Прикладная механика

Теория механизмов и машин

Кинематический анализ механизмов

Основные задачи кинематического анализа механизмов

- Определение положений звеньев, включая и определение траекторий отдельных точек звеньев
- Определение скоростей и ускорений звеньев и точек звеньев

Кинематический анализ состоит в определении движения звеньев механизма по заданному движению начальных звеньев.

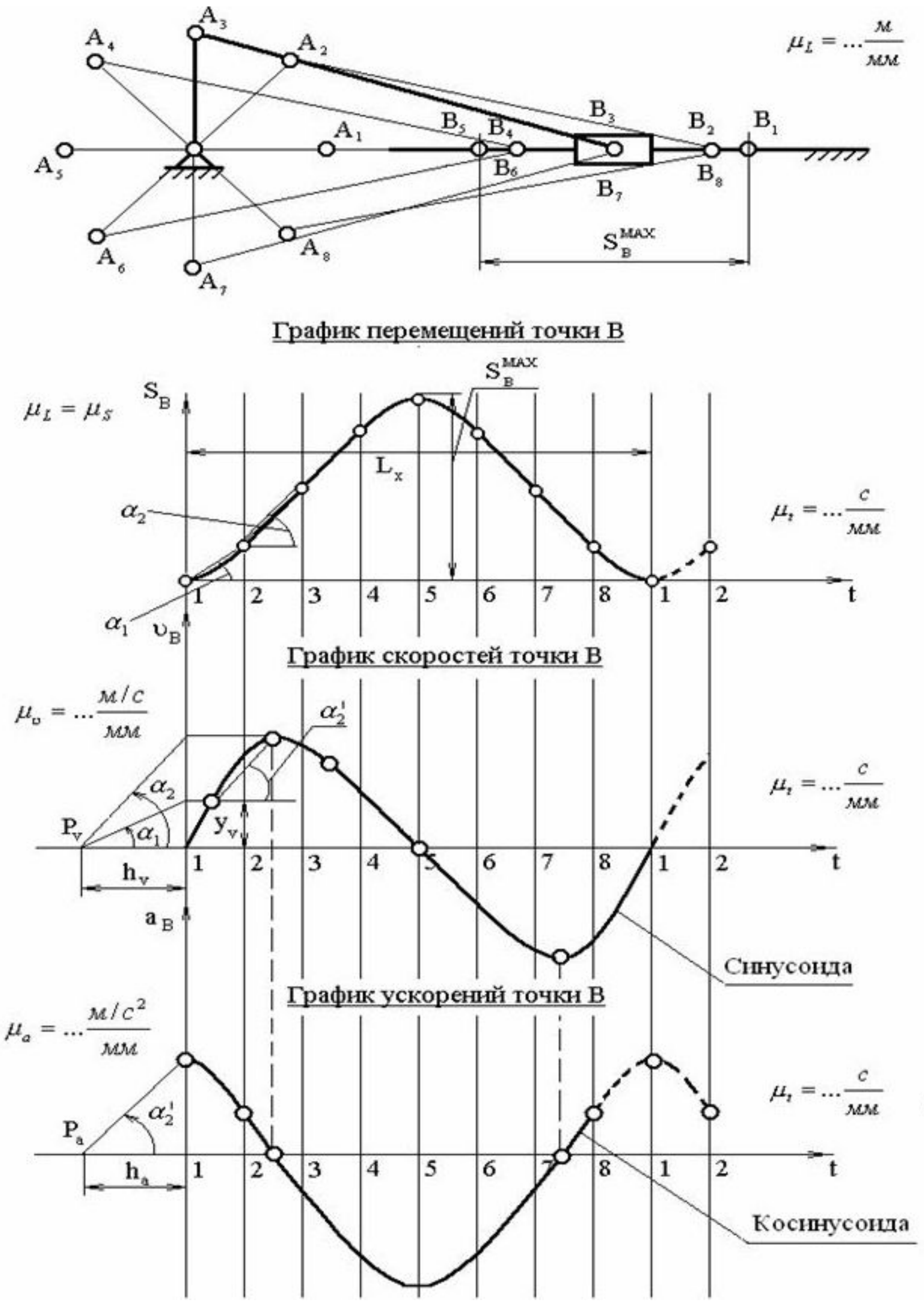
- **Начальное звено** – это звено, которому приписывается одна или несколько обобщенных координат механизма.
- Законы движения начальных звеньев считаются известными. Также задана кинематическая схема механизма со всеми размерами.

Методы кинематического анализа

- Графический
- Графо-аналитический
- Аналитический

Графические методы

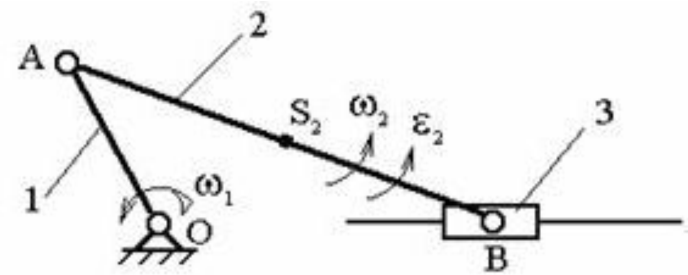
- Графические методы основаны на непосредственном построении траекторий движения наиболее характерных точек механизма, графическом дифференцировании графиков перемещений, скоростей.
- В настоящее время графические методы практически не применяются.



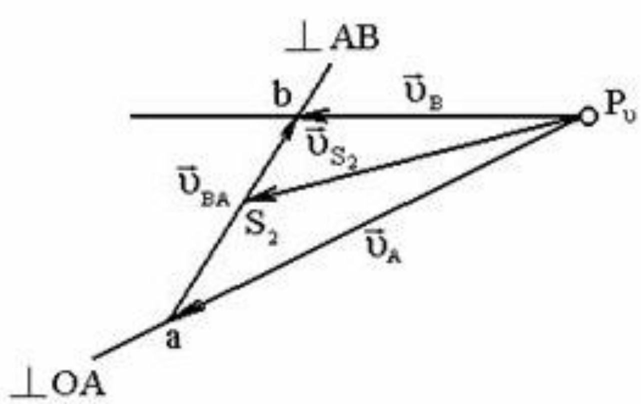
A1
A2
A3
A4
A5
A6
A7
A8
B1
B2
B3
B4
B5
B6
B7
B8
$\mu_L = \dots \frac{м}{мм}$
S_B^{MAX}
График перемещений точки В
S_B
$\mu_L = \mu_S$
L_x
α_2
α_1
$\mu_t = \dots \frac{c}{мм}$
1 2 3 4 5 6 7 8 1 2 t
υ_B
График скоростей точки В
$\mu_\upsilon = \dots \frac{м/c}{мм}$
α_2^1
P_v
y_v
h_v
a_B
Синусоида
График ускорений точки В
$\mu_a = \dots \frac{м/c^2}{мм}$
P_a
h_a
Косинусоида

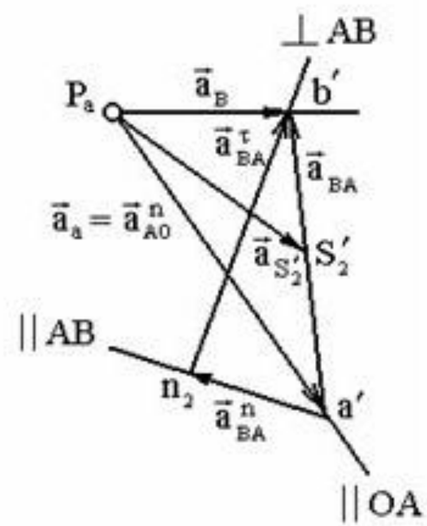
Графоаналитические методы

- К графоаналитическим методам относят методы построения планов скоростей и ускорений точек звеньев



План механизма (в масштабе длин μ_L)





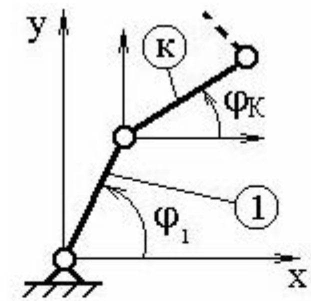
Свойства планов скоростей и ускорений

- Планом скоростей (ускорений) механизма называется чертеж, на котором изображены в виде отрезков векторы, равные по модулю и по направлению скоростям (ускорениям) различных точек механизма в данный момент.
- Сформулируем свойства планов скоростей и ускорений:
- 1) векторы абсолютных скоростей (ускорений) направлены из полюса;
- 2) векторы, соединяющие концы векторов абсолютных скоростей (ускорений), есть векторы относительных скоростей (ускорений);
- 3) точки, у которых скорости (ускорения) равны нулю, расположены в полюсе;
- 4) векторы относительных скоростей (полных относительных ускорений) образуют на плане скоростей (ускорений) фигуру, подобную жесткому контуру на плане механизма;
- 5) планы скоростей и ускорений позволяют определять величину и направление угловых скоростей и ускорений.

Аналитические методы

- Метод преобразования координат (метод Ю.Ф.Морошкина)
- Метод замкнутого векторного контура (метод В.А.Зиновьева)

Понятия и определения



- **<u>Функция положения</u>** - это аналитическая зависимость положения или координаты *К*-го звена (φ_k, X_K или Y_K) от положения ведущего (входного) звена φ_1, т.е. $\varphi_k(\varphi_1)$, $X_K(\varphi_1)$ или $Y_K(\varphi_1)$, где φ_k, X_K и Y_K – координаты, определяющие положение *К*-го звена (ведомого), а угол φ_1 – угол, характеризующий положение ведущего звена
- ***<u>Аналог скорости</u>*.**
- Угловая скорость *К*-го звена определяется зависимостью
- $$\omega_K = \frac{d\varphi_K}{dt} = \frac{d\varphi_K}{dt}\frac{d\varphi_1}{d\varphi_1} = \omega_1 \frac{d\varphi_K}{d\varphi_1} \qquad (3)$$
- где $\frac{d\varphi_K}{d\varphi_1}$ – *аналог скорости К*-го звена (первая передаточная функция) для вращающегося звена, величина безразмерная;
- $\frac{dx_K}{d\varphi_1}$ $\frac{dy_K}{d\varphi_1}$ – *аналоги скорости К*-го звена, движущегося поступательно,

величины безразмерные.

- ***<u>Аналог ускорения</u>***. Угловая скорость *К*-го звена определяется зависимостью, получаемой дифференцированием уравнения (3) по *dt*:

$$\varepsilon_K = \frac{d\omega_K}{dt} = \frac{d\omega_1}{dt}\frac{d\varphi_K}{d\varphi_1} + \omega_1 \frac{d^2\varphi_K}{d\varphi_1^2}\frac{d\varphi_1}{dt} = \varepsilon_1 \frac{d\varphi_K}{d\varphi_1} + \omega_1^2 \frac{d^2\varphi_K}{d\varphi_1^2}$$

- При дифференцировании предполагается, что угловая скорость *К*-го звена определяется зависимостью

$$\omega_K = \omega_1 \frac{d\varphi_K}{d\varphi_1}$$

- а угол является функцией угла : $\varphi_K = f(\varphi_1)$
- Величина $\frac{d^2\varphi_K}{d\varphi_1^2}$ – **<u>аналог ускорения К-го звена</u>**, совершающего вращательное движение,
-
- Величины $\frac{d^2 x_K}{d\varphi_1^2}$ и $\frac{d^2 y_K}{d\varphi_1^2}$ – аналоги ускорения *К*-го звена, двигающегося поступательно, в проекциях на оси *X* и *Y*.

- Величину $\frac{d\varphi_K}{d\varphi_1}$ называют ещё ***передаточным отношением***, так как выражение можно преобразовать, умножив и разделив его на величину *dt:*

$$\frac{d\varphi_K}{d\varphi_1} = \frac{d\varphi_K dt}{d\varphi_1 dt} = \frac{\omega_K}{\omega_1}$$

- Отношение угловых скоростей в механике называют передаточным отношением . $U_{K-1} = \frac{\omega_K}{\omega_1}$
- Аналог скорости звена также называют ***первой передаточной функцией*****.**

Функции положения	Задача о скоростях	Задача об ускорения
Определить функции положения: $\varphi_K(\varphi_1)$ $x_K(\varphi_1)$ $y_K(\varphi_1)$	Определение аналогов скоростей $\frac{d\varphi_K}{d\varphi_1};\frac{dx_K}{d\varphi_1};\frac{dy_K}{d\varphi_1}$ Вычисление скоростей $\omega_K=\omega_1\frac{d\varphi_K}{d\varphi_1},$ $\upsilon_{Kx}=\omega_1\frac{dx_K}{d\varphi_1},$ $\upsilon_{Ky}=\omega_1\frac{dy_K}{d\varphi_1}$	Определение аналогов ускорений $\frac{d^2\varphi_K}{d\varphi_1^2};\frac{d^2x_K}{d\varphi_1^2};\frac{d^2y_K}{d\varphi_1^2}$ Вычисление ускорений $\varepsilon_K=\varepsilon_1\frac{d\varphi_K}{d\varphi_1}+\omega_1^2\frac{d^2\varphi_K}{d\varphi_1^2};$ $a_{Kx}=\varepsilon_1\frac{dx_K}{d\varphi_1}+\omega_1^2\frac{d^2x_K}{d\varphi_1^2};$ $a_{Ky}=\varepsilon_1\frac{dy_K}{d\varphi_1}+\omega_1^2\frac{d^2y_K}{d\varphi_1^2}.$

Метод замкнутых векторных контуров

Используем метод замкнутых векторных контуров (рис. 3.7).

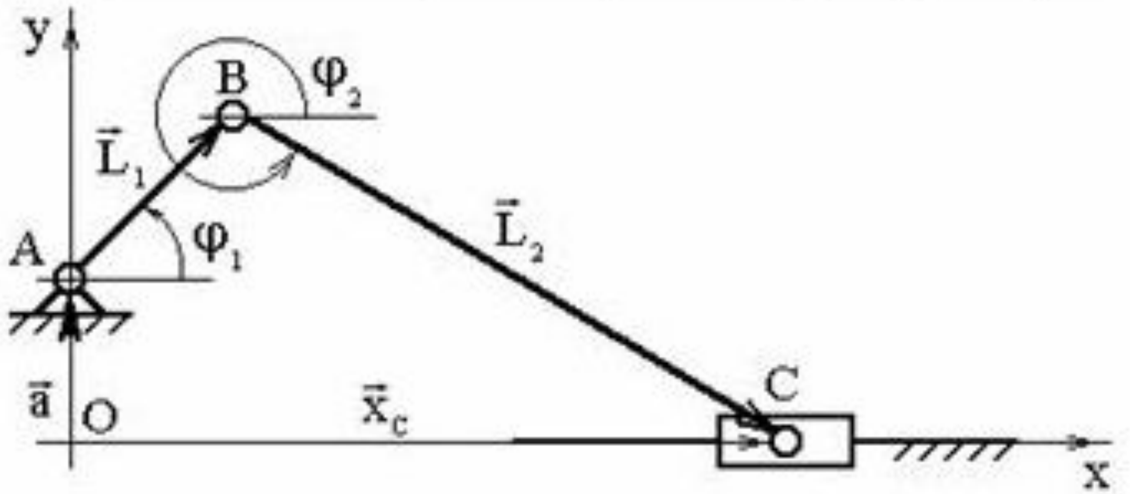


Рис. 3.20. Замкнутый векторный контур кривошипно-ползунного механизма

Рассмотрим замкнутый векторный контур.

Составим векторное уравнение: $\vec{a}+\vec{L}_1+\vec{L}_2=\vec{x}_c$

Спроектируем векторное уравнение на оси X и Y

$$\begin{cases} L_1\cos\varphi_1 + L_2\cos\varphi_2 = x_c; \\ a + L_1\sin\varphi_1 - L_2\sin\varphi_2 = 0. \end{cases}$$

- *<u>Решение задачи о положениях</u>*
- Определим функции положения ползуна C и шатуна 2 .

$$\varphi_2 = \arcsin\frac{a + L_1\sin\varphi_1}{L_2} \quad x_c = L_1\cos\varphi_1 + L_2\cos(\arcsin\frac{a + L_1\sin\varphi_1}{L_2})$$

- *<u>Решение задачи о скоростях</u>*
- Определим аналог скорости ползуна и шатуна , для чего продифференцируем зависимости Xc(φ_1) и $\varphi_2(\varphi_1)$

$$\frac{dx_c}{d\varphi_1} = -L_1\sin\varphi_1 - L_2\sin(\arcsin\frac{a + L_1\sin\varphi_1}{L_2})\frac{L_1}{L_2}\frac{\cos\varphi_1}{\cos(\arcsin\frac{a + L_1\sin\varphi_1}{L_2})}$$

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{L_1}{L_2}\frac{\cos\varphi_1}{\cos(\arcsin\frac{a + L_1\sin\varphi_1}{L_2})}$$

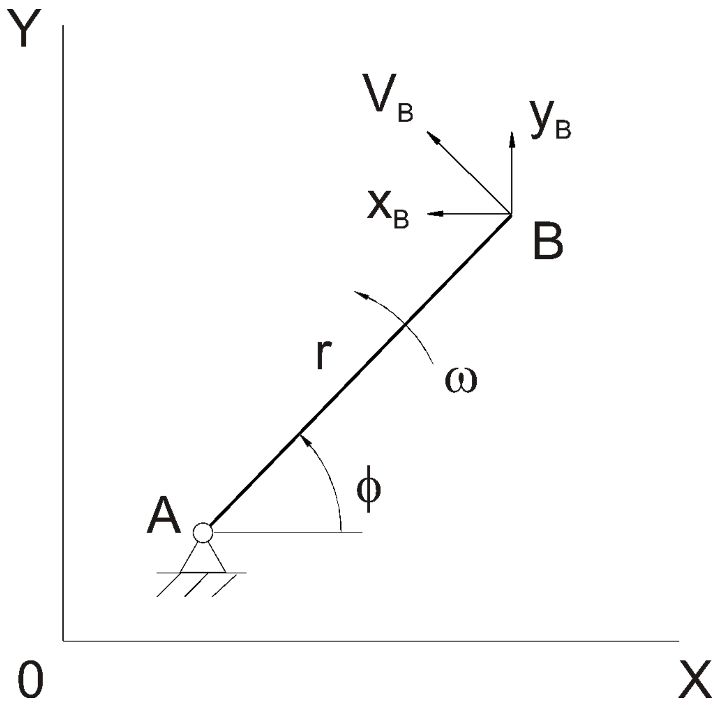
Тогда угловая скорость шатуна $\omega_2 = \omega_1\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}$

ползуна $\upsilon_C = \omega_1\frac{dx_C}{d\varphi_1}$

Алгоритмический метод векторного анализа

- Кинематический анализ механизма ведется в следующем **порядке**: сначала исследуется движение начальных звеньев, а затем выполняется кинематический анализ отдельных групп Ассура в порядке их присоединения при образовании механизма.
- В этом случае в каждой структурной группе будут известны положения, скорости и ускорения тех элементов кинематических пар, к которым присоединяется данная группа.
- Каждому классу групп Ассура соответствует определенный способ кинематического анализа.

Алгоритм анализа механизма 1-го класса



Дано: $\{r, \varphi, \omega, \varepsilon, x_A, y_A\}$

Найти: $\{x_B, y_B, \dot{x}_B, \dot{y}_B, \ddot{x}_B, \ddot{y}_B\}$

$$V_B = \sqrt{\dot{x}_B^{\,2} + \dot{y}_B^{\,2}}$$

$$a_B = \sqrt{\ddot{x}_B^{\,2} + \ddot{y}_B^{\,2}}$$

Алгоритм для механизма 1 класса

$$x_B = x_A + r \cdot \cos\varphi$$

$$y_B = y_A + r \cdot \sin\varphi$$

$$\dot{x}_B = -r \cdot \omega \cdot \sin\varphi$$

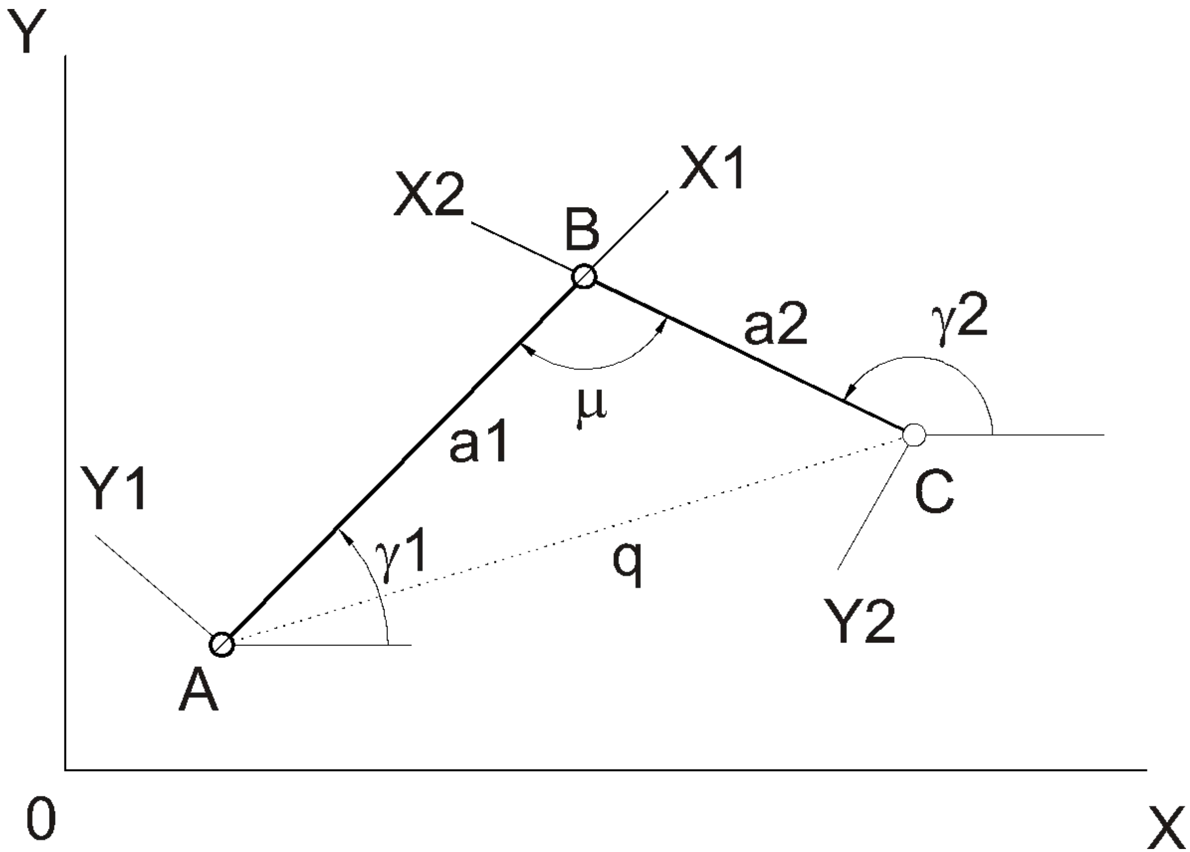
$$\dot{y}_B = r \cdot \omega \cdot \cos\varphi$$

$$\ddot{x}_B = -r \cdot \omega^2 \cdot \cos\varphi - r \cdot \varepsilon \cdot \sin\varphi$$

$$\ddot{y}_B = -r \cdot \omega^2 \cdot \sin\varphi + r \cdot \varepsilon \cdot \cos\varphi$$

$\varphi = \omega t$
$d\varphi/dt = \omega$

Алгоритм анализа механизма для группы Ассура 2-го класса



Будем считать M=-1, если при обходе тре угольника ABC по часовой стрелке мы последовательно встретим вершины A,B,C

Дано: a1, a2, xA, yA, xC, yC, M (M – коэффициент сборки)

Найти: $x'_A, y'_A, x''_A, y''_A, x'_C, y'_C, x''_C, y''_C$

Алгоритм анализа механизма для группы Ассура 2-го класса

Для решения задачи о положениях звеньев данной группы воспользуемся векторным уравнением замкнутости контура

$$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$$

При проецировании данного уравнения на оси координат получим

$$a_1 \cdot \cos\gamma_1 = x_C - x_A + a_2 \cdot \cos\gamma_2$$

(1)

$$a_1 \cdot \sin\gamma_1 = y_C - y_A + a_2 \cdot \sin\gamma_2$$

Алгоритм анализа механизма для группы Ассура 2-го класса

Расчет геометрических параметров

$$q = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$$

Проверка условия $\left| a_1 - a_2 \right| < q < a_1 + a_2$

Если условие не выполняется, то двухповодковая группа не существует

$$\mu = \arccos \frac{a_1{}^2 + a_2{}^2 - q^2}{2 \cdot a_1 \cdot a_2}$$

$$\cos\gamma_1 = \left[(x_C - x_A) \cdot (a_1 - a_2 \cdot \cos\mu) + M \cdot (y_C - y_A) \cdot a_2 \cdot \sin\mu \right] \cdot q^{-2}$$ (2)

$$\sin\gamma_1 = \left[(y_C - y_A) \cdot (a_1 - a_2 \cdot \cos\mu) - M \cdot (x_C - x_A) \cdot a_2 \cdot \sin\mu \right] \cdot q^{-2}$$

$$\gamma_2 = \gamma_1 - M \cdot \mu$$

Алгоритм анализа механизма для группы Ассура 2-го класса

Определение кинематических параметров

Вычисляемые кинематические параметры группы определяются путем двукратного дифференцирования по времени уравнений (1) и (2), связывающих ее геометрические параметры

При первом дифференцировании (1) получаются два уравнения, линейных относительно двух искомых скоростей, а при втором дифференцировании – два уравнения, линейных относительно двух искомых ускорений. (второе дифференцирование на слайде не представлено)

$$-a_1 \cdot \dot{\gamma}_1 \cdot \sin\gamma_1 = \dot{x}_C - \dot{x}_A - a_2 \cdot \dot{\gamma}_2 \cdot \sin\gamma_2$$

$$a_1 \cdot \dot{\gamma}_1 \cdot \cos\gamma_1 = \dot{y}_C - \dot{y}_A + a_2 \cdot \dot{\gamma}_2 \cdot \cos\gamma_2$$

$$\dot{\gamma}_1 = -M \cdot [(\dot{x}_C - \dot{x}_A)\cos\gamma_2 + (\dot{y}_C - \dot{y}_A)\sin\gamma_2] \cdot (a_1 \cdot \sin\mu)^{-1}$$

$$\dot{\gamma}_2 = -M \cdot [(\dot{x}_C - \dot{x}_A)\cos\gamma_1 + (\dot{y}_C - \dot{y}_A)\sin\gamma_1] \cdot (a_2 \cdot \sin\mu)^{-1}$$