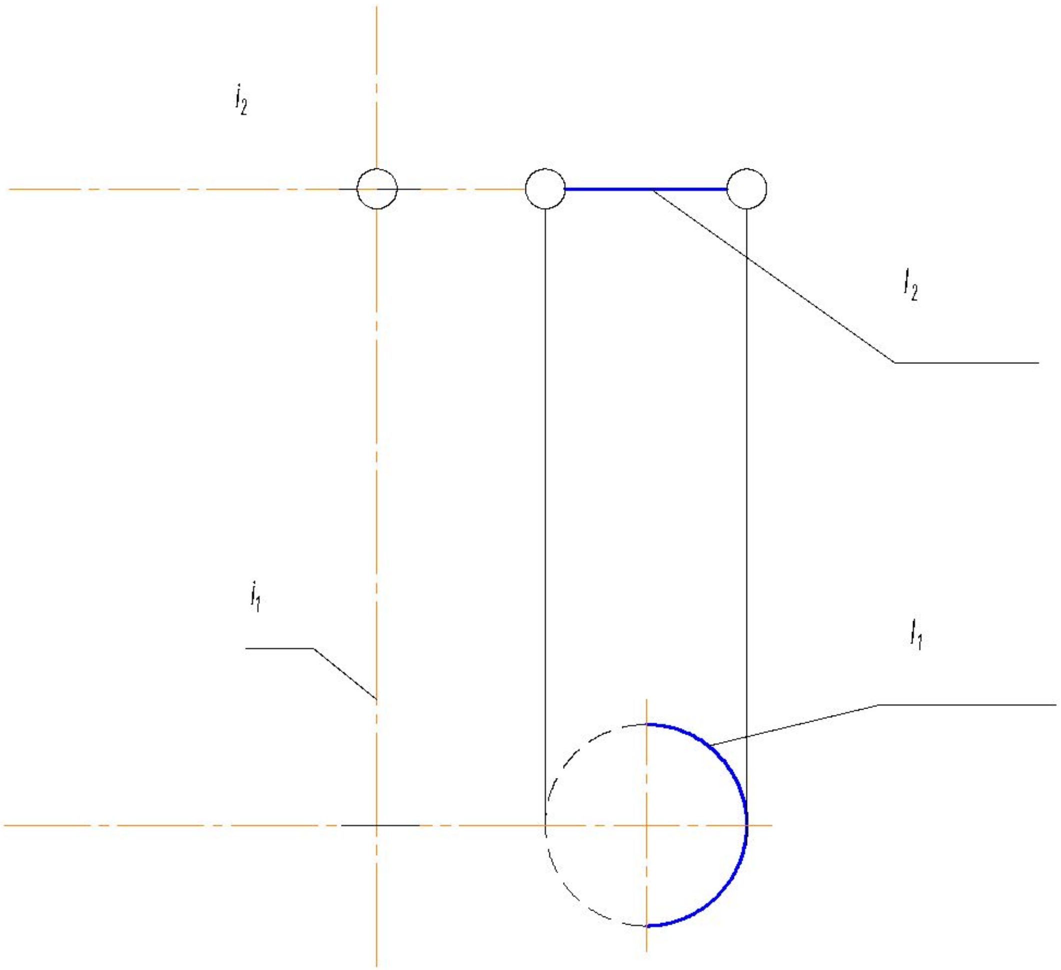
Разновидности тора



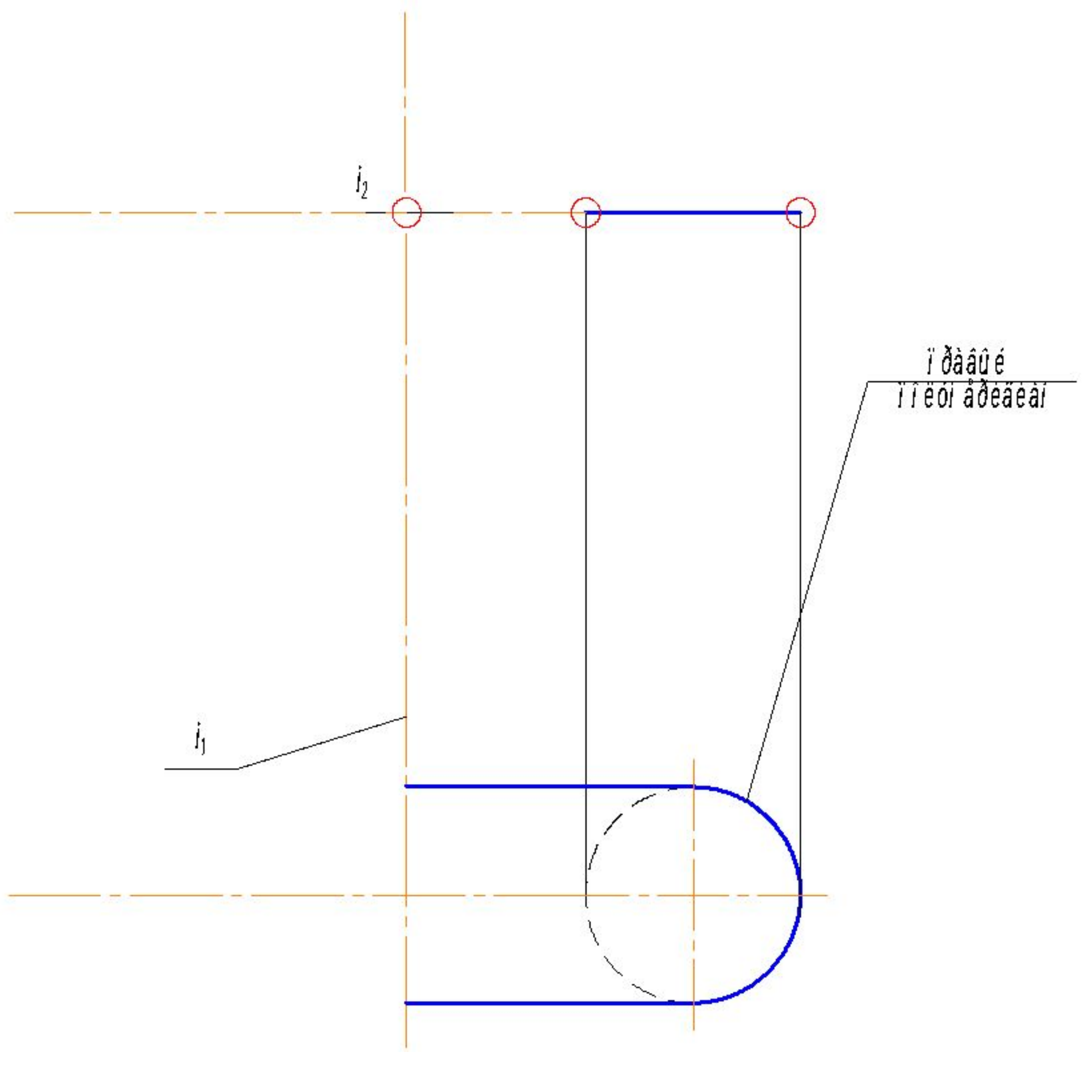
Сконструировать поверхность: тор-кольцо *Θ (l, i), i ⊥ П2 n(n2) ⊂ Θ, n1 =?*

Алгоритм:

1. Задать проекции элементов определителя (Рис. 2-104)

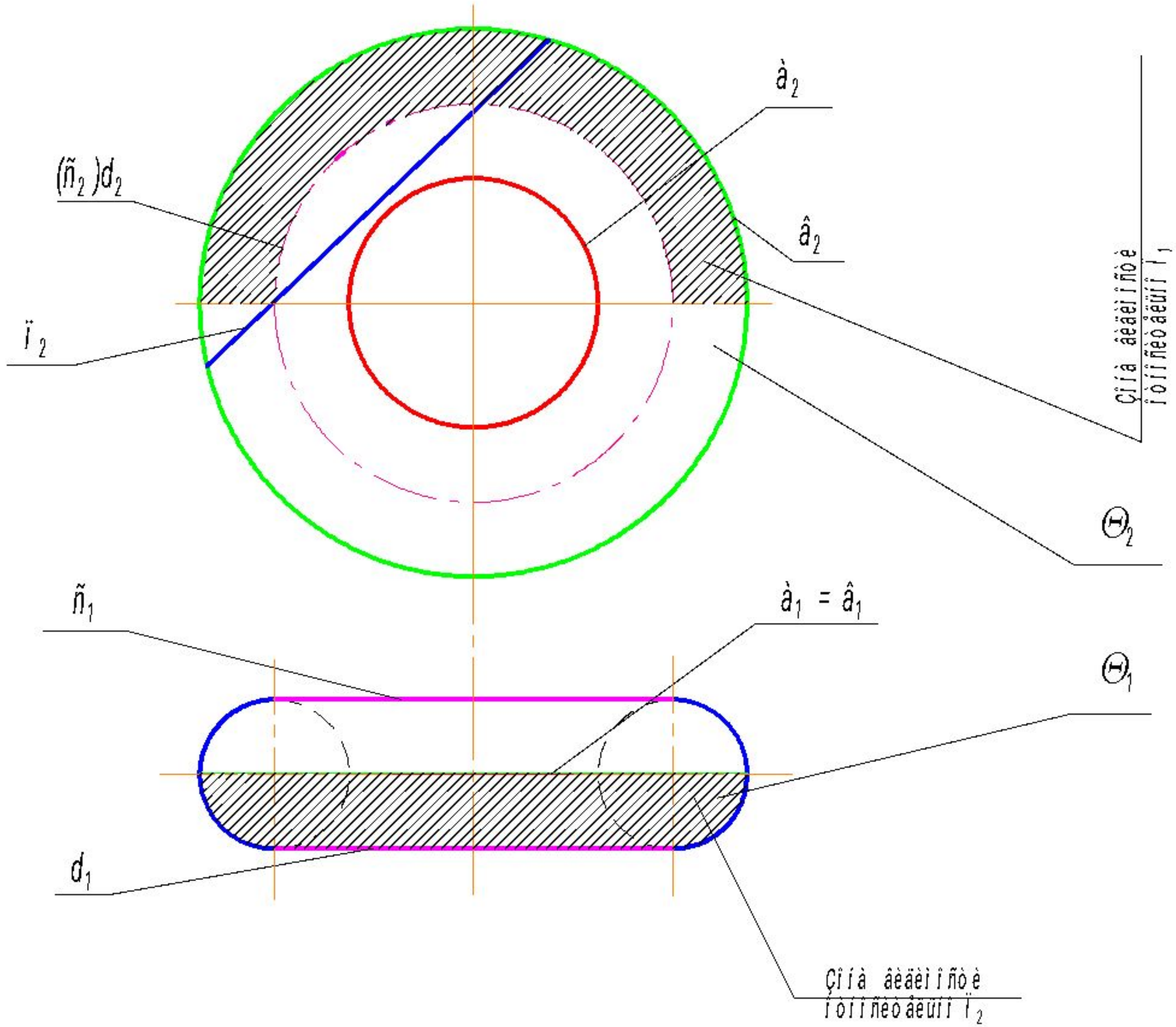


2. Построить горизонтальную проекцию правого полумеридиана.

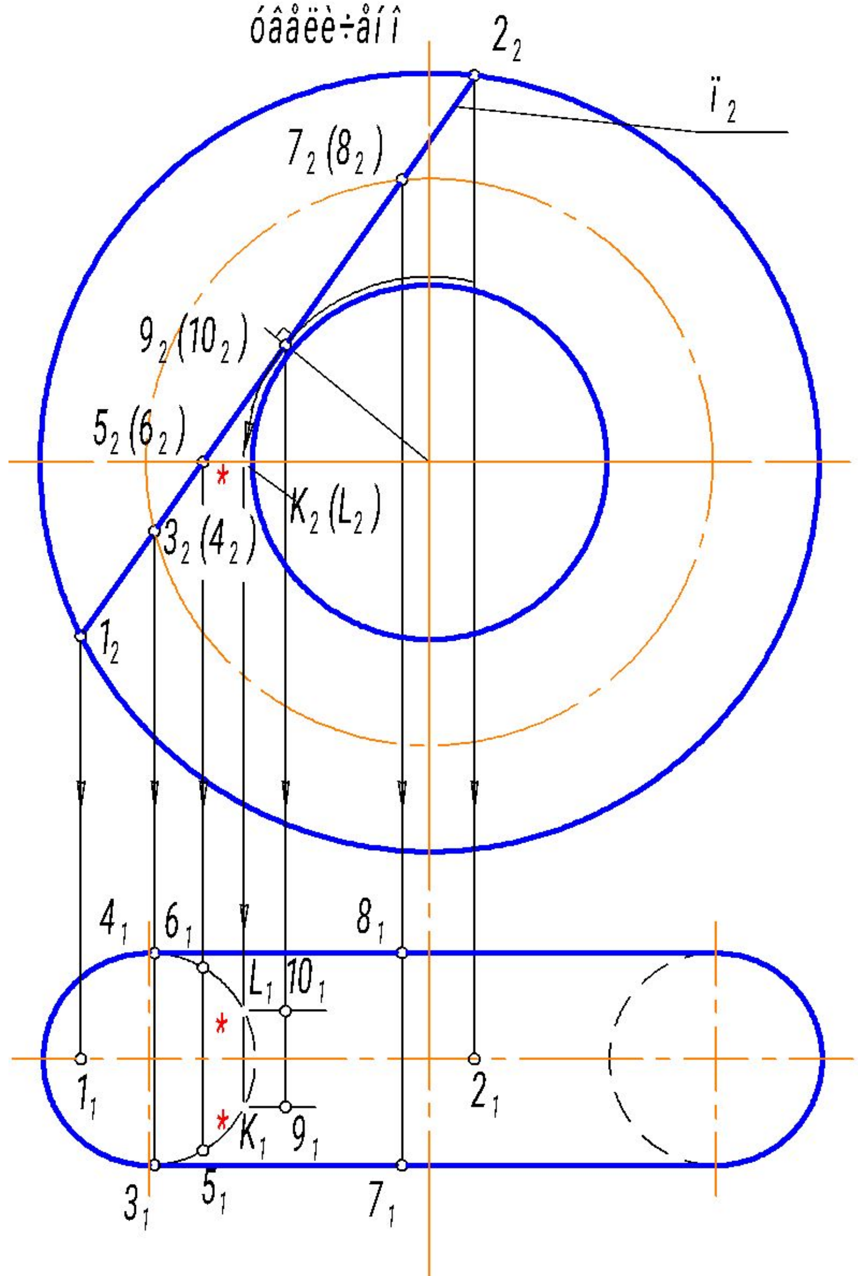


3. Достроить левый полумеридиан симметрично правому

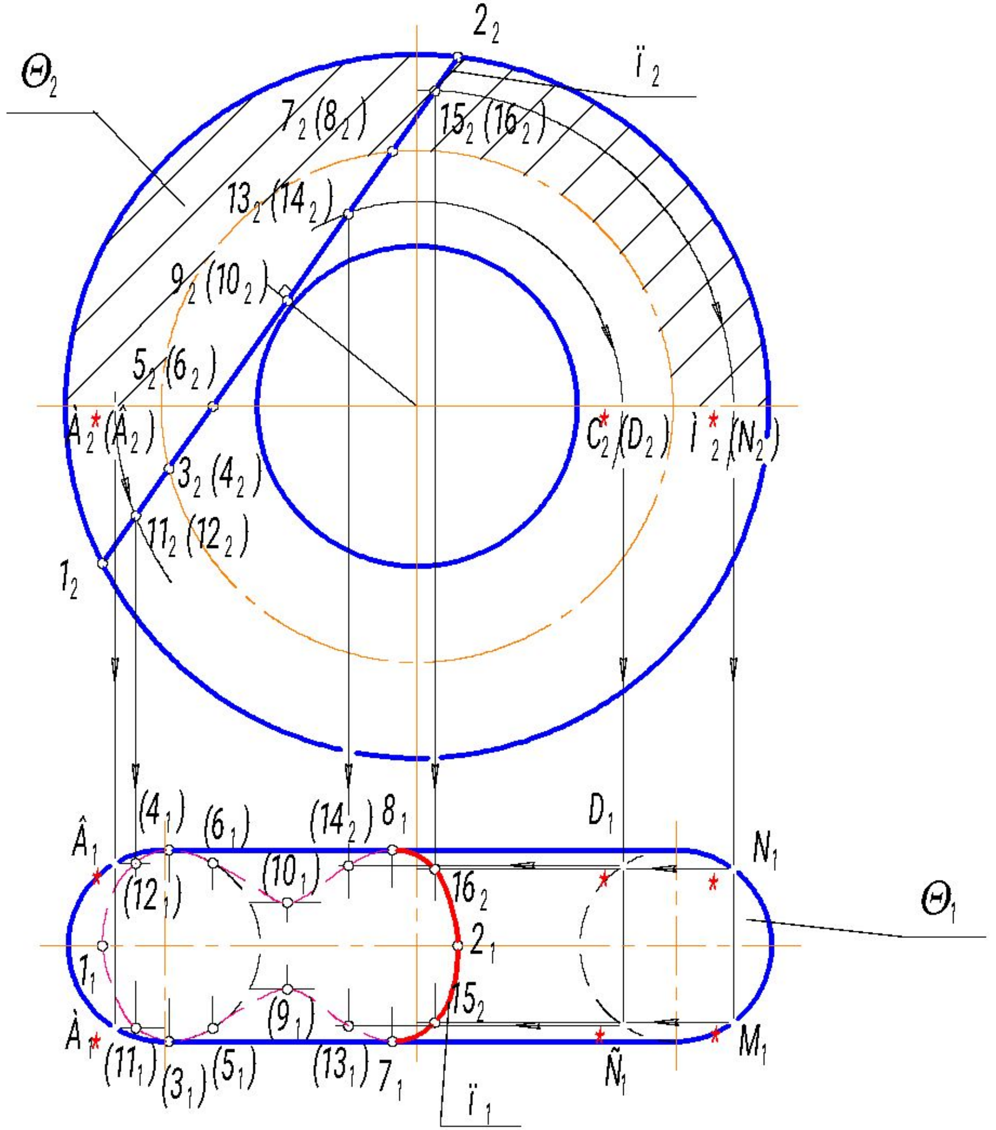
4. Фронтальная проекция - это концентрично расположенные особые параллели



Алгоритм построения *п1*



Все особые точки, кроме *9,10*, находятся без дополнительных построений. Для построения точек *9,10* проводят через $9_2(10_2)$ параллели до пересечения с главным меридианом → $K_2(L_2)$,

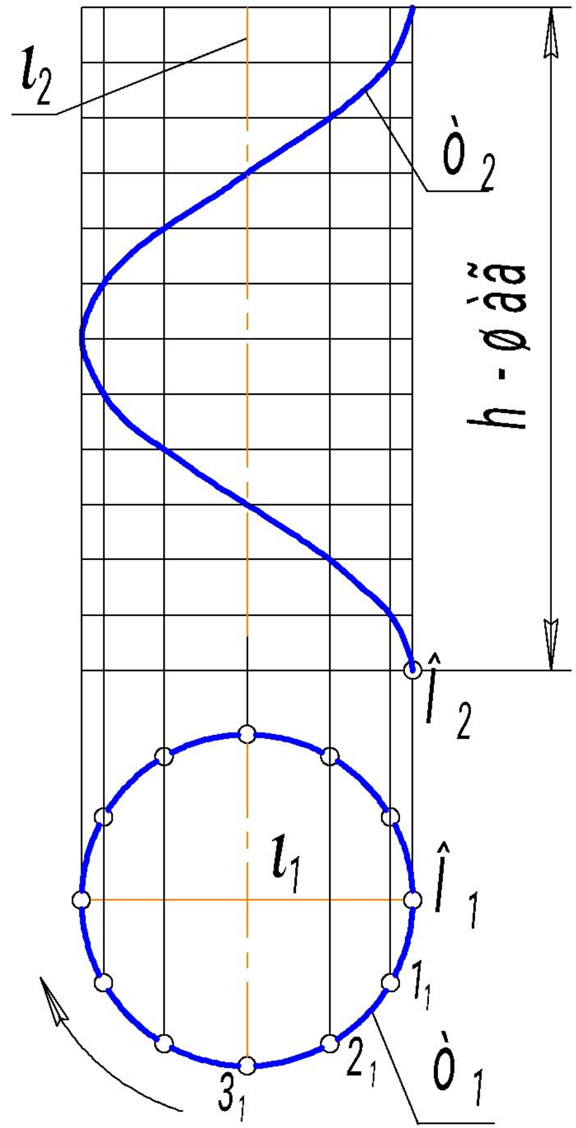


Винтовые поверхности

- Если образующая - прямая линия, то поверхность называется линейчатой винтовой поверхностью или геликоидом. Геликоид является основой образования резьбы.
- Геликоиды подразделяются на прямые и наклонные в зависимости от того, перпендикулярна образующая к оси геликоида или наклонена. Шагом винтовой поверхности называется линейное перемещение образующей за один полный оборот.

Прямой геликоид

Прямой геликоид образуется движением прямолинейной образующей - l по двум направляющим, оставаясь в любой момент движения $\perp$ оси, $\Phi(i, m)$, $A(A2) \in \Phi$, $A1 = ?$ Закон каркаса: $l \cap i$, $l \cap m$, $l \perp i$



Наклонный геликоид

- Наклонный геликоид отличается от прямого тем, что его прямолинейная образующая при винтовом перемещении пересекает ось геликоида под постоянным углом, отличным от прямого. Иначе говоря, образующая (*l*-прямая линия) наклонного геликоида при винтовом движении скользит по двум неподвижным направляющим (ось и цилиндрическая винтовая линия, как и у прямого), причем во всех своих положениях угол наклона образующей к оси не меняется. Поэтому можно сказать, что образующая в каждый момент движения будет параллельна соответствующим образующим некоторого конуса вращения, называемого направляющим конусом.

Построить наклонный геликоид *Ф(i, m)*

i - ось цилиндрической винтовой линии

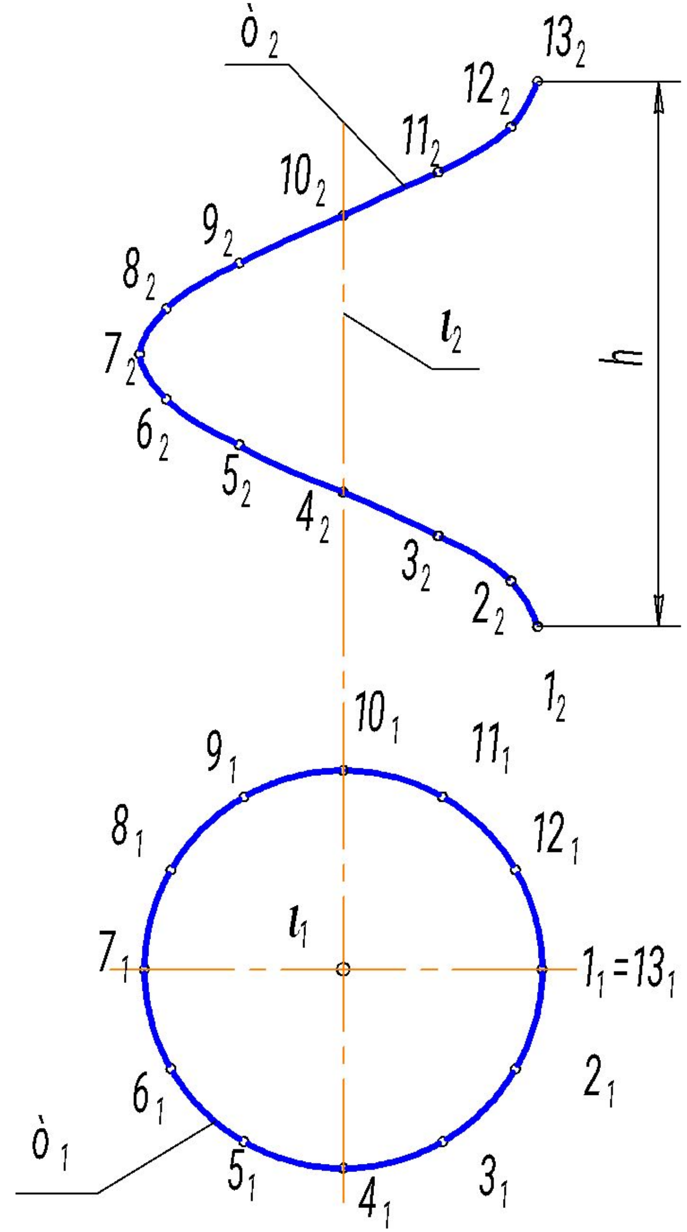
m - цилиндрическая винтовая линия

Закон каркаса: $l \cap i$, $l \cap m$, l *не* $\perp i$, $i \perp П1$

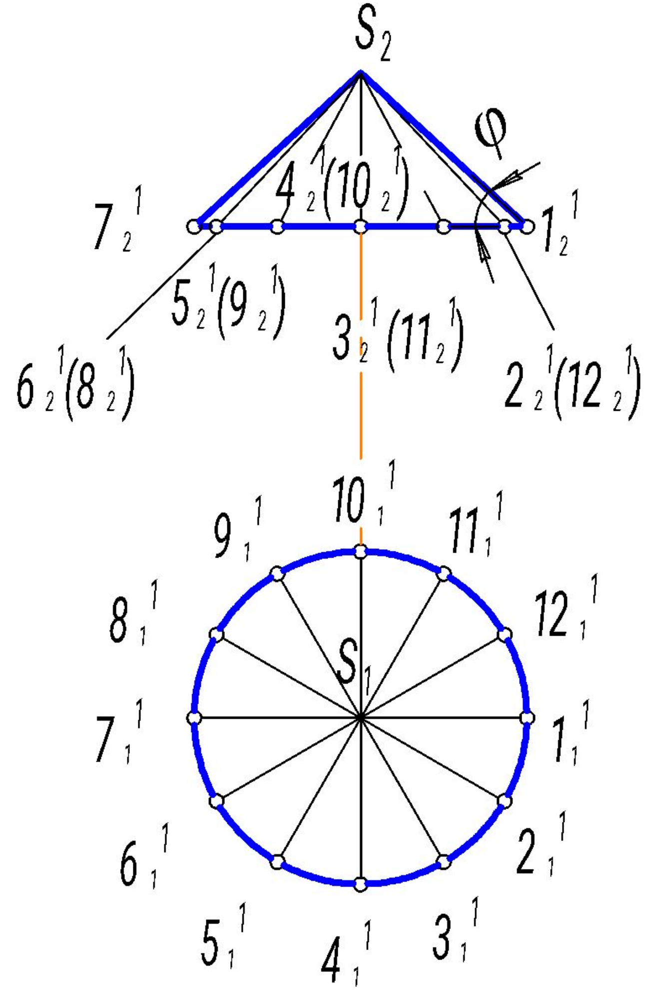
Алгоритм построения

1. Задать проекции элементов определителя: построить цилиндрическую винтовую линию из 12 точек;

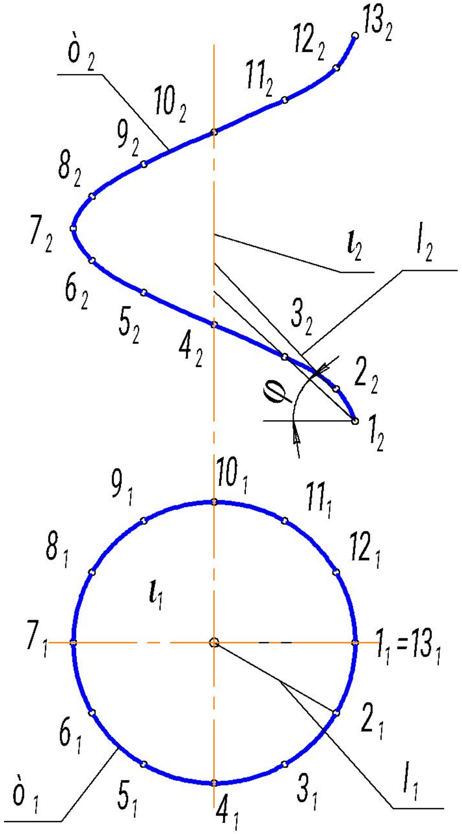
Проекции элементов определителя наклонного геликоида



Задать проекции направляющего конуса (провести 12 образующих)

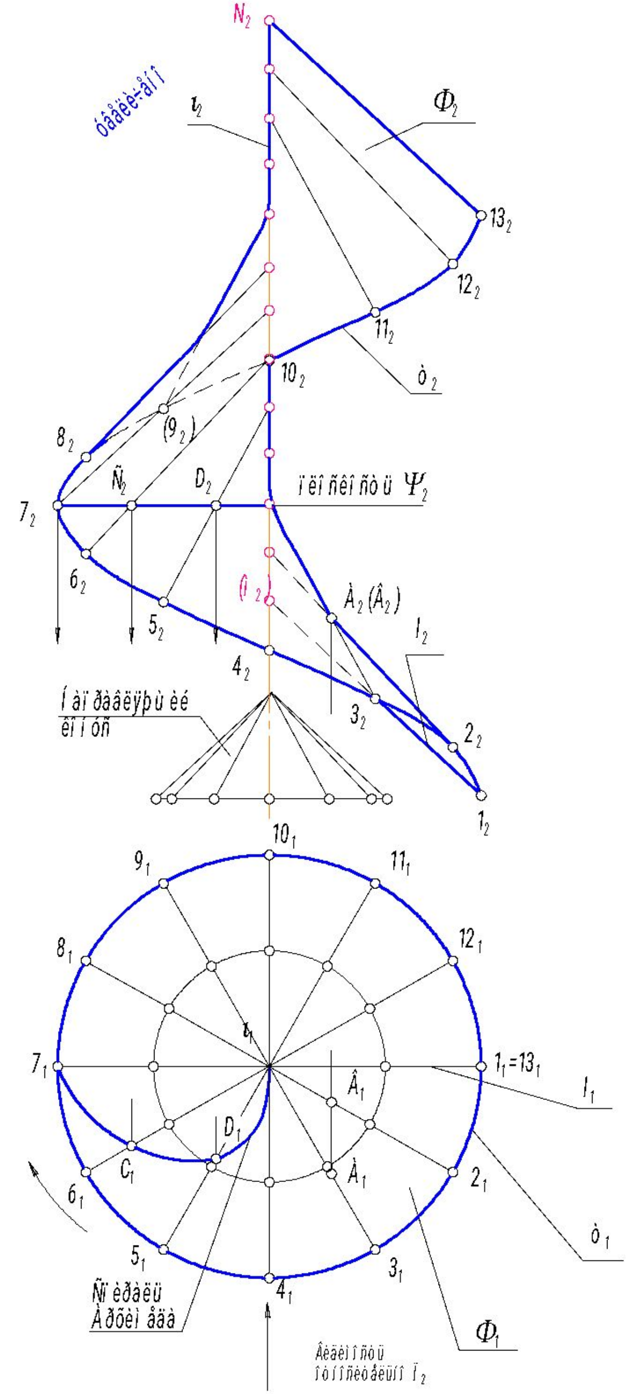


2. Построение геликоида начинаем с горизонтальной проекции. Из точек 1_1 и 2_1 провести образующие геликоида параллельно соответствующим образующим конуса 1_{11} и 2_{11} до пересечения с осью – i_1.



3. На фронтальной проекции из точек 1_2 и 2_2 провести образующие геликоида параллельно соответствующим образующим конуса 1_{21} и 2_{21} до пересечения с осью – i_2.

- 4. Остальные образующие геликоида строить таким же образом
- Направляющий конус может быть соосным с наклонным геликоидом



N2
i2
Φ2
132
122
112
ò2
102
(92)
82
72
Ñ2
D2
Ψ2
62
(l2)
À2 (Â2)
l2
52
42
32
22
12
101
91
111
81
121
i1
71
1 1=13 1
Â1
l1
D1
À1
C1
21
61
51
31
41
ò1
Φ1