

# Математическое и имитационное моделирование

---

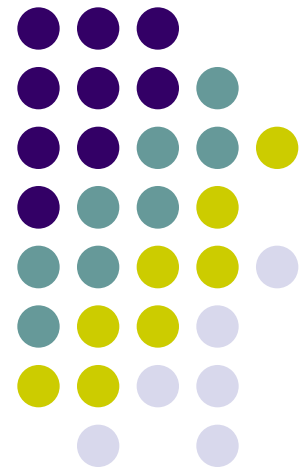
Лектор:  
Цыганова Мария Сергеевна



# 1. Основные понятия теории моделирования

---

Общая характеристика  
методов и средств  
моделирования





*Моделирование* (в широком смысле) – основной метод исследований во всех областях знаний и научно обоснованный метод оценок характеристик сложных систем, используемый для принятия решений в различных сферах инженерной деятельности.



# Модели, моделирование

**Моделью** (лат. *modulus* – мера) называется объект-заместитель, который в определенных условиях может заменять объект-оригинал, воспроизводя интересующие исследователя свойства оригинала.

Замещение одного объекта другим с целью получения информации о важнейших свойствах объекта-оригинала с помощью объекта-модели называется **моделированием**.



*Моделирование* – процесс исследования реальной системы, включающий

- построение модели,
- изучение свойств модели,
- перенос полученных сведений на моделируемую систему.

По отношению к модели исследователь является экспериментатором (эксперимент проводится не с реальным объектом, а с его моделью).



*Функции моделирования* – описание, объяснение и прогнозирование поведения реальной системы.

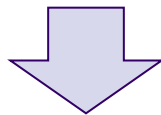
*Типовые цели моделирования:*

- поиск оптимальных или близких к оптимальным решений,
- оценка эффективности решений,
- определение свойств системы (чувствительности к изменению значений характеристик и др.),
- установление взаимосвязей между характеристиками системы, и др.



## Важно:

модель является целевым отображением оригинала (создается под поставленную задачу и должна отражать свойства объекта, интересующие исследователя с точки зрения решения этой задачи)



один и тот же объект-оригинал может иметь множество моделей, построенных в соответствии с различными целями исследования.



Модель называется ***адекватной*** объекту, если результаты моделирования подтверждаются и могут служить основой для прогнозирования процессов, протекающих в исследуемых объектах.

*Адекватность* модели зависит от цели моделирования и принятых критериев.



# Системный подход в моделировании систем



*Классический (индуктивный)* подход

рассматривает систему путем перехода от частного к общему;

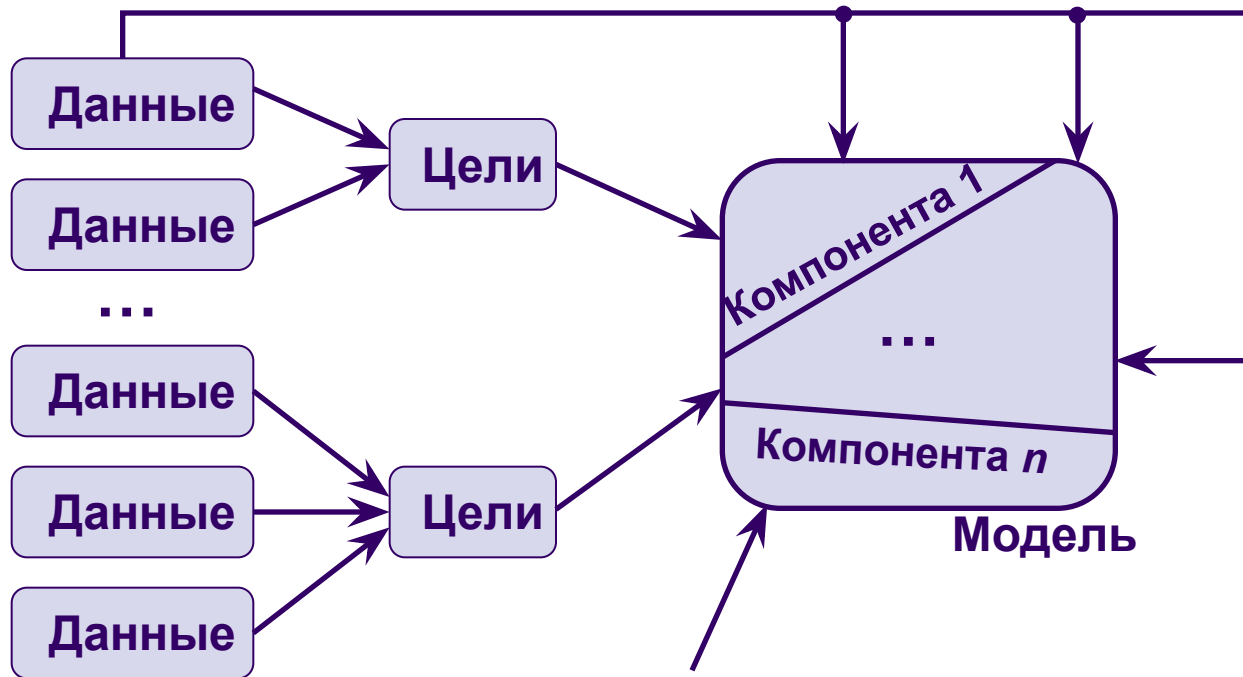
синтезирует (конструирует) систему путем слияния ее компонент, разрабатываемых отдельно.

*Системный* подход предполагает последовательный переход от общего к частному:

в основе рассмотрения лежит цель;

исследуемый объект выделяется из окружающей среды.

## Синтез модели на основе классического (индуктивного) подхода



Реальный объект, подлежащий моделированию, разбивается на отдельные подсистемы.

По отдельной совокупности исходных данных ставится цель моделирования отдельной стороны функционирования системы; на базе этой цели формируется некоторая компонента будущей модели.

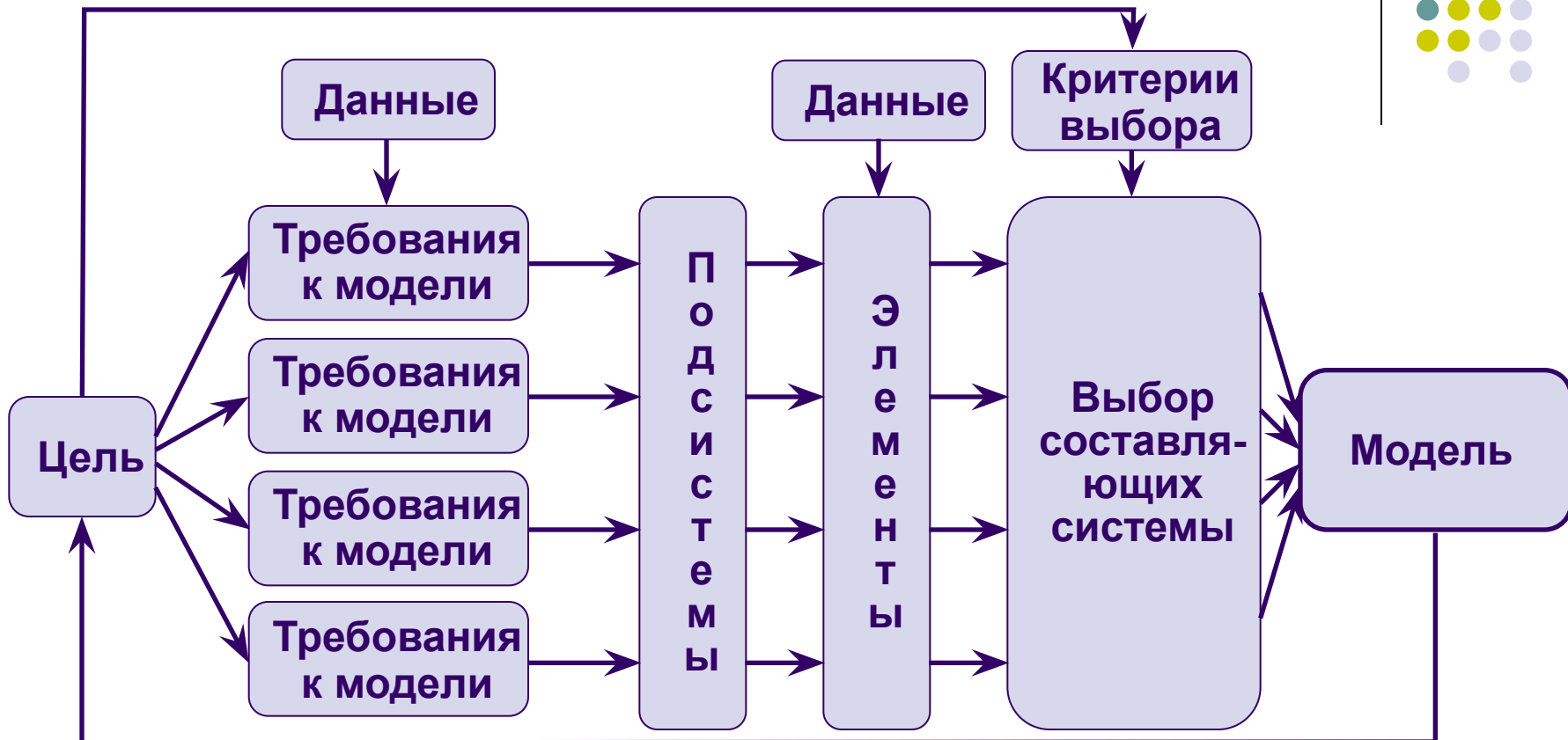
Совокупность компонент объединяется в модель.



Отдельные компоненты суммируются в единую модель; каждая из компонент решает свои собственные задачи и изолирована от других частей модели.

Такой подход можно использовать для реализации сравнительно простых моделей, в которых возможно взаимно независимое рассмотрение отдельных сторон функционирования реального объекта.

# Синтез модели на основе системного подхода



На основе исходных данных (из анализа реальной системы), ограничений (накладываются сверху или исходя из возможности реализации) и цели функционирования – исходные требования к модели системы.

На базе требований формируются ориентировочно некоторые подсистемы, элементы и осуществляется выбор составляющих системы (с использованием специальных критериев выбора).

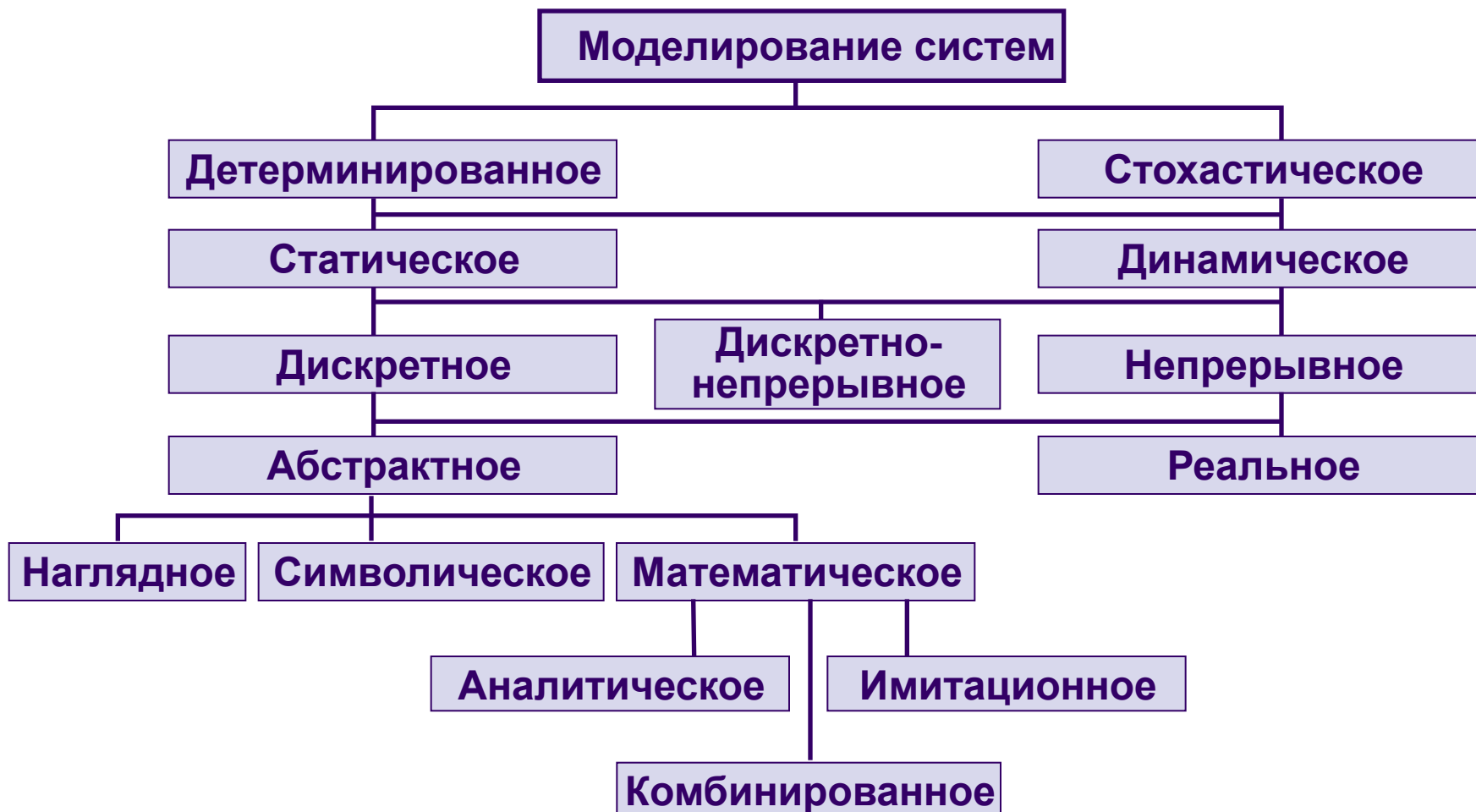


При системном подходе к моделированию систем:

прежде всего – четкое определение *цели моделирования*;

важно определение *структуры системы* – совокупности связей между элементами системы, отражающих их взаимодействие.

# Классификация видов моделирования





1. Классификационный признак – *средства построения модели.*

## Модели

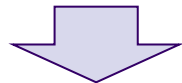
- материальные (реальные),
- абстрактные (идеальные).

Материал для построения –  
средства окружающего  
материального мира

Конструкции, построенные  
средствами сознания, мышления

Абстрактные модели создаются посредством языка.

Неоднозначность естественного языка



для построения моделей – специализированные  
языки.



Если для создания модели используется язык математики, то модель называется *математической*.

Описывает существенные характеристики системы с помощью математических выражений

***Математическое моделирование*** – процесс установления соответствия данному реальному объекту некоторого математического объекта, называемого *математической моделью*, и исследование этой модели, позволяющее получать характеристики рассматриваемого реального объекта.





Вид математической модели зависит от

- природы реального объекта,
- задач исследования объекта,
- требуемой достоверности и точности решения задачи.



- *Аналитическая форма* – запись модели в виде результата решения исходных уравнений модели. Может представлять собой явные выражения выходных переменных как функций входов и переменных состояния.

Характерно:

- моделируется только функциональный аспект системы;
- уравнения системы, описывающие закон (алгоритм) ее функционирования, записываются в виде аналитических соотношений (алгебраических, интегродифференциальных, конечноразностных и т. д.) или логических условий.



Аналитическая модель может быть исследована методами:

- *аналитическим*  
получение в общем виде явных зависимостей, связывающих искомые характеристики с начальными условиями, параметрами и переменными состояния системы;
- *численным*  
получение числовых результатов при конкретных начальных данных;
- *качественным*  
не имея решения в явном виде, определение некоторых свойств этого решения (например, оценка устойчивости).



Для реализации математической модели на ЭВМ необходимо построить соответствующий моделирующий алгоритм.

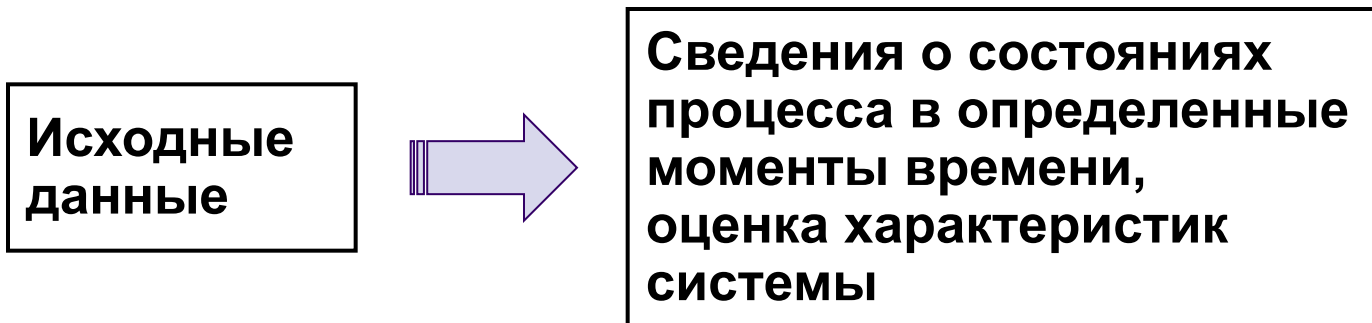
- *Алгоритмическая форма* – запись соотношений модели и выбранного метода решения в форме алгоритма.

Важный класс – *имитационные модели*, предназначенные для имитации физических или информационных процессов при различных внешних воздействиях.



- *Имитационное моделирование.*

Воспроизводится алгоритм функционирования системы во времени; имитируются элементарные явления, составляющие процесс, с сохранением их логической структуры и последовательности.





Основное преимущество по сравнению с аналитическим моделированием – возможность решения более сложных задач.

Имитационные модели позволяют учитывать:

- наличие дискретных и непрерывных элементов,
- нелинейные характеристики элементов системы,
- случайные воздействия и др.

Создают трудности при аналитических исследованиях

В настоящее время это наиболее эффективный метод исследования сложных систем.



Позволяет решать задачи оценки

- вариантов структуры системы,
- эффективности различных алгоритмов управления системой,
- влияния изменения различных параметров системы.

Имитационное моделирование может быть положено в основу структурного, алгоритмического и параметрического синтеза сложных систем (создание системы с заданными характеристиками при определенных ограничениях, оптимальной по некоторым критериям оценки эффективности).



- *Комбинированное (аналитико-имитационное) моделирование.*

Объединение достоинств аналитического и имитационного моделирования:

- предварительная декомпозиция процесса функционирования объекта на составляющие подпроцессы;
- для тех подпроцессов, где это возможно, – использование аналитических моделей, для остальных – построение имитационных моделей.





2. Классификационный признак – *характер изучаемых процессов.*

Моделирование:

- *Детерминированное* – отображает детерминированные процессы (предполагается отсутствие случайных воздействий).
- *Стохастическое* – отображает вероятностные процессы и события.

Анализируется ряд реализаций случайного процесса и оцениваются средние характеристики.



3. Классификационный признак – *тип значений параметров модели.*

Моделирование:

- *Дискретное* – для описания систем, изменение состояния которых происходит не непрерывно, а в дискретные моменты времени, по принципу «от события к событию».
- *Непрерывное* – для описания непрерывных процессов в системах.
- *Дискретно-непрерывное.*



4. Классификационный признак – *зависимость характеристик модели от времени.*

Моделирование:

- *Статическое* – характеристики модели не зависят от времени.
- *Динамическое* – характеристики модели зависят от времени.

Динамическая модель отражает поведение объекта во времени.



# Характеристики моделей систем

Помимо принадлежности к одному из перечисленных классов, модели могут иметь ряд характеристик.

- *Цель функционирования.*

Модели

- одноцелевые* – предназначены для решения одной задачи;
  - многоцелевые* – позволяют разрешить или рассмотреть ряд сторон функционирования реального объекта.
- *Сложность*, которую можно оценить по общему числу элементов в системе и связей между ними.



- *Неопределенность*, которая проявляется в системе:
  - по состоянию системы,
  - возможности достижения поставленной цели,
  - методам решения задач,
  - достоверности исходной информации и т. д.

Основная характеристика неопределенности – *энтропия*. В ряде случаев позволяет оценить количество управляющей информации, необходимой для достижения заданного состояния системы.



- *Адаптивность.*

Существенно:

- возможность адаптации модели в широком спектре возмущающих воздействий;
- изучение поведения модели в изменяющихся условиях, близких к реальным.

Важно: вопрос устойчивости модели к различным возмущающим воздействиям.



- *Управляемость модели.*

Вытекает из необходимости обеспечивать управление (со стороны экспериментатора) для изучения протекания процесса в различных условиях, имитирующих реальные.

В этом смысле

наличие многих управляемых параметров модели дает возможность поставить широкий эксперимент и получить обширный спектр результатов.



- *Возможность развития модели.*

Необходима возможность развития модели

- по горизонтали – расширение спектра изучаемых функций,
- по вертикали – расширение числа подсистем.





# Методы и средства математического моделирования

Исторически первый – *аналитический метод*  
исследования систем.

ЭВМ используется в качестве вычислителя по  
аналитическим зависимостям.



Появление современных ЭВМ,

успехи в создании новых математических методов  
решения задач управления в больших системах



широкое внедрение аналитических методов в  
исследование сложных систем.



## Необходимость учета

- стохастических свойств системы,
- недетерминированности исходной информации,
- наличия корреляционных связей между большим числом переменных и параметров.



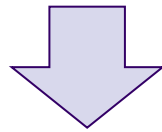
**Невозможность применения в инженерной практике**

Выход:

при исследовании больших систем – применение *методов имитационного моделирования*.



Перспективность имитационного метода возрастает с повышением технических характеристик ЭВМ и внешних устройств, развитием математического обеспечения



появление «чисто машинных» методов решения задач исследования больших систем на основе организации имитационных экспериментов с их моделями.

**Не только анализ характеристик систем, но и решение задач структурного, алгоритмического и параметрического синтеза при заданных критериях оценки эффективности и ограничениях**



Наиболее конструктивное **средство** решения инженерных задач на базе моделирования – ЭВМ

- *универсальные* – предназначены для выполнения расчетных работ,
- *управляющие* – позволяют производить управление объектами в реальном масштабе времени и выполнение расчетов.

Два основных пути использования ЭВМ:

- как средство расчета по аналитическим моделям;
- как средство имитационного моделирования.



- Для известной аналитической модели:  
расчет характеристик системы по заданным математическим соотношениям при подстановке числовых значений.

Могут быть использованы:

– ЭВМ.

Разрабатывается алгоритм расчета, в соответствии с которым составляются программы.

Задача исследователя – описать поведение реального объекта одной из известных математических моделей.

– АВМ.

С одной стороны, ускоряется процесс решения задачи, с другой стороны, могут возникать погрешности (дрейф параметров отдельных блоков АВМ, ограниченная точность задания входных параметров и т. п.).



Перспективно использование ГVK (гибридных вычислительных комплексов):

сочетание

высокой скорости функционирования аналоговых средств

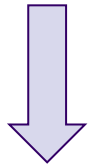
и

высокой точности расчетов на базе цифровых средств вычислительной техники (плюс контроль проведения операций).



- Технические средства воплощения имитационной модели:

ЭВМ, АВМ и ГВК.



Реализуется *имитационная система* – средство проведения машинного эксперимента (позволяет исследовать имитационную модель)

Имитационная модель задается в виде совокупности отдельных блочных моделей и связей между ними.





## Основные группы блоков:

- блоки, характеризующие моделируемый процесс функционирования системы **S**;
- блоки, отображающие внешнюю среду **E** и ее воздействие на реализуемый процесс;
- блоки, играющие служебную вспомогательную роль (взаимодействие первых двух), и выполняющие дополнительные функции по получению и обработке результатов моделирования.

Имеется также набор переменных для управления изучаемым процессом и набор начальных условий для изменения условий проведения машинного эксперимента

# Роль исследователя в процессе моделирования



Постановка задачи,  
построение содержательной модели  
реального объекта

Во многом  
творческий  
процесс

Нет формальных путей выбора оптимального вида модели;  
часто отсутствуют формальные методы, позволяющие достаточно точно описать реальный процесс.

Выбор математического аппарата моделирования — на основе опыта и квалификации исследователя.



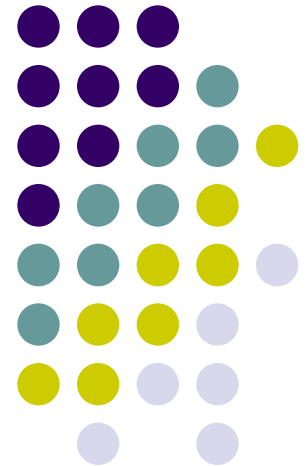
Средства вычислительной техники используются для

- вычислений при аналитическом моделировании,
- реализации имитационной модели системы.

Могут лишь помочь с точки зрения эффективности реализации сложной модели, но не позволяют подтвердить правильность той или иной модели.

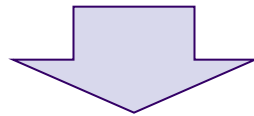
## 2. Математические методы моделирования

Обзор основных подходов





Исходная информация при построении математической модели функционирования системы – данные о назначении и условиях работы исследуемой (проектируемой) системы **S**.



- Основная цель моделирования системы;
- требования к разрабатываемой математической модели **M**.

# Этапы построения математической модели



## 1. Содержательное описание моделируемого объекта

Исходя из цели исследования устанавливаются

- совокупность элементов,
- взаимосвязи между элементами,
- возможные состояния каждого элемента,
- существенные характеристики состояний и соотношения между ними.

Например, фиксация того, что если значение одного параметра возрастает, то значение другого – убывает



В этом словесном описании возможны логические противоречия, неопределенности.

Такое предварительное представление системы называется *концептуальной моделью*.

На данном этапе применяются качественные методы описания систем, знаковые и языковые модели.



## 2. Формализация

- На основе содержательного описания определяется исходное множество характеристик системы.
- После исключения несущественных характеристик выделяются управляемые и неуправляемые параметры и производится символизация.
- Определяется система ограничений на значения управляемых параметров.
- Если ограничения не носят принципиальный характер, то ими пренебрегают.
- Формируются критерий эффективности и целевая функция модели.





При переходе от содержательного к формальному описанию объектов исследования – наибольшие затруднения и наиболее серьезные ошибки моделирования.

Как правило, процесс итеративный.



## Формальная модель объекта

Модель системы **S** можно представить в виде множества величин, описывающих процесс функционирования реальной системы:

- совокупность *входных воздействий* на систему  
 $x_i \in X, \quad i = 1, 2, \dots, n_X;$
- совокупность *воздействий внешней среды*  
 $v_l \in V, \quad l = 1, 2, \dots, n_V;$
- совокупность *внутренних (собственных) параметров* системы  
 $h_k \in H, \quad k = 1, 2, \dots, n_H;$
- совокупность *выходных характеристик* системы  
 $y_j \in Y, \quad j = 1, 2, \dots, n_Y.$



В общем случае подмножества  $X$ ,  $V$ ,  $H$  и  $Y$

- не пересекаются;
- содержат как детерминированные, так и стохастические составляющие;
- включают *управляемые* и *неуправляемые* переменные.

При моделировании системы

- входные воздействия,
  - воздействия внешней среды,
  - внутренние параметры системы;
  - выходные характеристики системы – *зависимые (эндогенные) переменные*.
- Независимые (экзогенные) переменные



Процесс функционирования системы  $S$  описывается во времени оператором  $F_S$  (преобразует экзогенные переменные в эндогенные) в соответствии с соотношениями вида

Выходная траектория

$$\overset{\boxminus}{y}(t) = F_S(\overset{\boxminus}{x}(t), \overset{\boxminus}{v}(t), \overset{\boxminus}{h}(t), t), \quad (1)$$

где

$$\overset{\boxminus}{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \boxtimes, x_{n_x}(t)),$$

$$\overset{\boxminus}{v}(t) = (v_1(t), v_2(t), \boxtimes, v_{n_v}(t)),$$

$$\overset{\boxminus}{h}(t) = (h_1(t), h_2(t), \boxtimes, h_{n_h}(t)),$$

$$\overset{\boxminus}{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \boxtimes, y_{n_y}(t)).$$



Зависимость (1) называется **законом функционирования системы S**.

Может быть задан:

- в виде функции;
- в виде функционала;
- в виде логических условий;
- в алгоритмической форме;
- в табличной форме;
- в виде словесного правила соответствия.



Метод получения выходных характеристик  $\bar{y}(t)$  с учетом входных воздействий  $\bar{x}(t)$ , воздействий внешней среды  $\bar{v}(t)$  и собственных параметров системы  $\bar{h}(t)$  называется **алгоритмом функционирования  $A_S$** .

Один и тот же закон функционирования  $F_S$  системы  $S$  может быть реализован с помощью множества различных алгоритмов функционирования  $A_S$ .



Математические модели вида (1) называют *динамическими моделями* (системами).

**Являются описанием поведения объекта во времени (отражают его динамические свойства)**

*Статические модели* описываются соотношениями вида

$$\overset{\text{в}}{y} = f(\overset{\text{в}}{x}, \overset{\text{в}}{v}, \overset{\text{в}}{h}). \quad (2)$$



Множество значений характеристик системы  $\mathbf{S}$  в конкретные моменты времени будем называть *состояниями системы*.

Состояние системы  $\mathbf{S}$  в момент времени  $t$  описывается вектором

$$\vec{z}(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_k(t)),$$

$z_1(t), z_2(t), \dots, z_k(t)$  (значения характеристик) могут быть интерпретированы как координаты точки в  $k$ -мерном фазовом пространстве.





Процесс функционирования системы можно рассматривать как последовательную смену состояний  $(z_1(t), z_2(t), \dots, z_k(t))$ .

Каждой реализации процесса соответствует некоторая *фазовая траектория*.

Совокупность всех возможных значений состояний  $\{z(t)\}$  называется *пространством состояний  $Z$*  объекта моделирования.



Состояние системы в момент времени  $t^*$ ,  
 $t_0 < t^* \leq T$ , определяется:

начальными условиями  $\bar{z}^0 = (z_1^0, z_2^0, \bar{x}, z_k^0)$ ,

где  $z_1^0 = z_1(t_0)$ ,  $\bar{x}$ ,  $z_k^0 = z_k(t_0)$ ;

входными воздействиями  $\bar{x}(t)$ ,

внутренними параметрами  $\bar{h}(t)$ ,

воздействиями внешней среды  $\bar{v}(t)$

на промежутке  
[  $t_0, t^*$  )

с помощью уравнений

$$\bar{z}(t) = \Phi(\bar{z}^0, \bar{x}(t), \bar{v}(t), \bar{h}(t), t), \quad (3)$$

$$\bar{y}(t) = F(\bar{z}(t), t). \quad (4)$$



Уравнения (3)–(4) –  
уравнения «вход – состояние – выход».

Можно записать в виде

$$\overset{\boxminus}{y}(t) = F \left[ \Phi(\overset{\boxminus}{z}^0, \overset{\boxminus}{x}(t), \overset{\boxminus}{v}(t), \overset{\boxminus}{h}(t), t) \right]. \quad (5)$$

Таким образом:

*математическая модель объекта* (реальной системы) –  
это конечное подмножество переменных  $\{\overset{\boxminus}{x}(t), \overset{\boxminus}{v}(t), \overset{\boxminus}{h}(t)\}$   
вместе с математическими связями между ними и  
характеристиками  $\overset{\boxminus}{y}(t)$ .



Если можно считать, что стохастические воздействия внешней среды  $\overset{\Delta}{v}(t)$  и стохастические внутренние параметры  $\overset{\Delta}{h}(t)$  отсутствуют, то модель называется *детерминированной*:

характеристики однозначно определяются входными воздействиями

$$\overset{\Delta}{y}(t) = f(\overset{\Delta}{x}(t), t). \quad (6)$$



### 3. Проверка адекватности модели

- 1) Предварительная проверка по основным аспектам (выявление грубых ошибок).
  - Все ли существенные параметры включены в модель?
  - Нет ли в модели несущественных параметров?
  - Правильно ли отражены функциональные связи между параметрами?
  - Правильно ли определены ограничения на значения параметров?

**Желательно привлечение специалистов, не принимавших участия в разработке модели**



- 2) Реализация модели и проведение исследований: анализ результатов моделирования на соответствие известным свойствам исследуемого объекта.

Установление соответствия модели оригиналу:

- сравнение результатов моделирования с отдельными экспериментальными результатами, полученными при одинаковых условиях;
- использование других моделей;
- сопоставление структуры и функционирования модели с прототипом.



По результатам проверки принимается решение  
о возможности практического использования модели  
или  
о проведении ее корректировки.



## 4. Корректировка модели

Возможно уточнение

- существенных параметров,
- ограничений на значения управляемых параметров,
- показателей исхода операции,
- связи показателей исхода операции с существенными параметрами,
- критерия эффективности.

После внесения изменений – снова оценка адекватности.





## 5. Оптимизация модели

Суть – в упрощении модели при заданном уровне адекватности.

Основные показатели, по которым выполняется оптимизация, – время и затраты средств для проведения исследований на модели.

В основе – преобразование моделей из одной формы в другую.

**С использованием математических методов или эвристическим путем**



## *Рекомендации по уменьшению сложности модели.*

- Уменьшение числа переменных, достигаемое исключением несущественных переменных либо их объединением.

Процесс преобразования модели в модель с меньшим числом переменных и ограничений называют *агрегированием*.

- Изменение природы переменных параметров.  
Замена переменных параметров постоянными, дискретных – непрерывными и т. д.



- Изменение функциональной зависимости между переменными.  
Замена нелинейной зависимости линейной, дискретной функции распределения вероятностей – непрерывной и т. д.
- Изменение ограничений (добавление, исключение, модификация).
- Ограничение точности модели.  
Точность результатов не может быть выше точности исходных данных.



# Математические схемы

*Математическая схема* – звено при переходе от содержательного к формальному описанию процесса функционирования системы с учетом воздействия внешней среды.





Математические схемы:

простота и наглядность,

НО

при существенном сужении возможностей  
применения.



# Типовые схемы

Основные подходы:

- *непрерывно-детерминированный* (например, дифференциальные уравнения);
- *дискретно-детерминированный* (конечные автоматы);
- *дискретно-стохастический* (вероятностные автоматы);
- *непрерывно-стохастический* (системы массового обслуживания);
- *обобщенный или универсальный* (агрегативные системы).