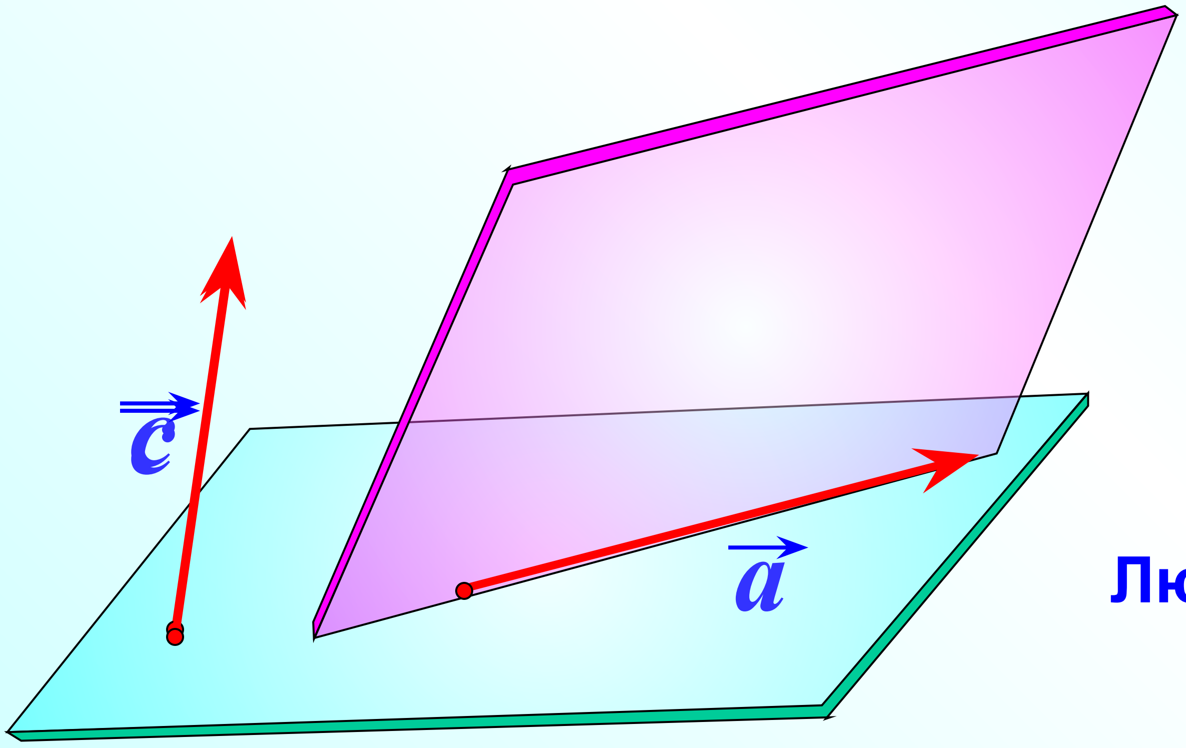
Савченко Е.М., учитель математики,
МОУ гимназия №1, г. Полярные Зори, Мурманской обл.

Компланарные векторы

Л.С. Атанасян "Геометрия 10-11"

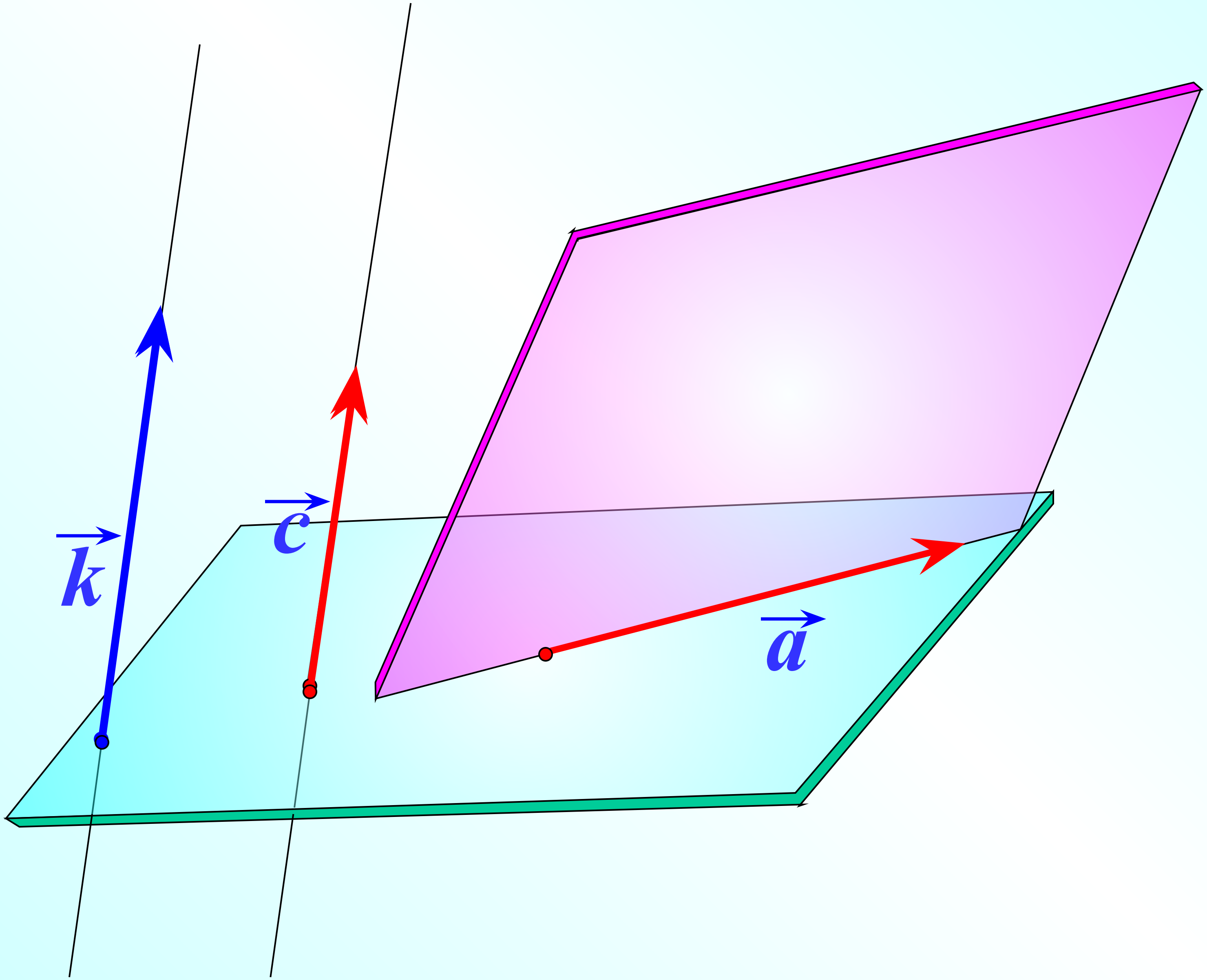
Векторы называются **компланарными**, если при откладывании их от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости.

Другими словами, векторы называются **компланарными**, если имеются равные им векторы, лежащие в одной плоскости.

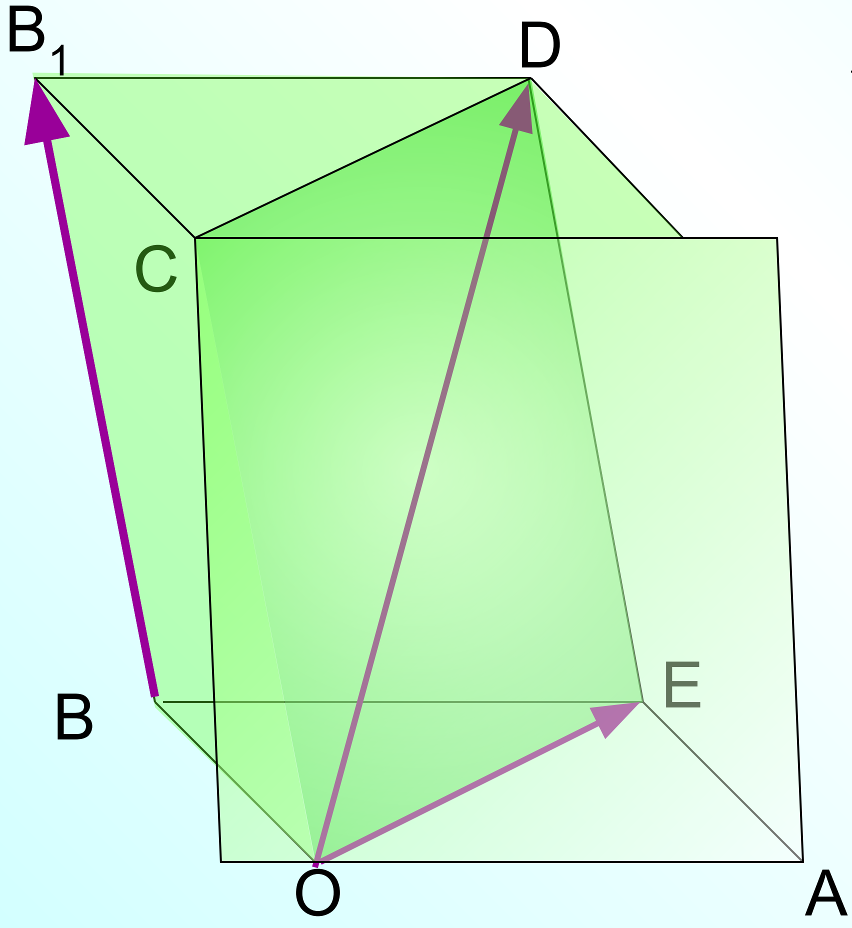


Любые два вектора компланарны.

Три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, также компланарны.

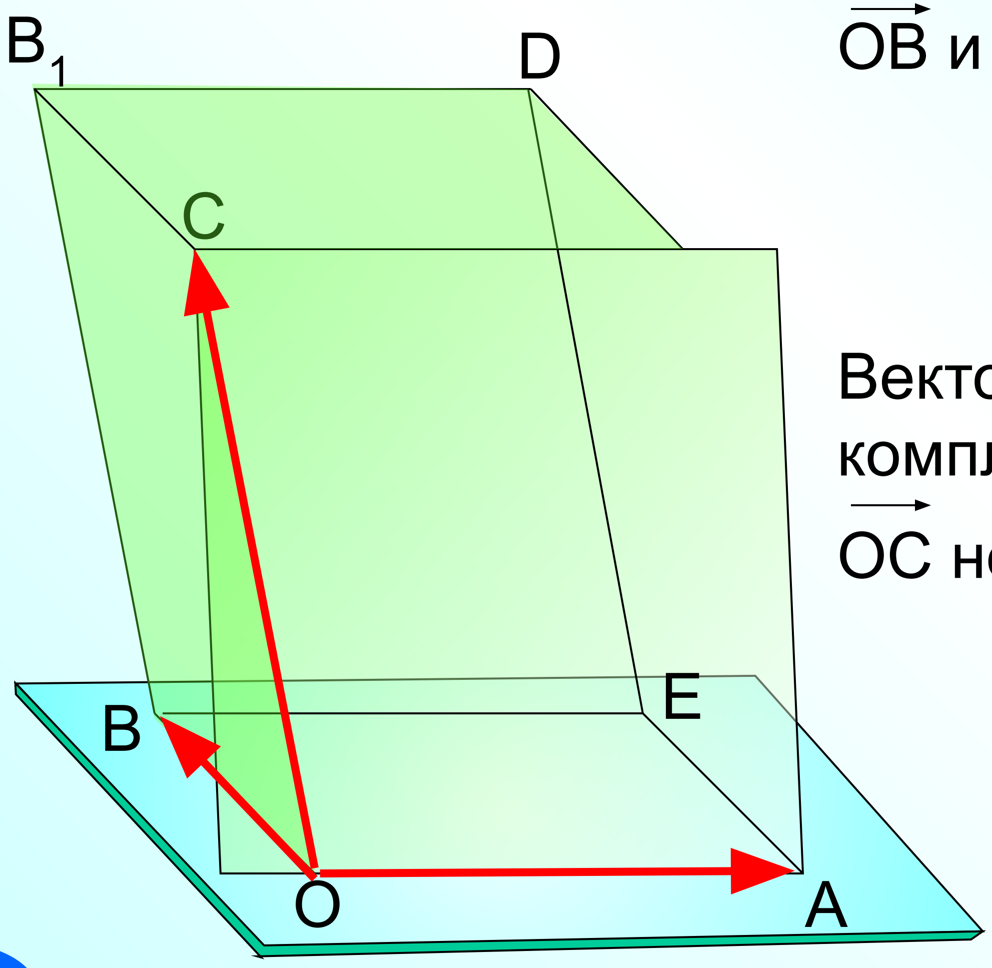


Три произвольных вектора могут быть как компланарными, так и не компланарными. На рисунке изображен параллелепипед.



Являются ли векторы $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OE}$ компланарными?

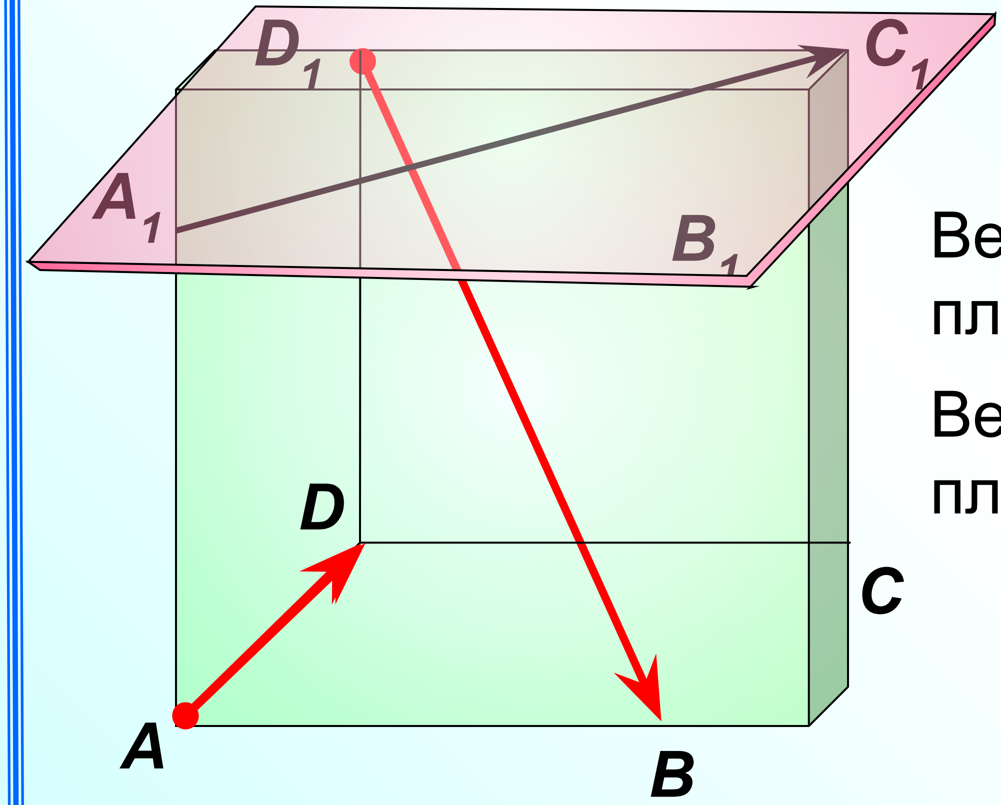
Три произвольных вектора могут быть как компланарными, так и не компланарными. На рисунке изображен параллелепипед.



Являются ли векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ компланарными?

Векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ не компланарны, так как вектор $\overrightarrow{OC}$ не лежит в плоскости OAB.

Являются ли векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A_1C_1}$ и $\overrightarrow{D_1B}$ компланарными?



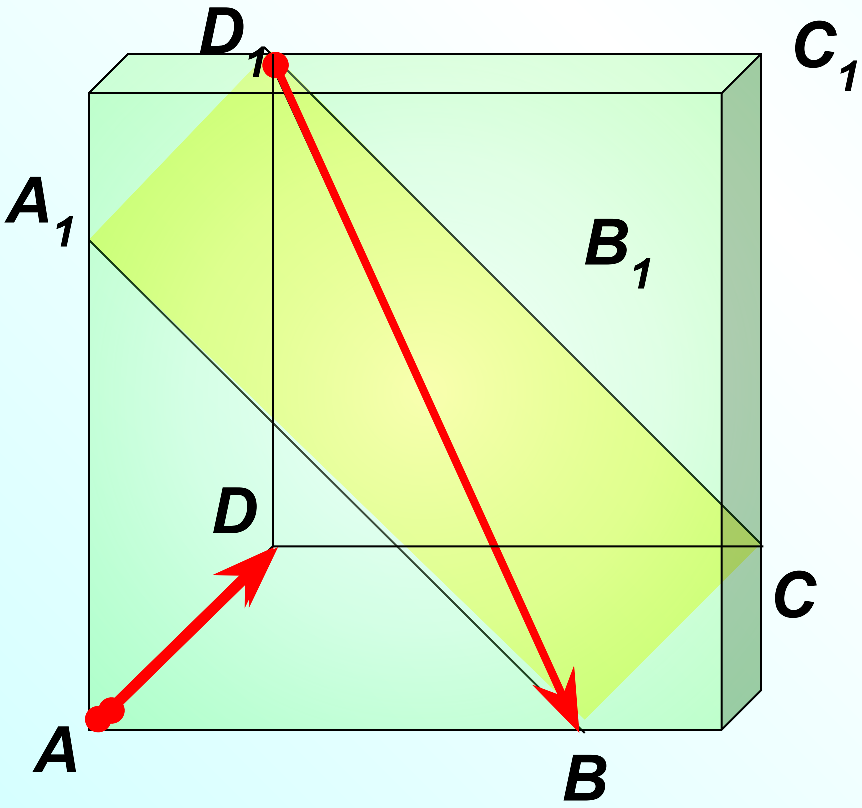
Векторы $\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{A_1C_1}$ лежат в плоскости $A_1D_1C_1$.

Вектор $\overrightarrow{D_1B}$ не лежит в этой плоскости.

Векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A_1C_1}$ и $\overrightarrow{D_1B}$ не компланарны.

Являются ли векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{D_1B}$ компланарными?

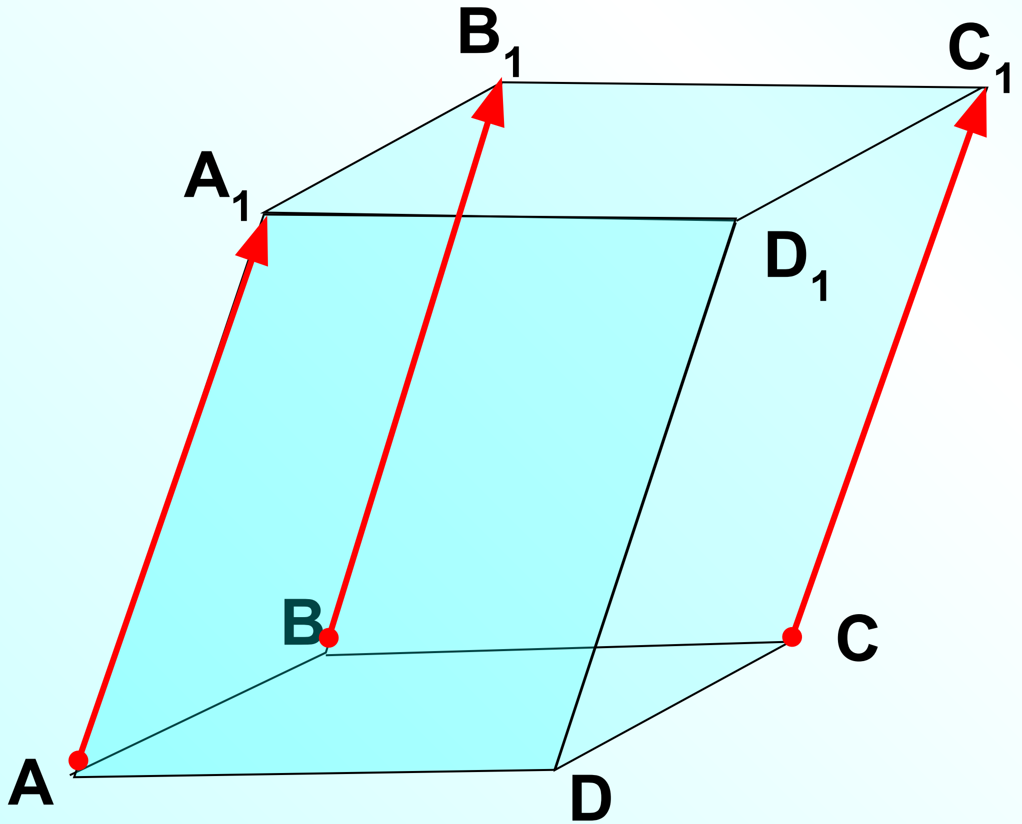
Любые два вектора компланарны.



№355 Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$. Компланарны ли векторы?

$\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{CC_1}, \overrightarrow{BB_1}$

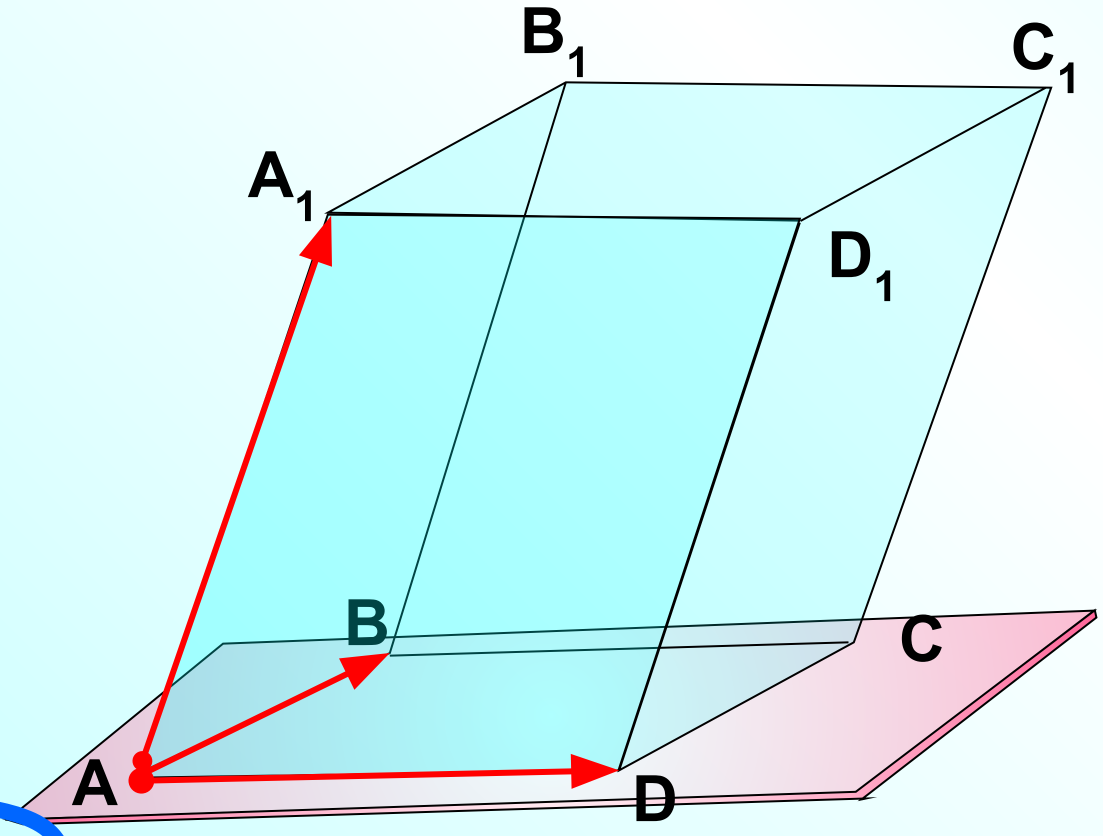
Три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, компланарны.



№355 Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$.
Компланарны ли векторы?

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$

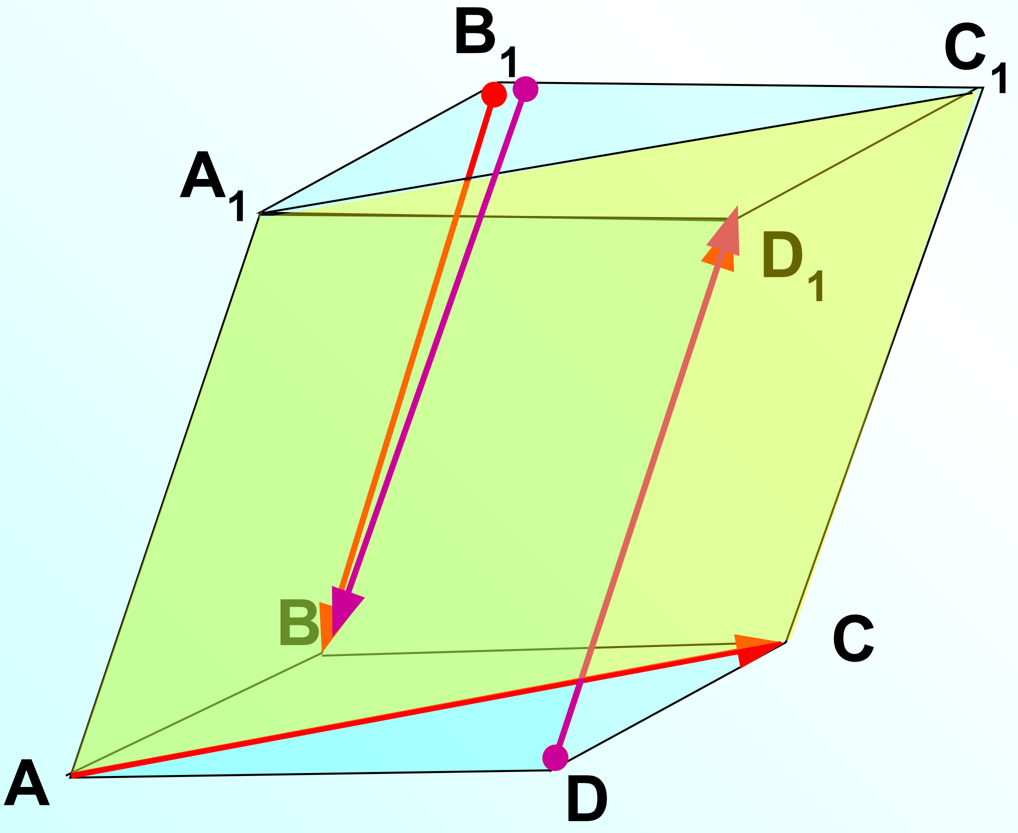
Векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ не компланарны, так как вектор $\overrightarrow{AA_1}$ не лежит в плоскости ABC.



№355 Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$.
Компланарны ли векторы?

$\overrightarrow{B_1B}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DD_1}$

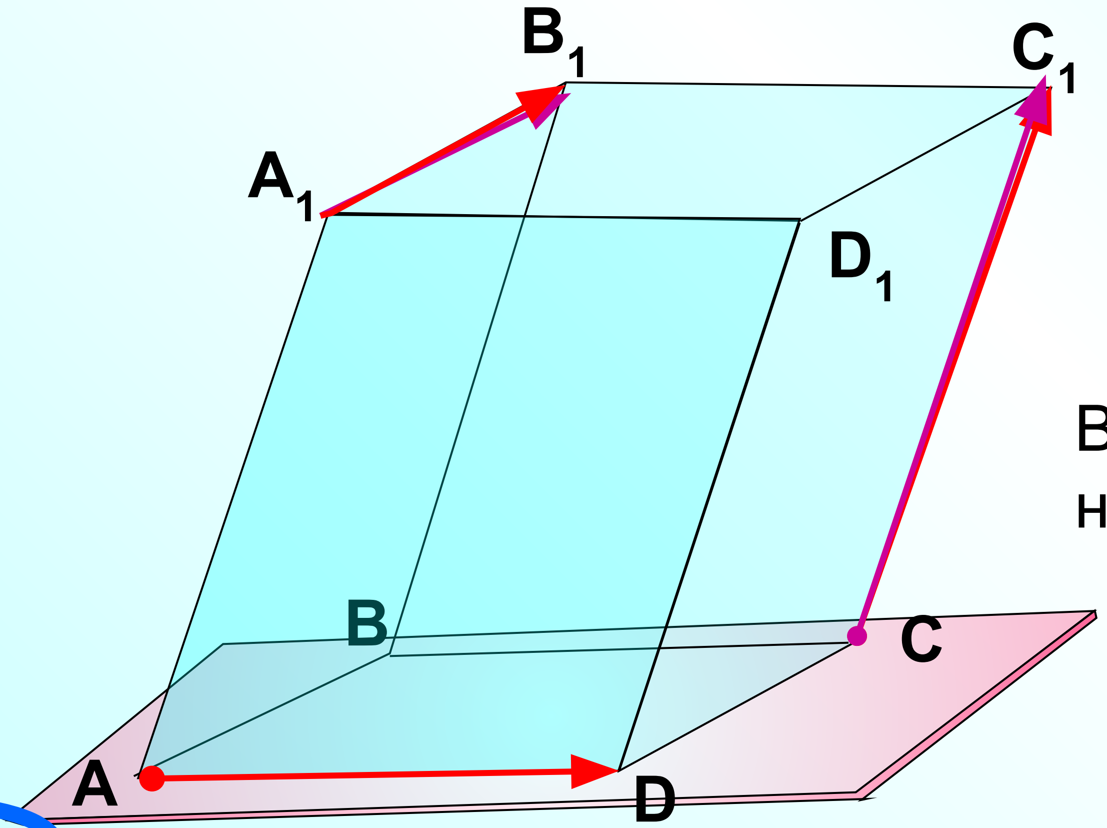
Три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, компланарны.



№355 Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$.
Компланарны ли векторы?

$\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$

Векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ не компланарны, так как вектор $\overrightarrow{AA_1}$ не лежит в плоскости ABC.



Векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$ не компланарны

Любые два вектора компланарны.

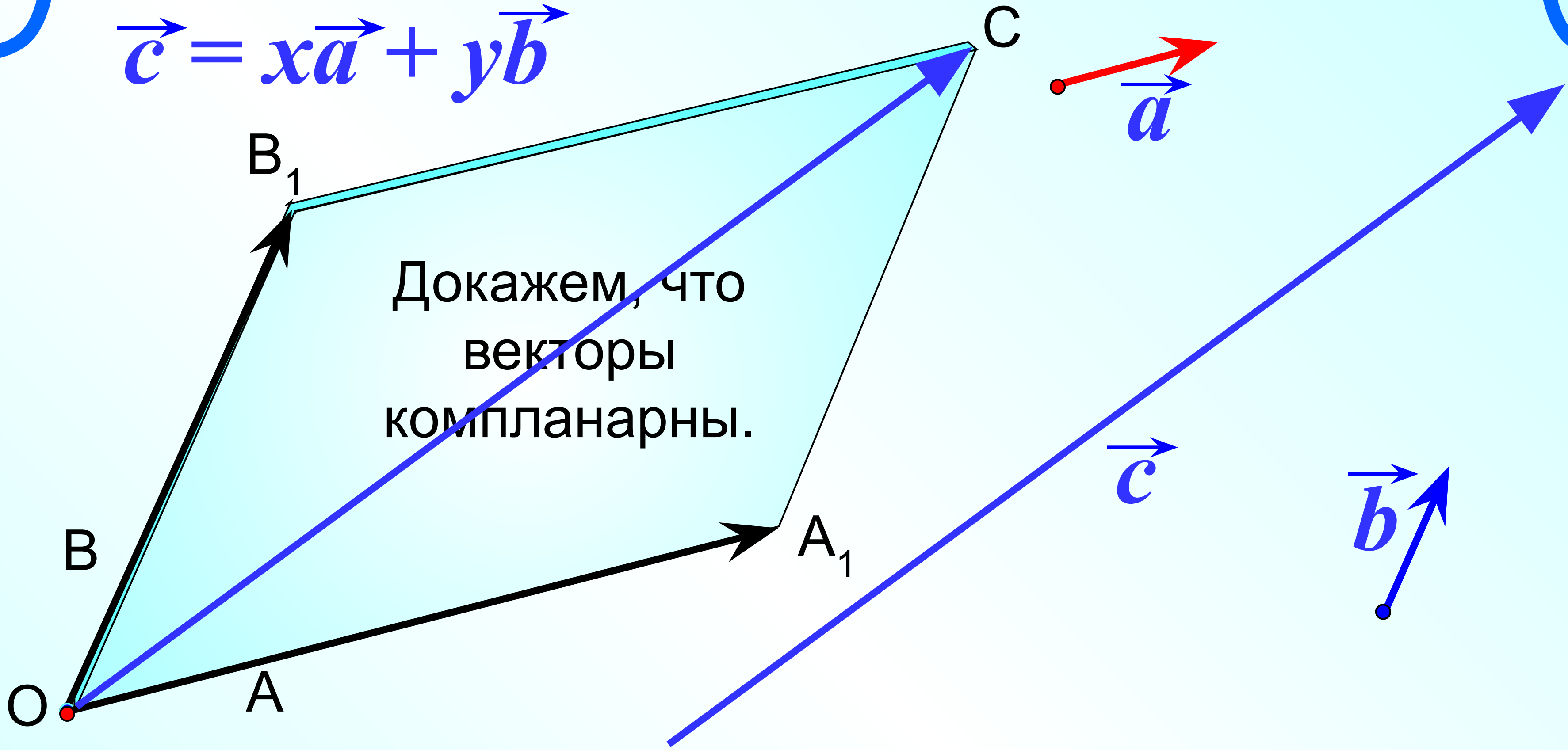
Три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, также компланарны.

Признак компланарности

Если вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. представить в виде $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$

где x и y – некоторые числа, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$



Векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ лежат в одной плоскости OAB.

$\overrightarrow{OA_1} = x\,\overrightarrow{OA}$ $\overrightarrow{OB_1} = y\,\overrightarrow{OB}$

Векторы $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OB_1}$ также лежат плоскости OAB.

А следовательно, и их сумма – вектор $\overrightarrow{OC} = x\,\overrightarrow{OA} + y\,\overrightarrow{OB}$, равный вектору $\vec{c}$.

Справедливо и обратное утверждение.

Признак компланарности

Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

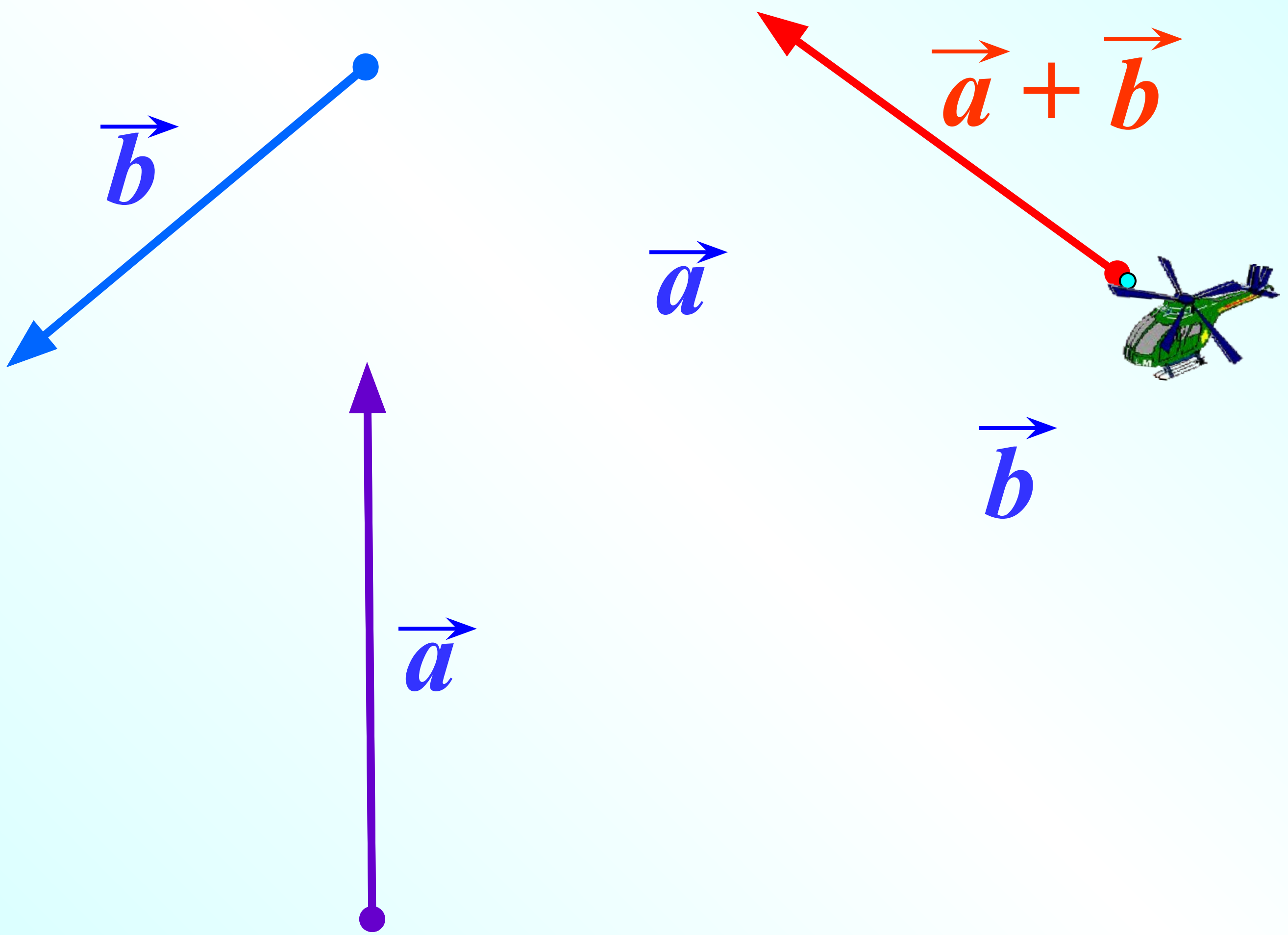
, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Если вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. представить в виде $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где x и y – некоторые числа, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

Сложение векторов.
Правило треугольника.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}$

ПОВТОРИМ

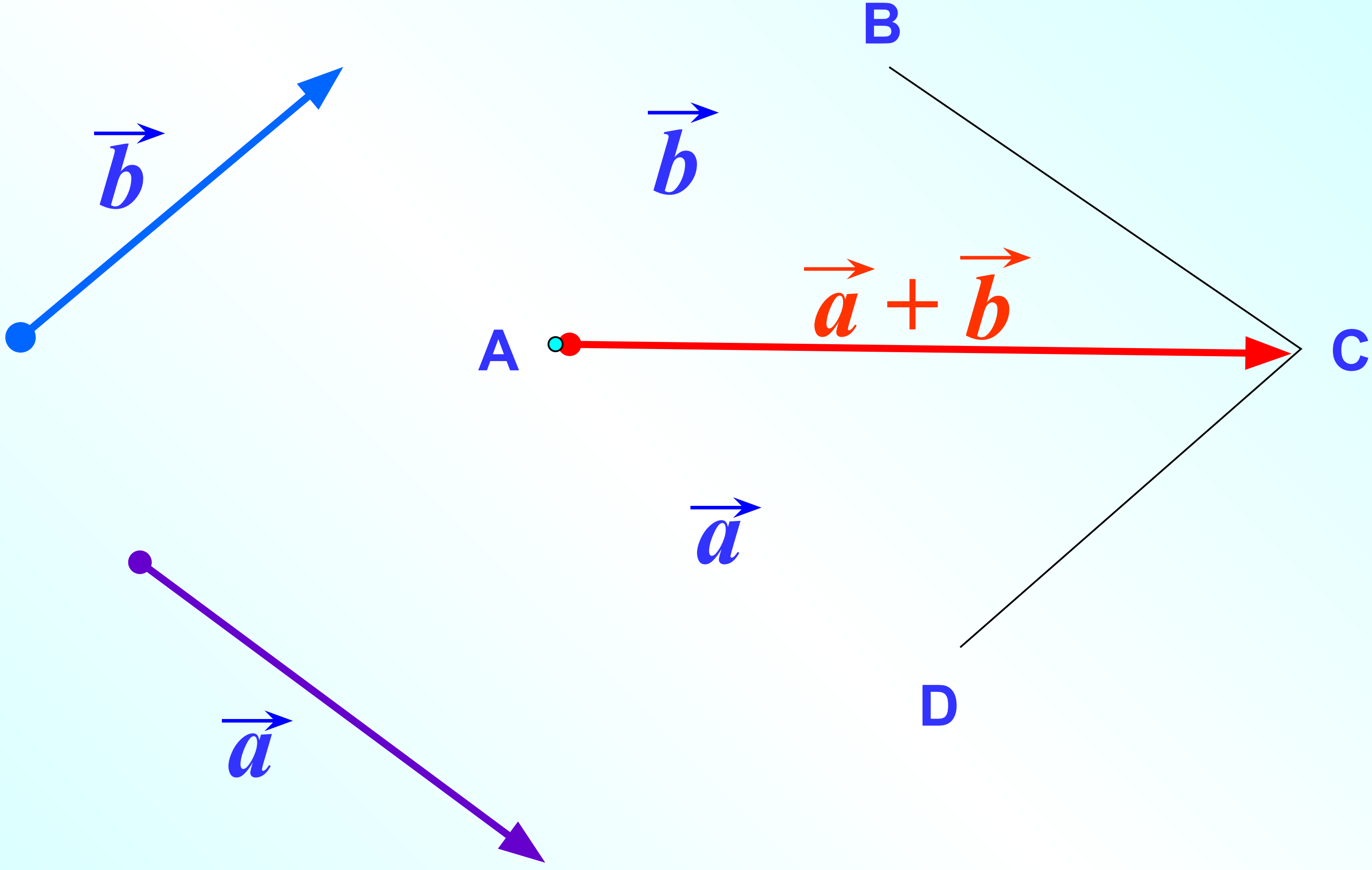


Сложение векторов. Правило параллелограмма.

ПОВТОРИМ

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}$

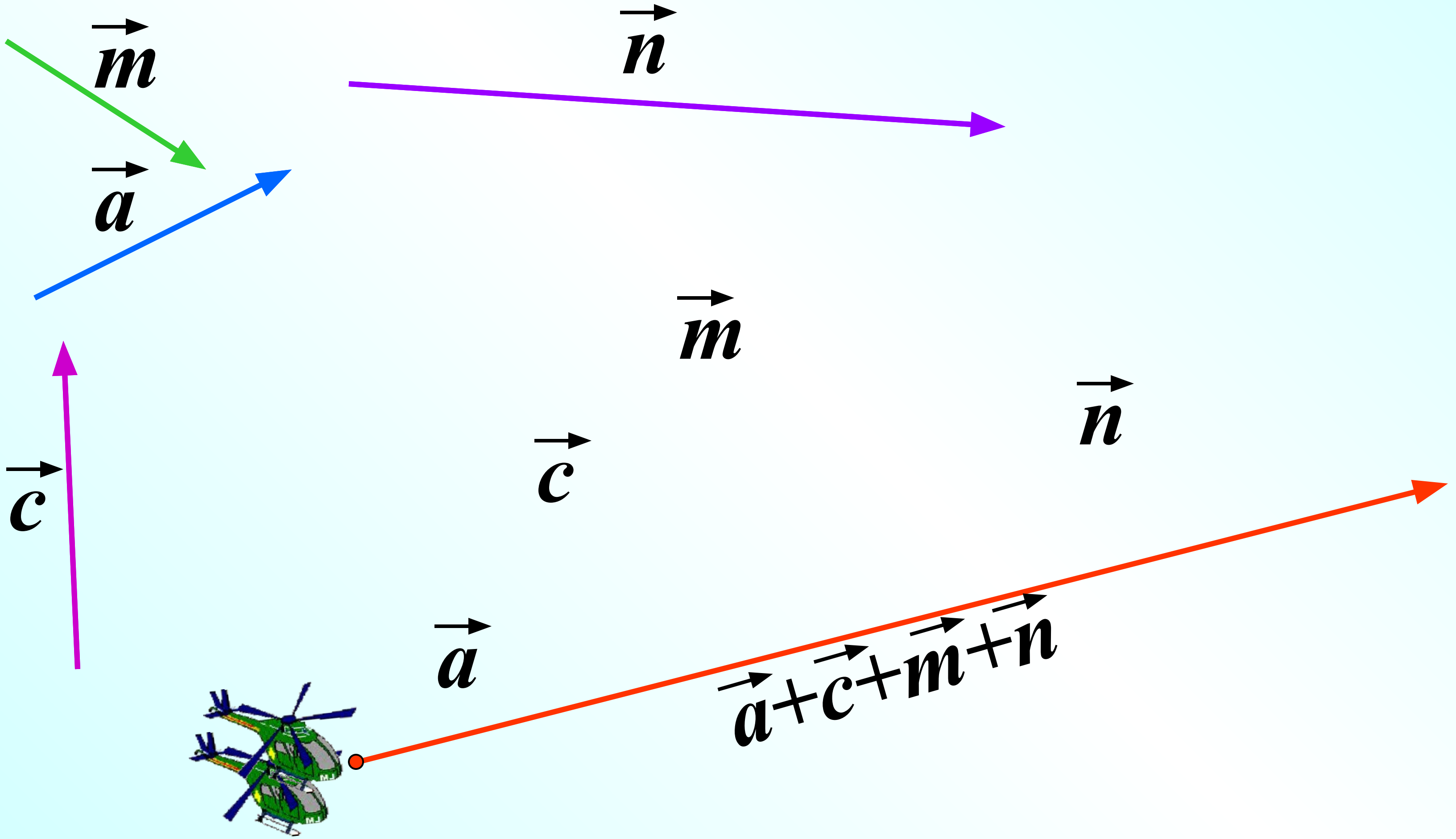
$\vec{a} + \vec{b}$



Сложение векторов.
Правило многоугольника.

ПОВТОРИМ

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{AO}$$

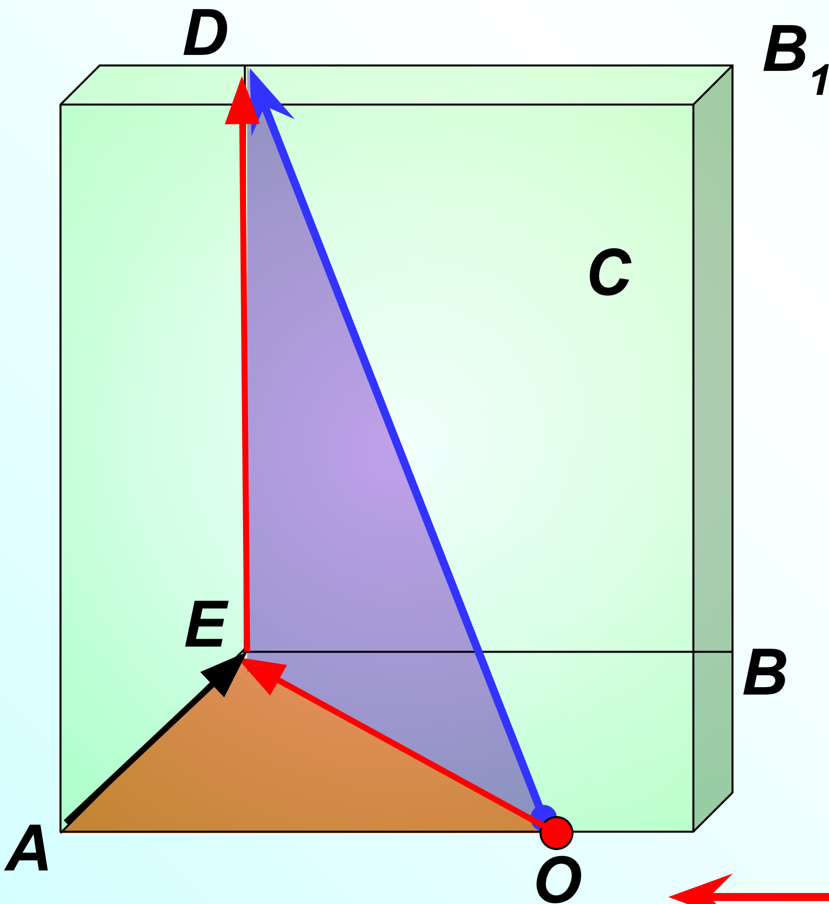


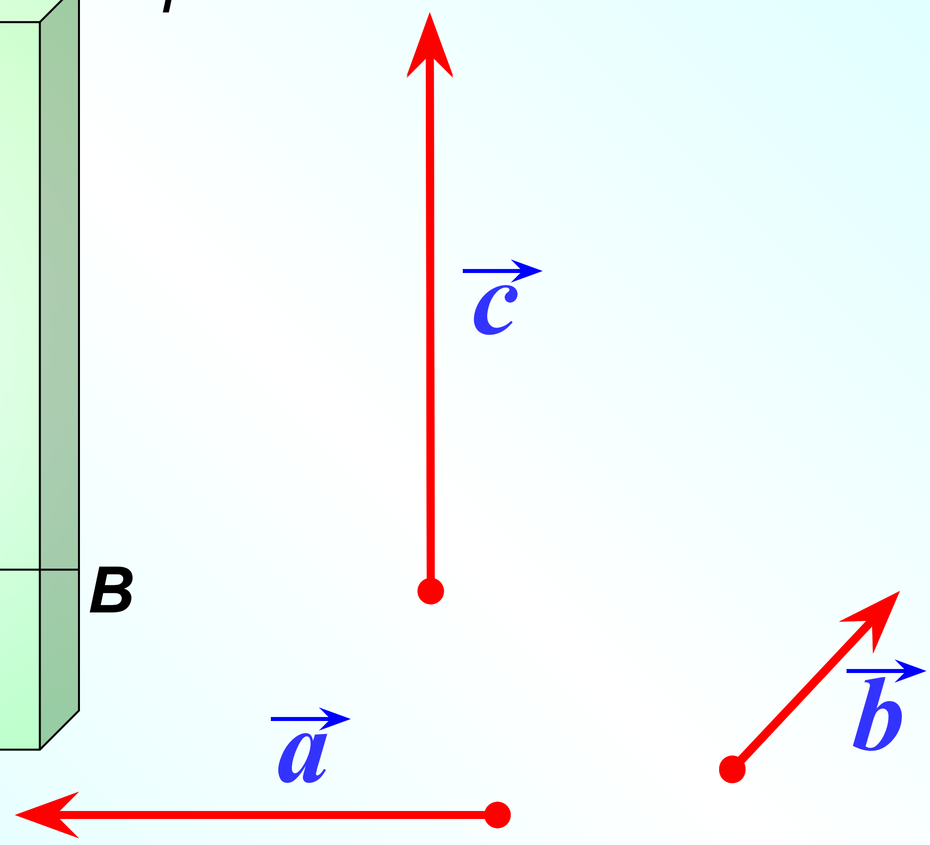
Правило параллелепипеда. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \overrightarrow{OD}$

из ΔOED из ΔOAE

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{ED}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE})+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=$$

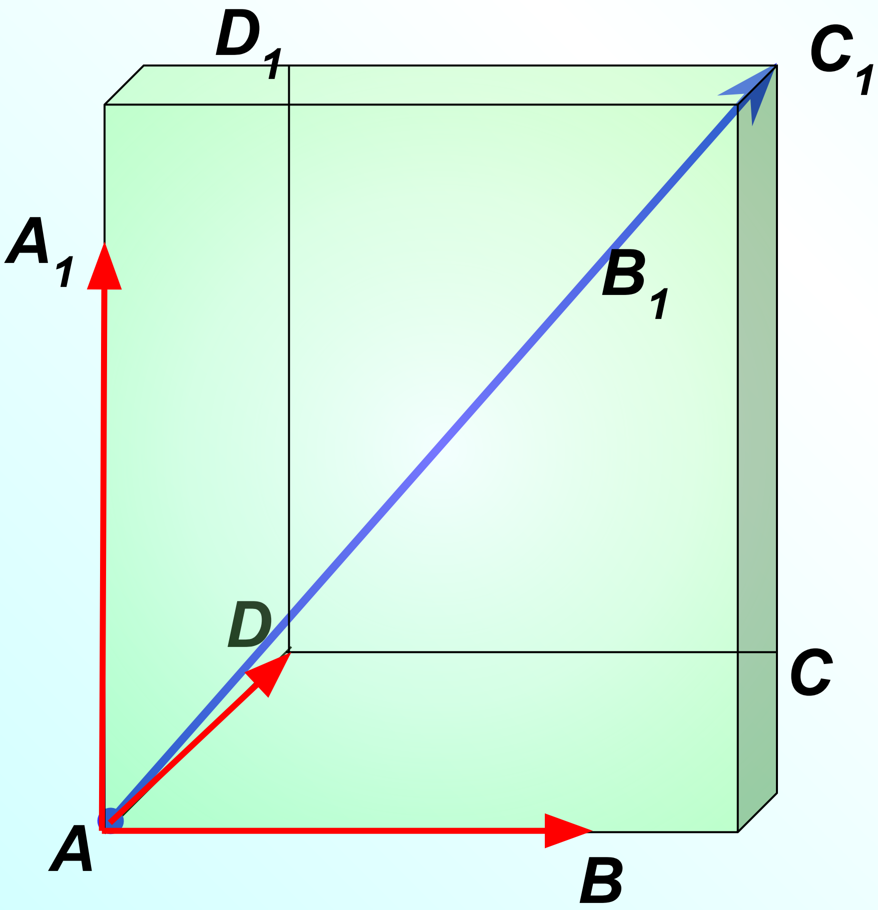
$$=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$





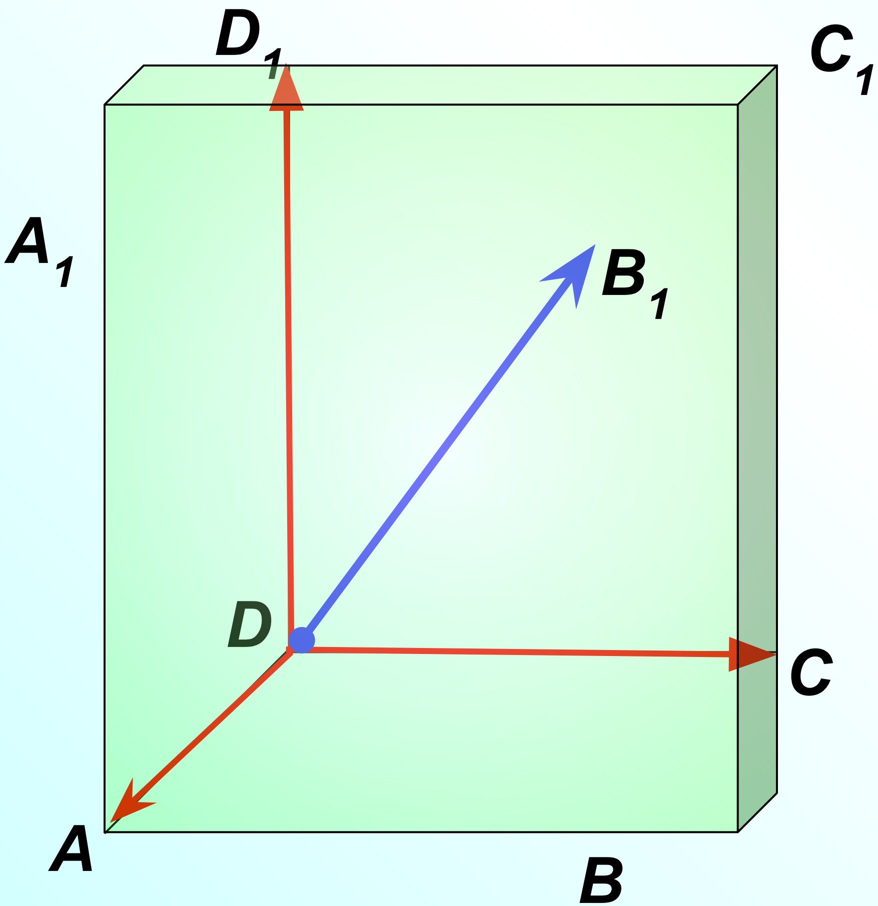
№358 Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$. Назовите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AC_1}$$



№358 Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$. Назовите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов:

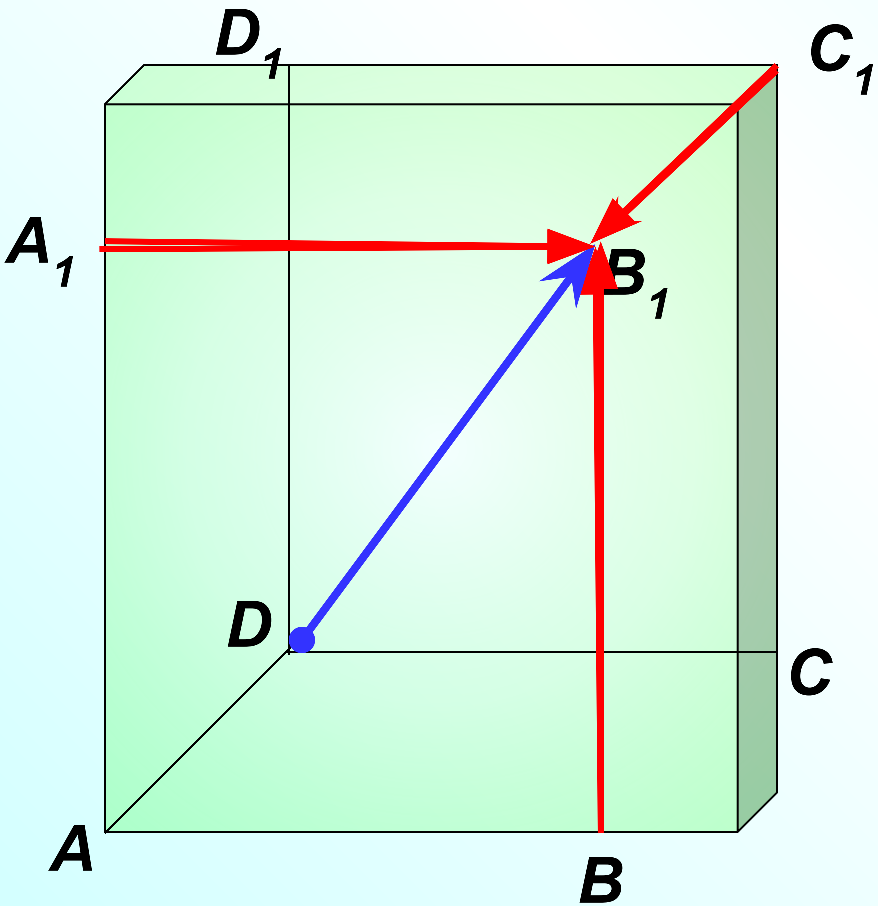
$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{DB_1}$$



№358 Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$. Назовите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов:

$$\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{BB_1}$$

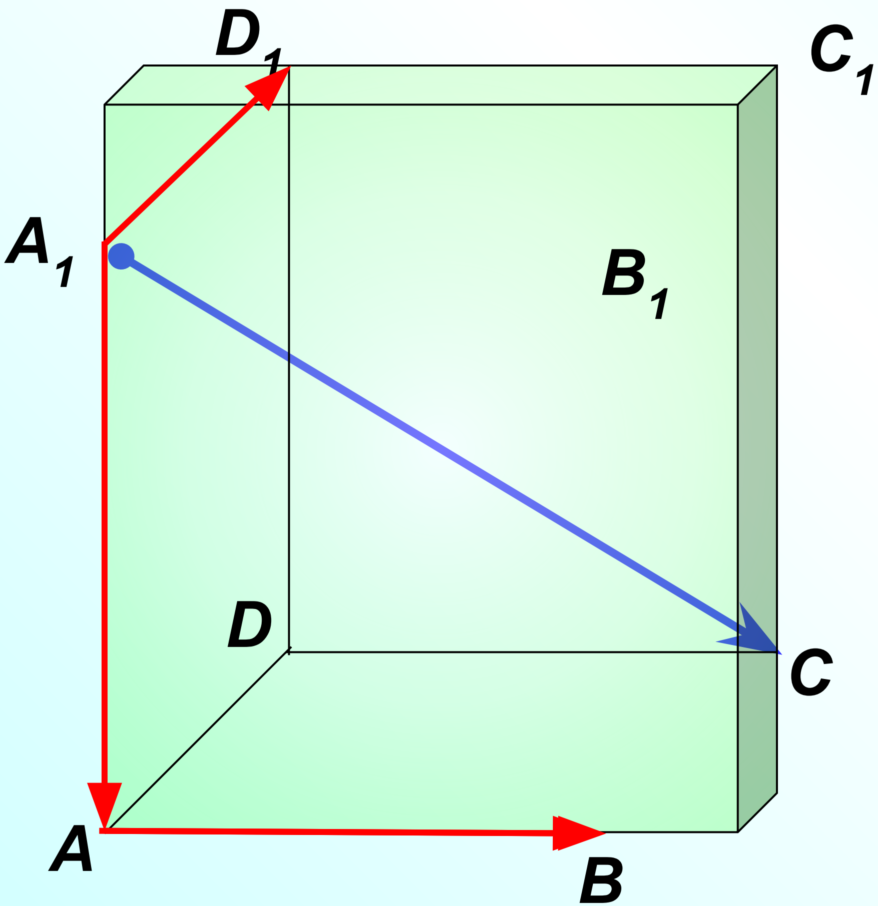
$$\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{DB_1}$$



№358 Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$. Назовите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов:

$$\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{AB}$$

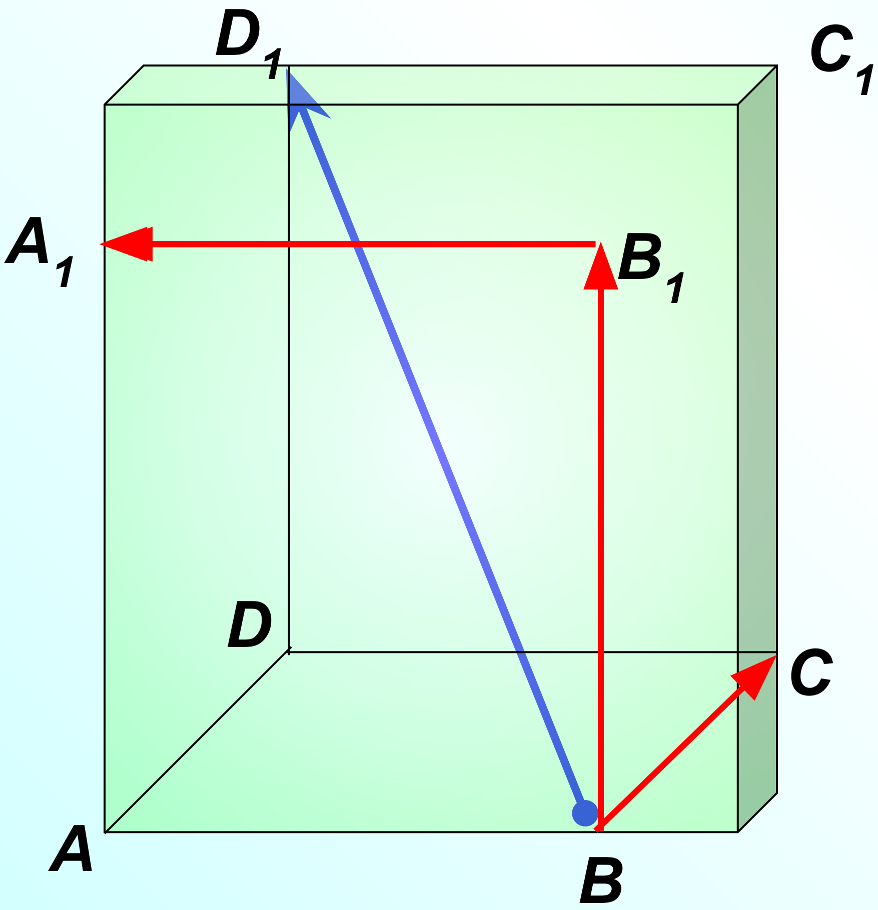
$$\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1C}$$



№358 Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$. Назовите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов:

$$\overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD_1}$$



Разложение вектора по трем некомпланарным векторам. Если вектор представлен в виде

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

где x, y и z - некоторые числа, то говорят, что вектор $\vec{p}$ разложен по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Числа x, y и z называются коэффициентами разложения.

Теорема о разложении вектора по трем некомпланарным векорам.

Любой вектор можно разложить по трем данным некомпланарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Докажем, что любой вектор $\vec{p}$ можно представить в виде

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

По правилу многоугольника $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{P_2P_1} + \overrightarrow{P_1P}$

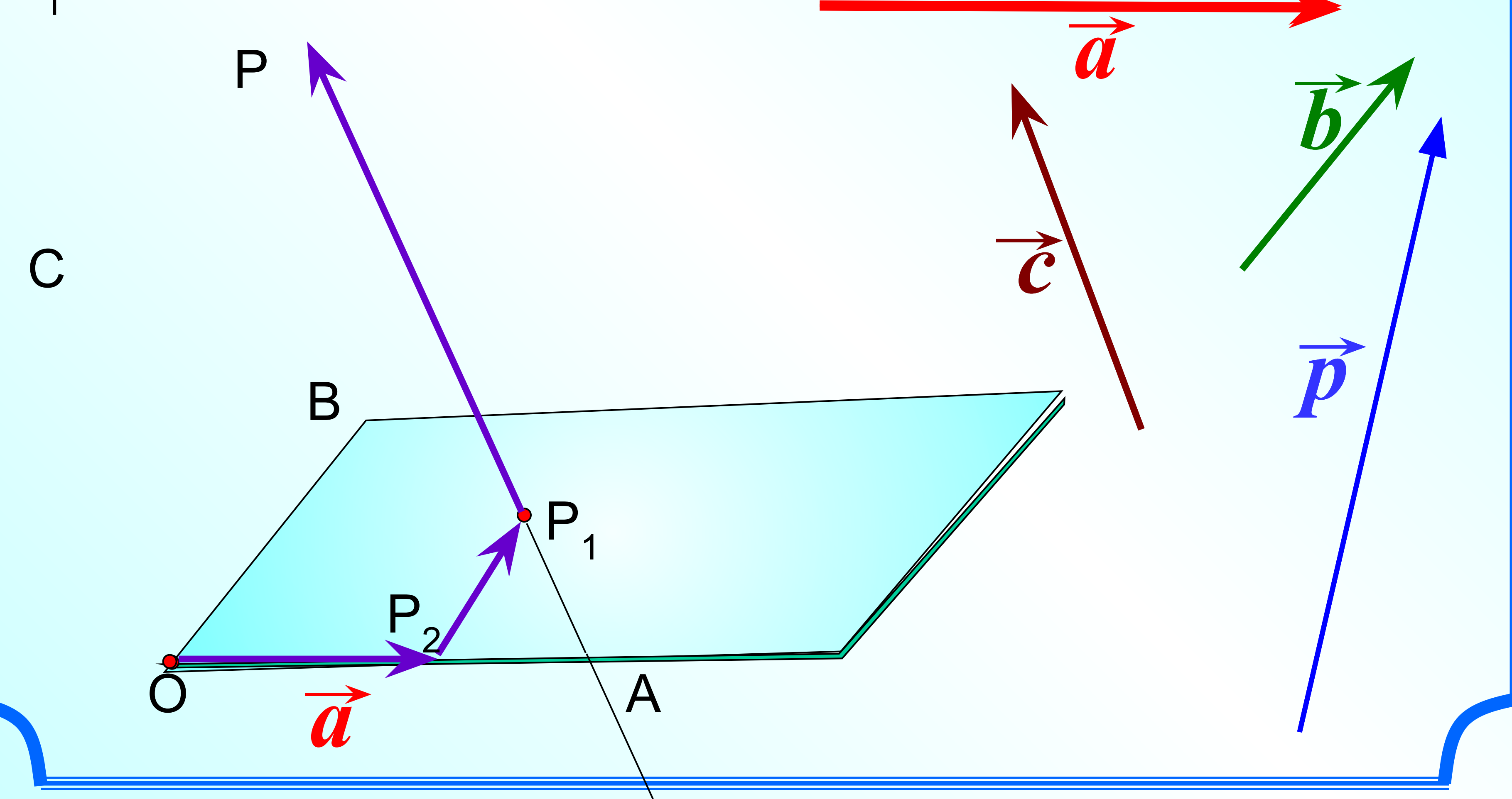
$\overrightarrow{OP_2} = x \cdot \overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{P_2P_1} = y \cdot \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{P_1P} = z \cdot \overrightarrow{OC}$

$$\overrightarrow{OP} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC}$$

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$



Докажем теперь, что коэффициенты разложения определяются единственным образом. Допустим, что это не так и существует другое разложение вектора

$$\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$$

$-$

Это равенство выполняется только тогда, когда

$$\vec{0} = (x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b} + (z - z_1)\vec{c}$$

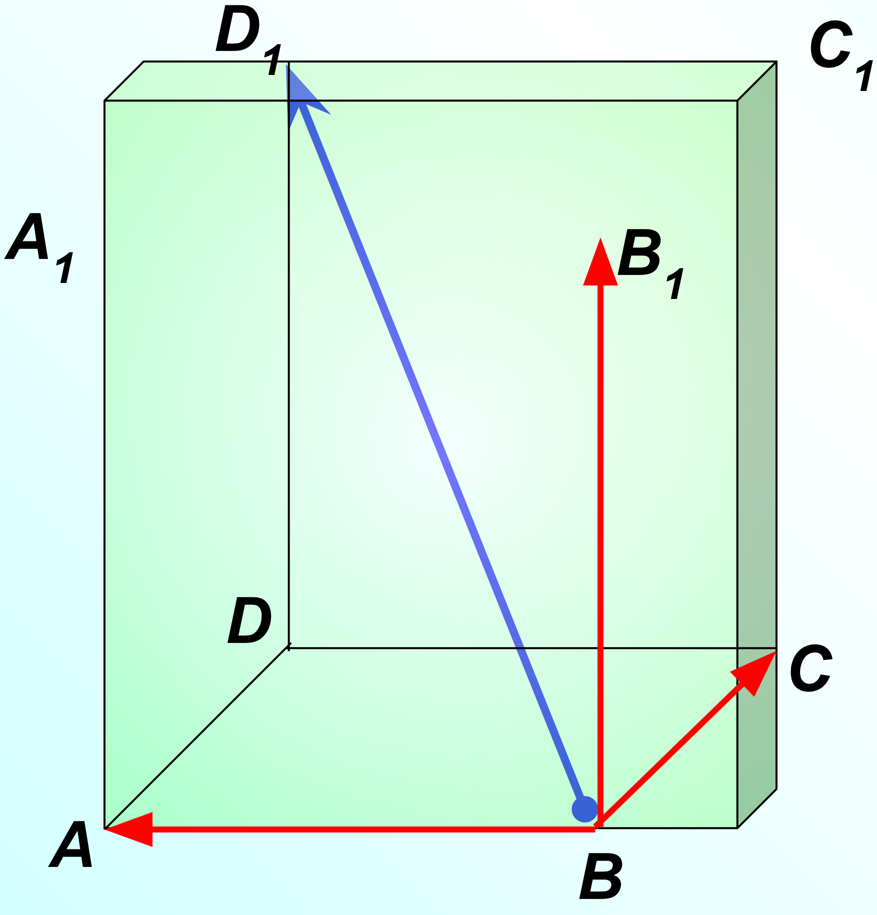
Если предположить, например, что $z - z_1 \neq 0$, то из этого равенства можно найти $\vec{c} = -\dfrac{x - x_1}{z - z_1}\vec{a} - \dfrac{y - y_1}{z - z_1}\vec{b}$

Тогда векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Это противоречит условию теоремы. Значит, наше предположение не верно, и $x = x_1,\ y = y_1,\ z = z_1$. Следовательно, коэффициенты разложения $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ определяются единственным образом.

№359 Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$.

Разложите вектор $\overrightarrow{BD_1}$ по векторам $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BB_1}$.

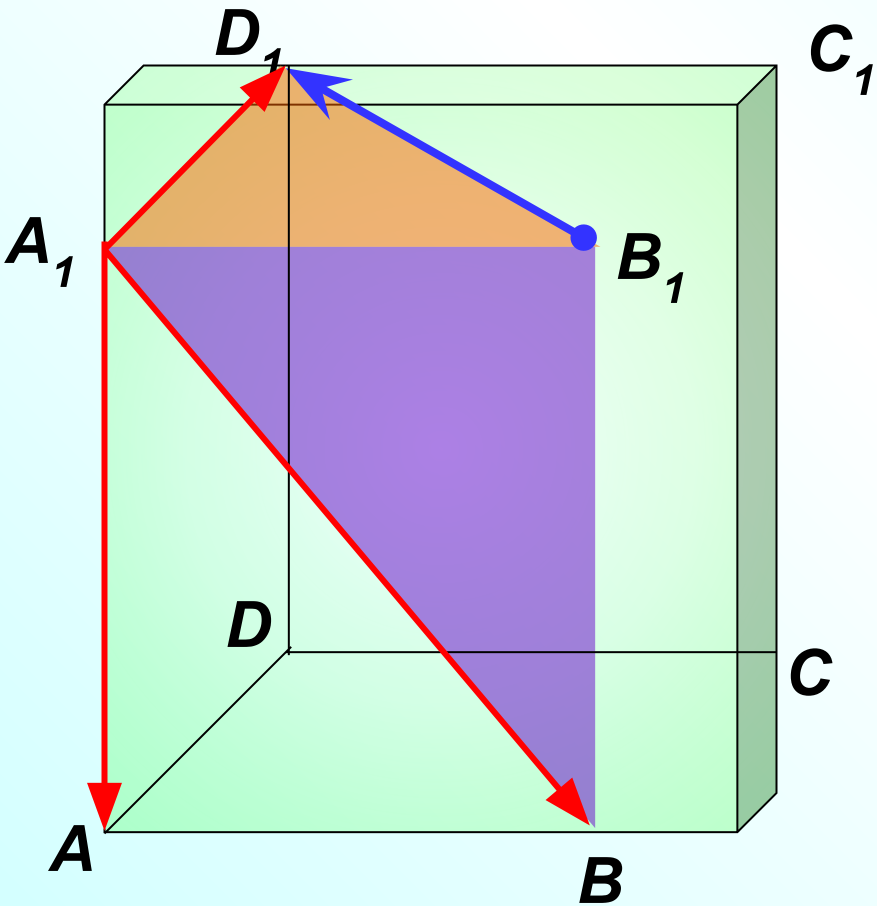
По правилу параллелепипеда $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}$



№359 Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$.

Разложите вектор $\overrightarrow{B_1D_1}$ по векторам $\overrightarrow{A_1A}$, $\overrightarrow{A_1B}$ и $\overrightarrow{A_1D_1}$.

По правилу треугольника из $\Delta A_1B_1D_1$:



$$\overrightarrow{B_1D_1} = \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{A_1D_1} =$$

из ΔA_1B_1B

$$= (\overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BA_1}) + \overrightarrow{A_1D_1} =$$

$$= (\overrightarrow{A_1A} - \overrightarrow{A_1B}) + \overrightarrow{A_1D_1} =$$

$$= \overrightarrow{A_1A} - \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{A_1D_1}$$