

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

1. Основные параметры, характеризующие синусоидальные токи, напряжения и ЭДС
2. Идеальные резистивный, индуктивный и емкостный элементы в цепях синусоидального тока



1. Основные параметры, характеризующие синусоидальные токи, напряжения и ЭДС

Токи, напряжения и ЭДС, значения которых периодически изменяются во времени по синусоидальному закону, называют **синусоидальными (гармоническими)**.

По сравнению с постоянным током синусоидальный имеет ряд преимуществ:

- производство, передача и использование электрической энергии наиболее экономичны при синусоидальном токе;
- в цепях синусоидального тока относительно просто преобразовывать форму напряжения, а также создавать трехфазные системы напряжения.

В зависимости от типа решаемой задачи синусоидальные величины представляют:

- в виде аналитических выражений;
- графически, посредством временной или векторной диаграмм;

Аналитическое представление синусоидальных величин

- **Переменный электрический ток** — это ток, изменяющийся с течением времени.
- Значение этой величины в рассматриваемый момент времени называется **мгновенным значением тока i** .



Переменный синусоидальный сигнал

характеризуется:

- **периодом T** , который выражается в секундах (с),
- **частотой f** - величиной, обратной периоду, выражается в герцах (Гц)

В России $f=50$ Гц.

- **круговой частотой $\omega = 2\pi f$** (рад/с).

□ Мгновенные значения тока:

$$i = I_m \sin (\omega t + \psi_i),$$

где i – мгновенное значение тока, А;

I_m – амплитудное значение тока, А;

ω – круговая (угловая) частота, рад/с;

ψ_i – начальная фаза тока;

t – время, с.



- Аналогично выражаются мгновенные значения напряжения и ЭДС.

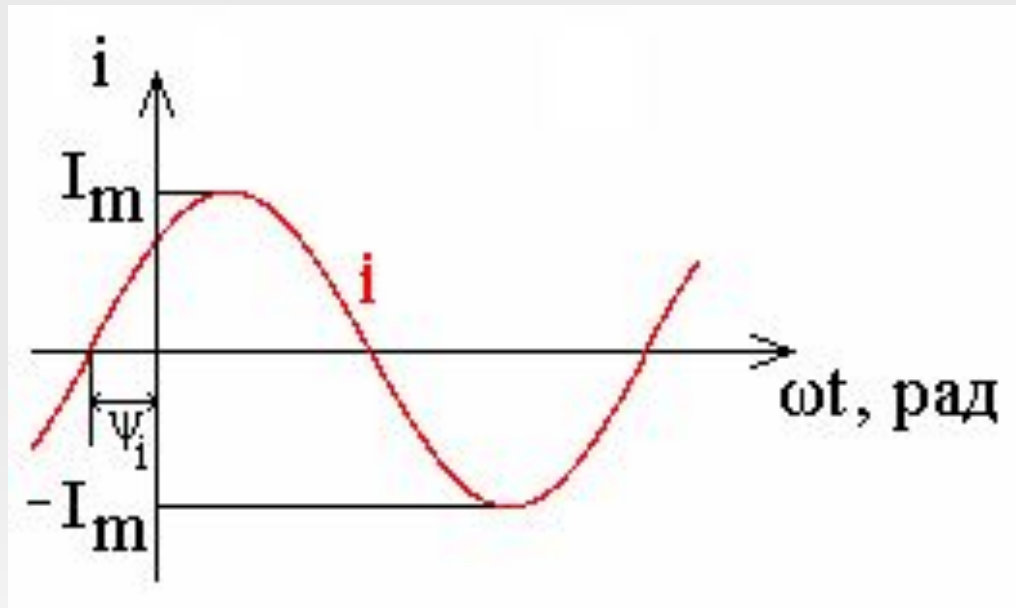
$$u = U_m \sin (\omega t + \psi_u),$$

$$e = E_m \sin (\omega t + \psi_e)$$

- Для расчета электрических цепей аналитические выражения синусоидальных величин **неудобны**, т. к. алгебраические действия с тригонометрическими функциями приводят к громоздким вычислениям.

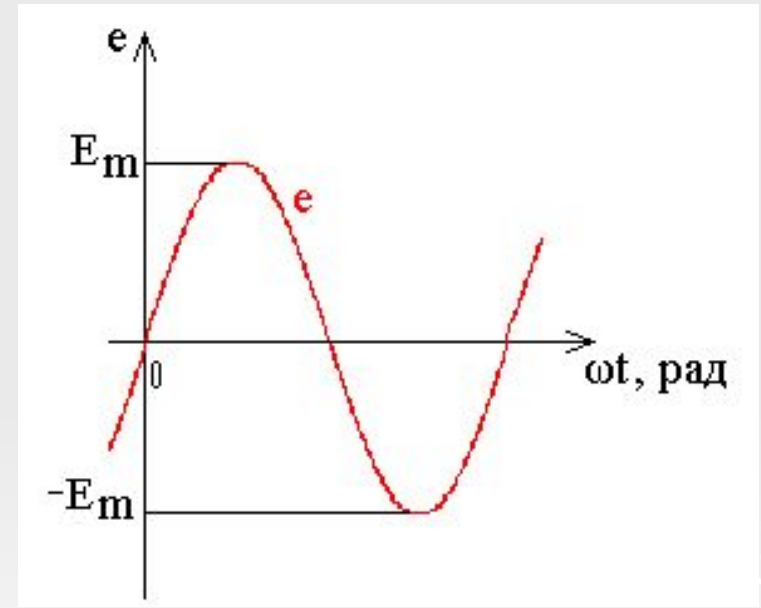
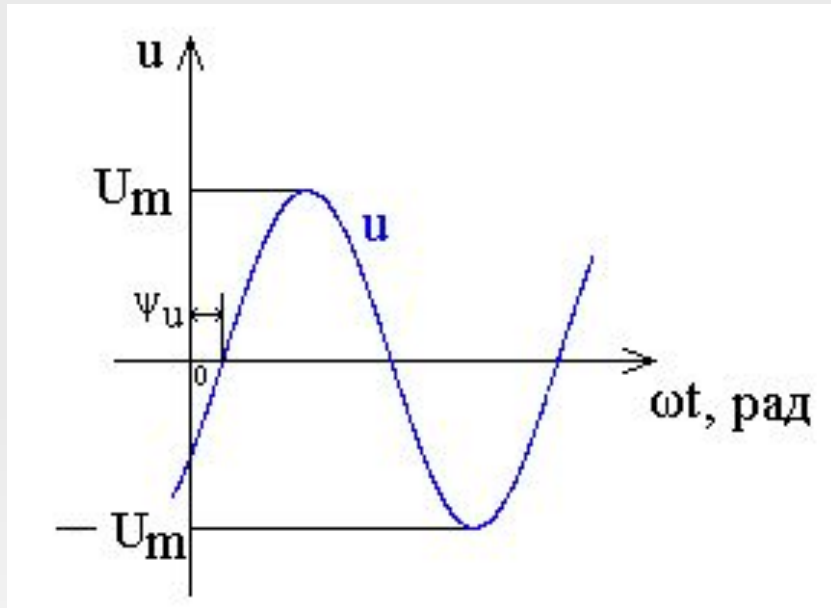
$$i = I_m \sin (\omega t + \psi_i),$$

Синусоидальные величины принято изображать графиками в виде зависимости от ωt . На данном графике $\psi_i > 0$.



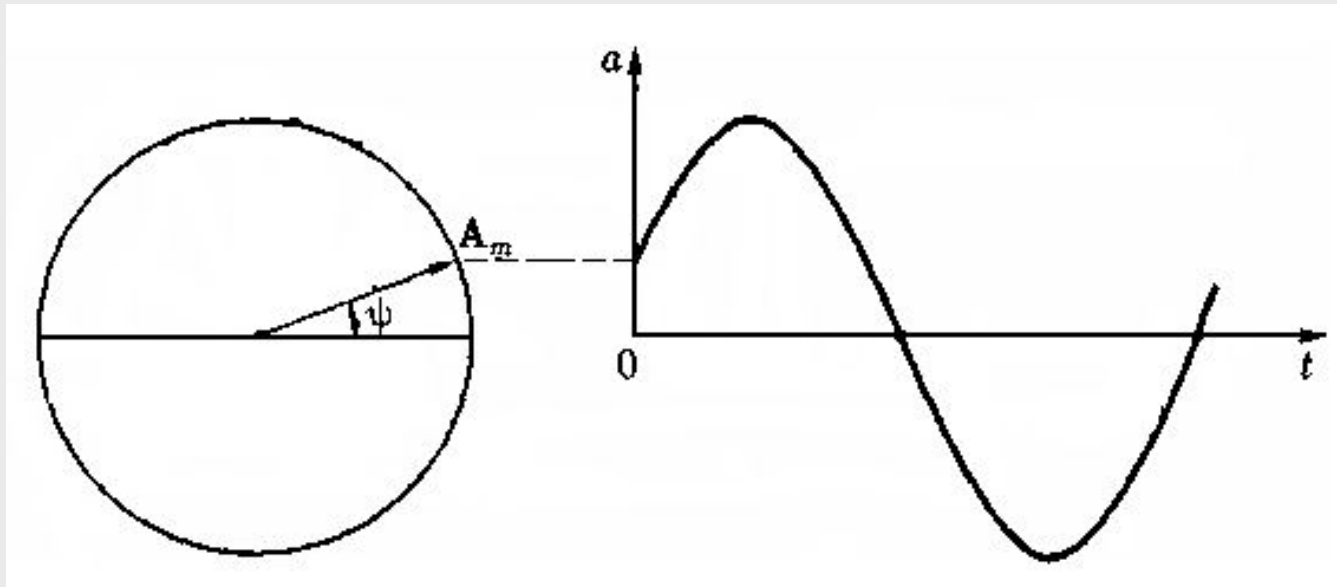
- Аналогично выражаются мгновенные значения напряжения и ЭДС.

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u), \quad e = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$$



На данных графиках $\psi_u < 0, \psi_e = 0$.

Представление синусоидальных величин вращающимися векторами



$$a = A_m \sin(\omega t + \psi)$$

строим радиус-вектор длиной, равной амплитуде A_m и под углом ψ к горизонтальной оси.

Это будет его исходное положение в момент начала отсчета $t=0$.

Начальная фаза тока (ЭДС, напряжения) ψ_i, ψ_e, ψ_u — это значение фазы в момент времени $t = 0$.

Разность начальных фаз двух синусоидальных величин одной и той же частоты называют **сдвигом фаз**.

Сдвиг фаз между напряжением и током определяется вычитанием начальной фазы тока из начальной фазы напряжения:

$$\varphi = \psi_u - \psi_i$$

- Действующее значение переменного тока (ЭДС, напряжения) – это среднеквадратичное значение переменного тока (ЭДС, напряжения) за период T .

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int i^2 dt}$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (I_m \sin \omega t)^2 dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

$$E = E_m / \sqrt{2}$$

$$U = U_m / \sqrt{2}$$

- Среднее значение синусоидальной величины за период равно нулю.
- Для периодических функций среднее значение определяют за положительный полупериод:

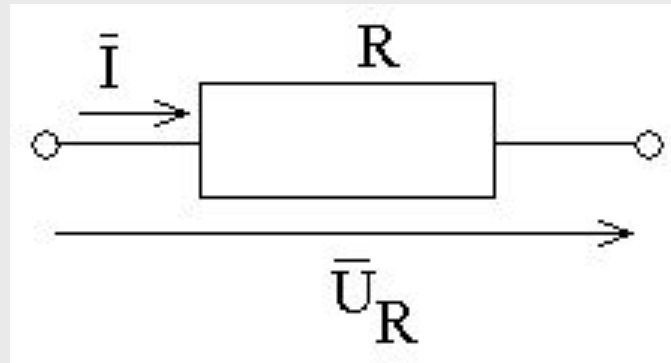
$$I_{cp} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} i dt$$

$$I_{cp} = \frac{2}{\pi} I_m$$

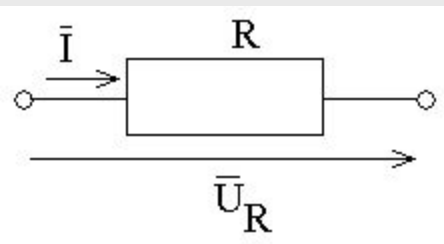
$$U_{cp} = \frac{2}{\pi} U_m$$

$$E_{cp} = \frac{2}{\pi} E_m$$

Цепь переменного тока с резистивным элементом



- В резистивном элементе происходит преобразование электрической энергии в тепловую.
- Элементы, обладающие активным сопротивлением R , нагреваются при прохождении через них тока.



Если к активному сопротивлению приложено синусоидальное напряжение

$$u = U_m \sin \omega t$$

то и ток изменяется по синусоидальному закону

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin \omega t = I_m \sin \omega t$$

где
$$I_m = \frac{U_m}{R}$$

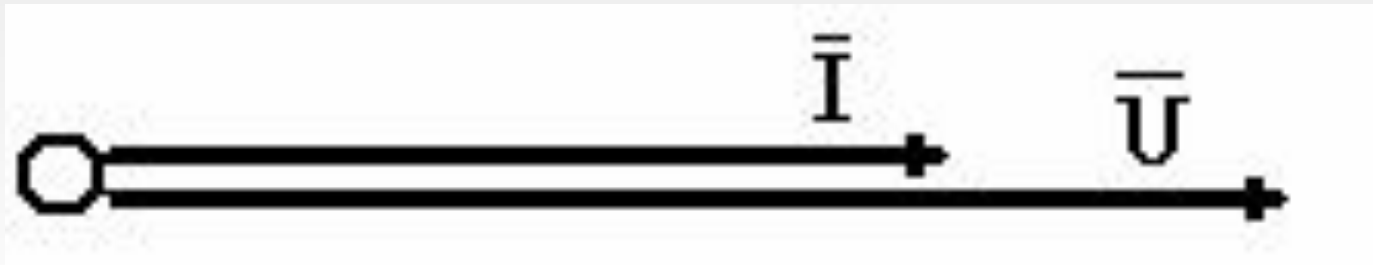
или в действующих значениях

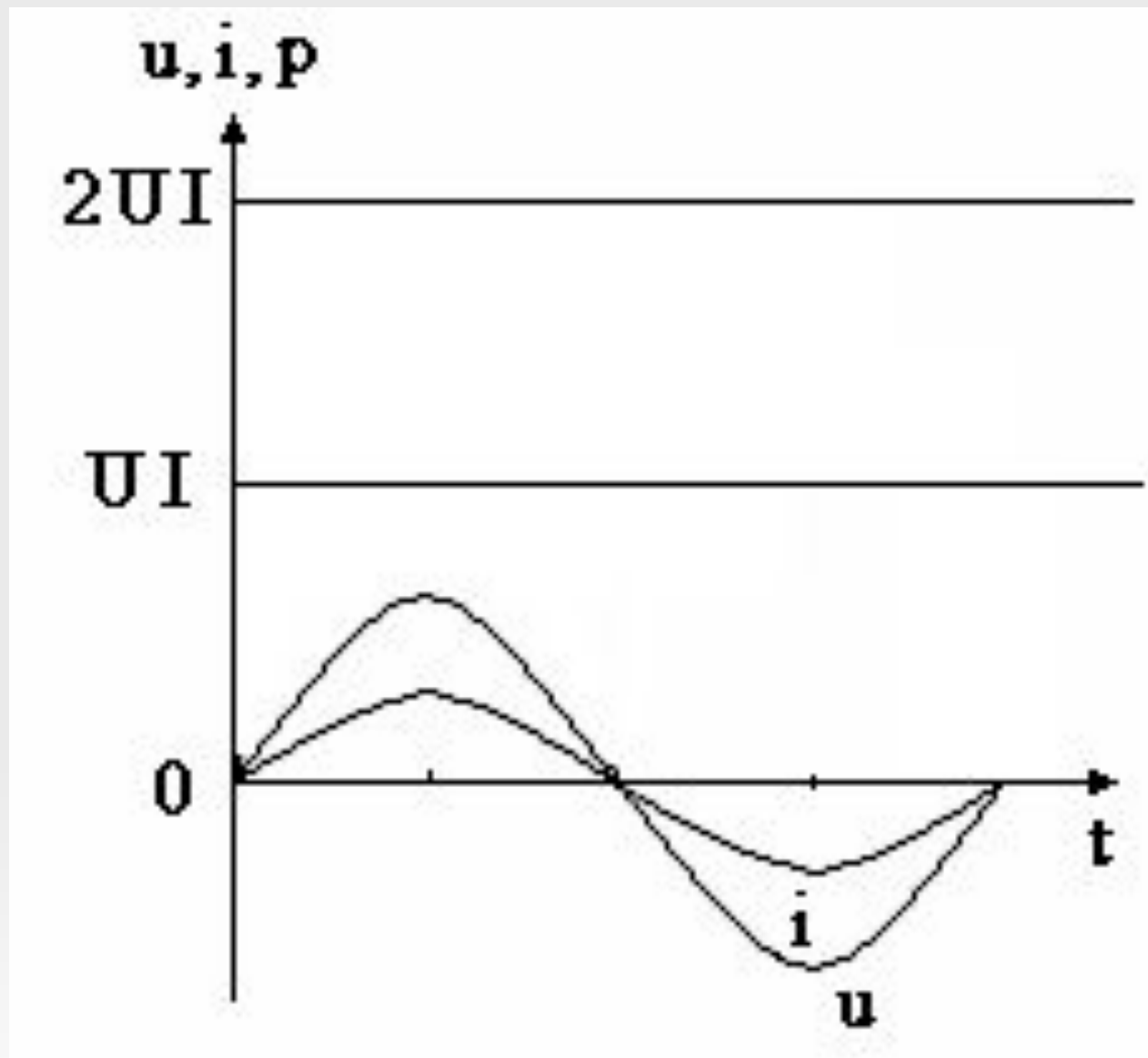
$$I = \frac{U}{R}$$

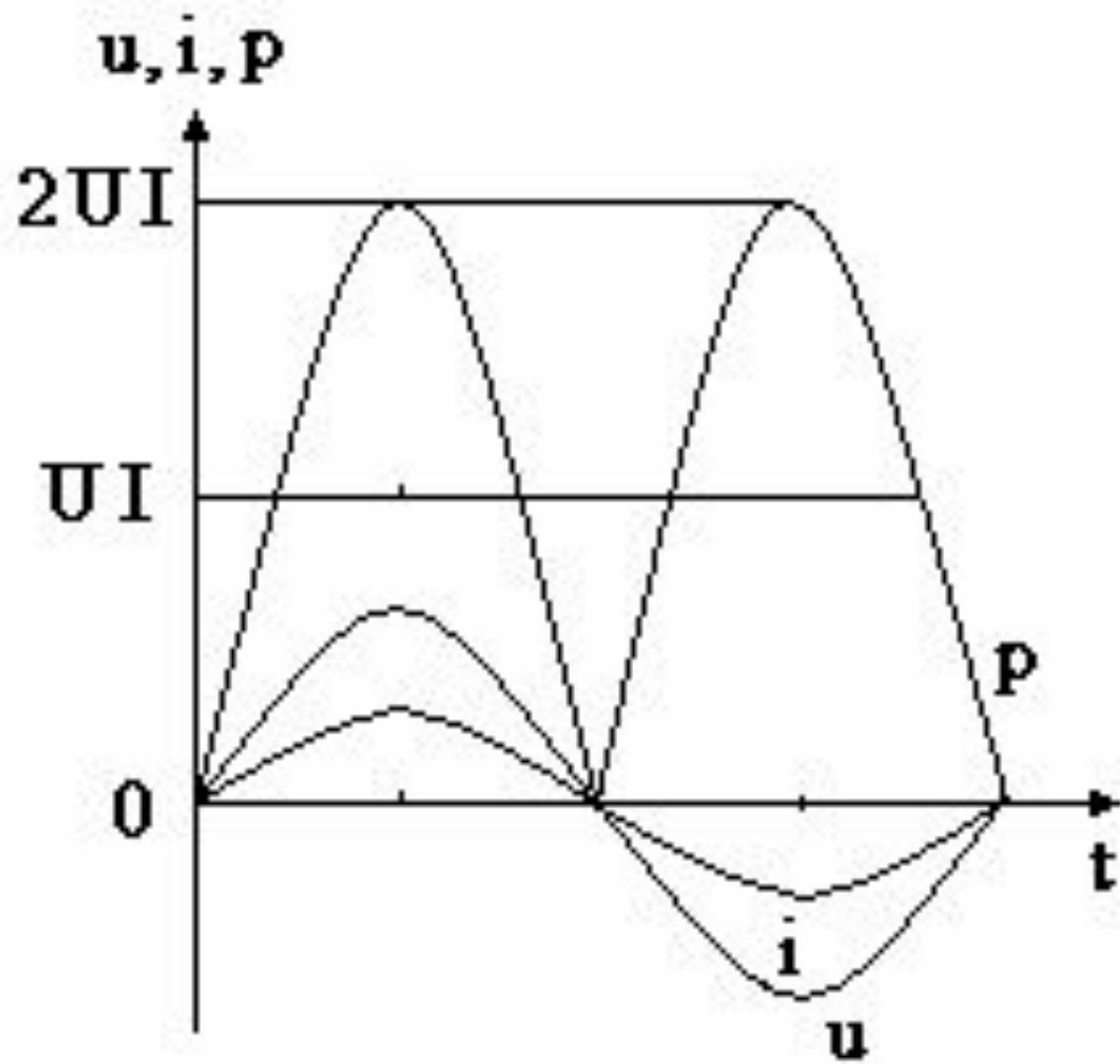
Ток в цепи с активным сопротивлением совпадает по фазе с напряжением, т.к. их начальные фазы равны

$$\psi_u = \psi_i = 0$$

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 0$$







Активная мощность

Мощность изменяется по величине, но не изменяется по направлению.

Эта мощность (энергия) **необратима**.

От источника она поступает к потребителю и полностью преобразуется в другие виды мощности (энергии), т.е. потребляется.

Такая потребляемая мощность называется **активной**.

Поэтому и сопротивление R называется **активным**.



Количественно мощность определяется

$$p = ui = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin \omega t = U_m I_m \sin^2 \omega t$$

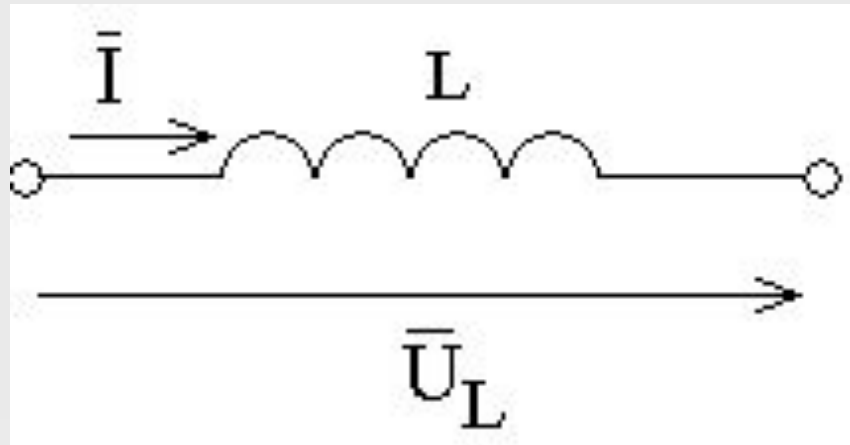
$$P = U_R I = I^2 R = \frac{U_R^2}{R}$$

Единица активной мощности

$$[P] = \text{Вт}$$

Цепь переменного тока с индуктивным элементом

- Индуктивный элемент создает магнитное поле.



L – индуктивность, Гн (Генри)

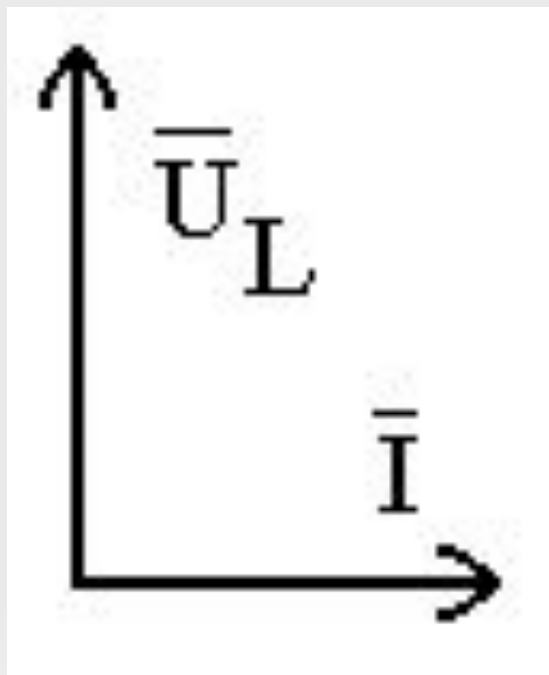


Если ток синусоидальный $i = I_m \sin \omega t$, то тогда

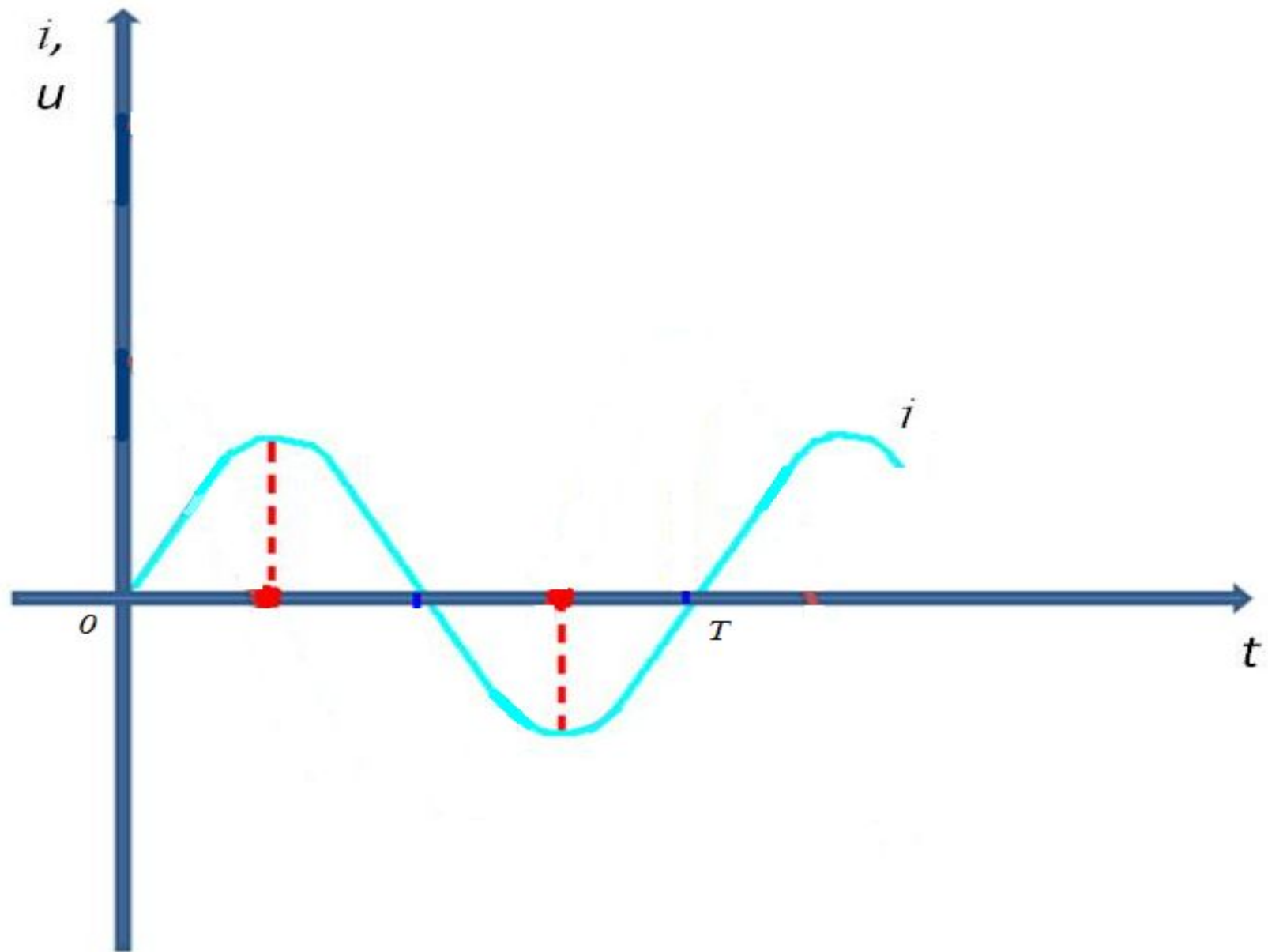
$$\square u = U_{Lm} \sin (\omega t + \pi/2)$$

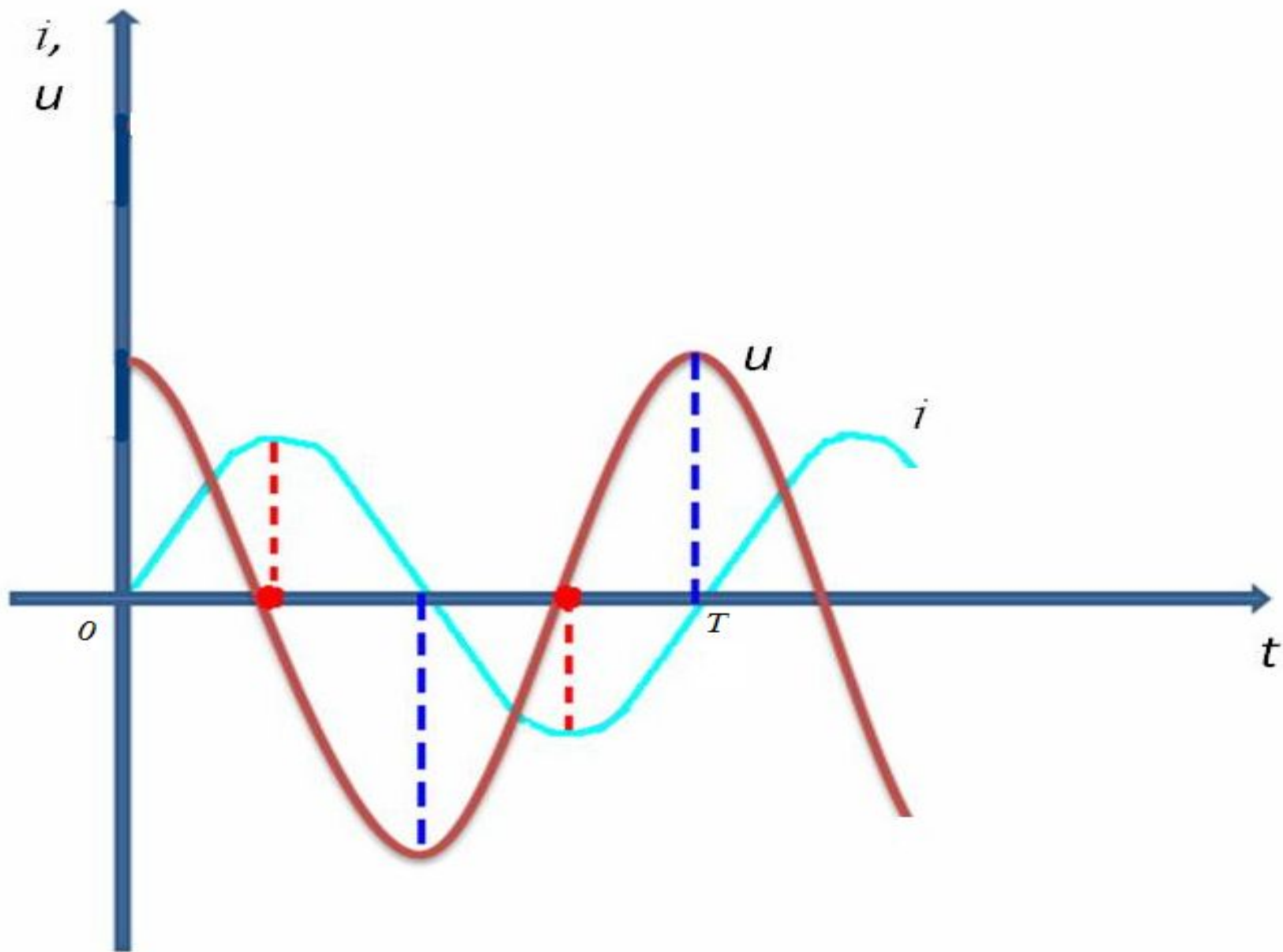
$$U_{Lm} = \omega L I_m$$

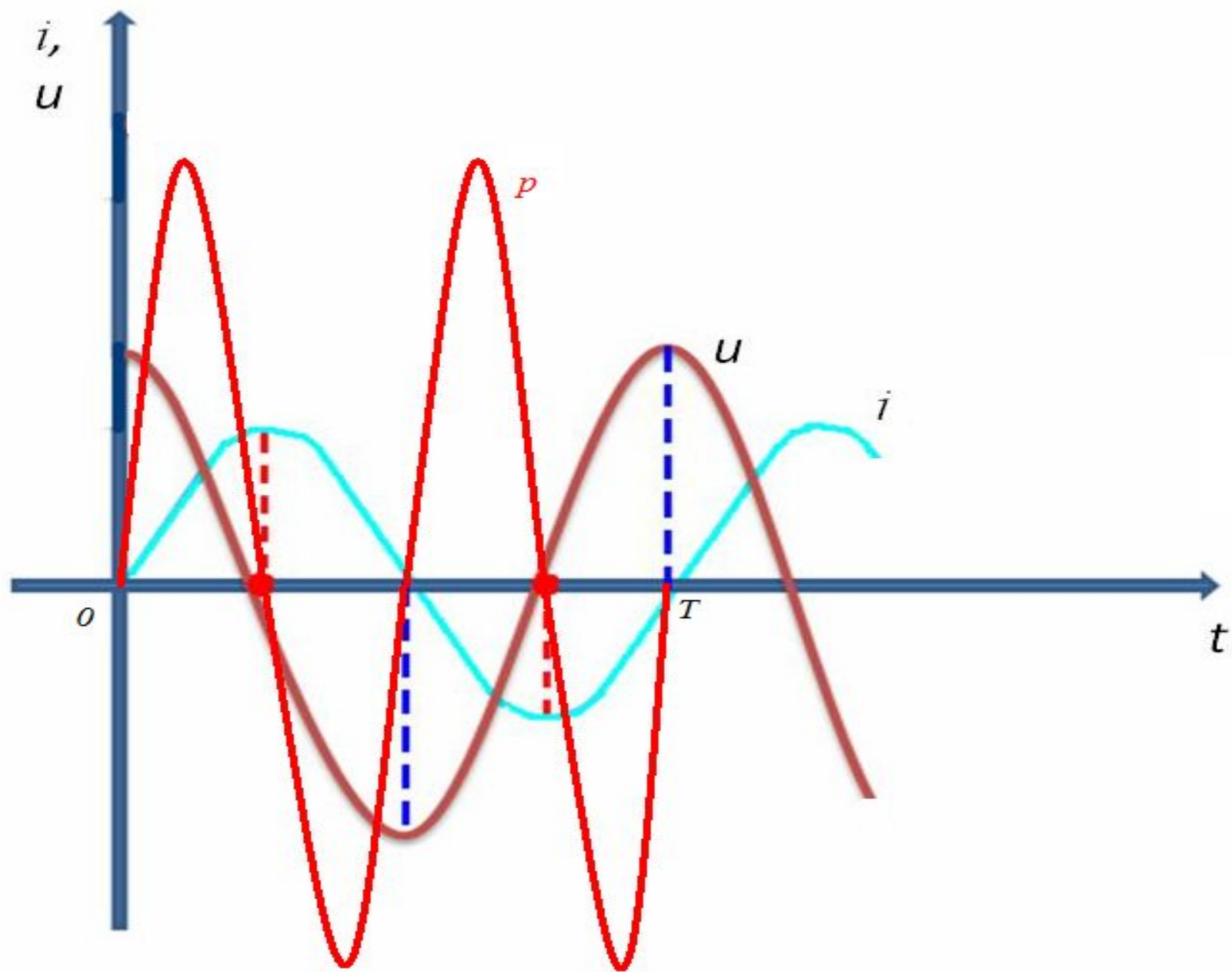
Величина $X_L = \omega L$ – индуктивное
сопротивление, Ом.



Напряжение на индуктивном элементе по фазе опережает ток на угол $\varphi = \pi/2$.







Среднее значение этой мощности за период,
т.е. активная потребляемая мощность, равно нулю.

В 1-ю и 3-ю четверти периода мощность источника
накапливается в магнитном поле индуктивности,
а во 2-ю и 4-ю – возвращается к источнику.

Мощность не потребляется, а колеблется между источником и
катушкой индуктивности, загружая источник и провода.

Такая колеблющаяся мощность называется **реактивной**.



Мгновенная мощность

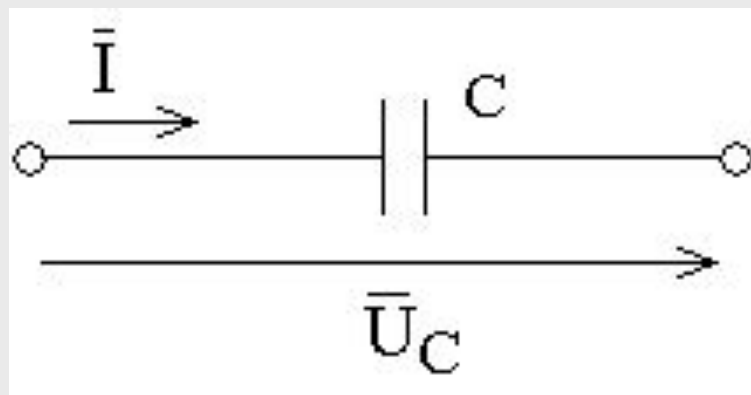
$$\begin{aligned} p = ui &= U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) I_m \sin \omega t = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t = UI \sin 2\omega t \end{aligned}$$

Мощность изменяется по синусоидальному закону с двойной частотой

$$Q_L = U_L I = I^2 X_L = \frac{U_L^2}{X_L}$$

$[Q_L] = \text{вар}$ (вольт – ампер реактивный)

Цепь с емкостным элементом



Емкостный элемент создает электрическое поле.

C – емкость элемента, Ф (Фарад)

Математическое выражение закона Ома

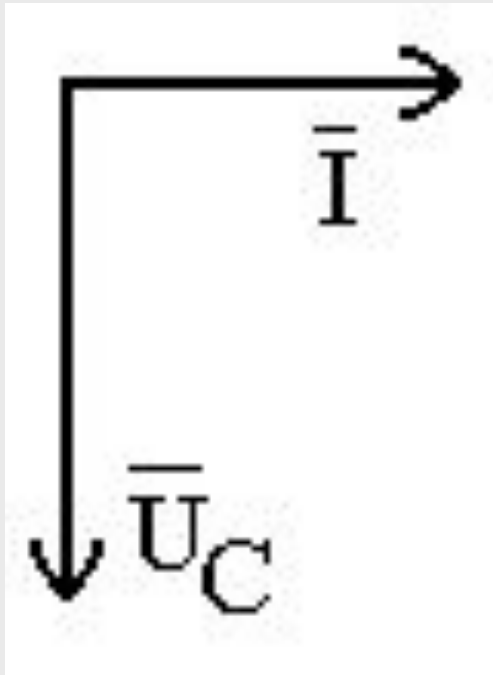
$$I = U\omega C \quad \text{или} \quad I = \frac{U}{\frac{1}{\omega C}}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

Ёмкостное сопротивление X_C - это противодействие, которое оказывает напряжение заряженного конденсатора напряжению, приложенному к нему.

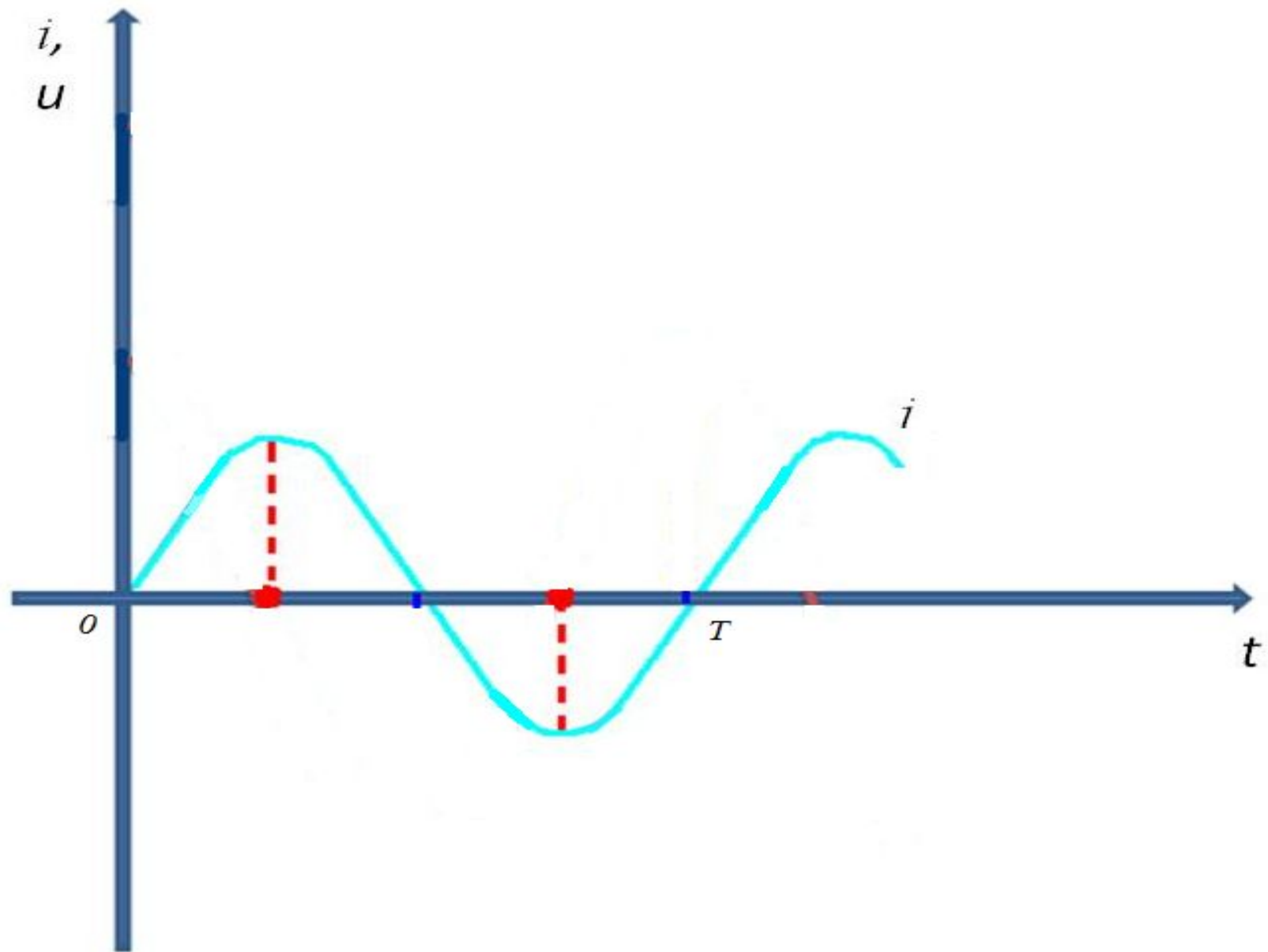
Если в цепи проходит ток $i = I_m \sin(\omega t)$, то тогда напряжение

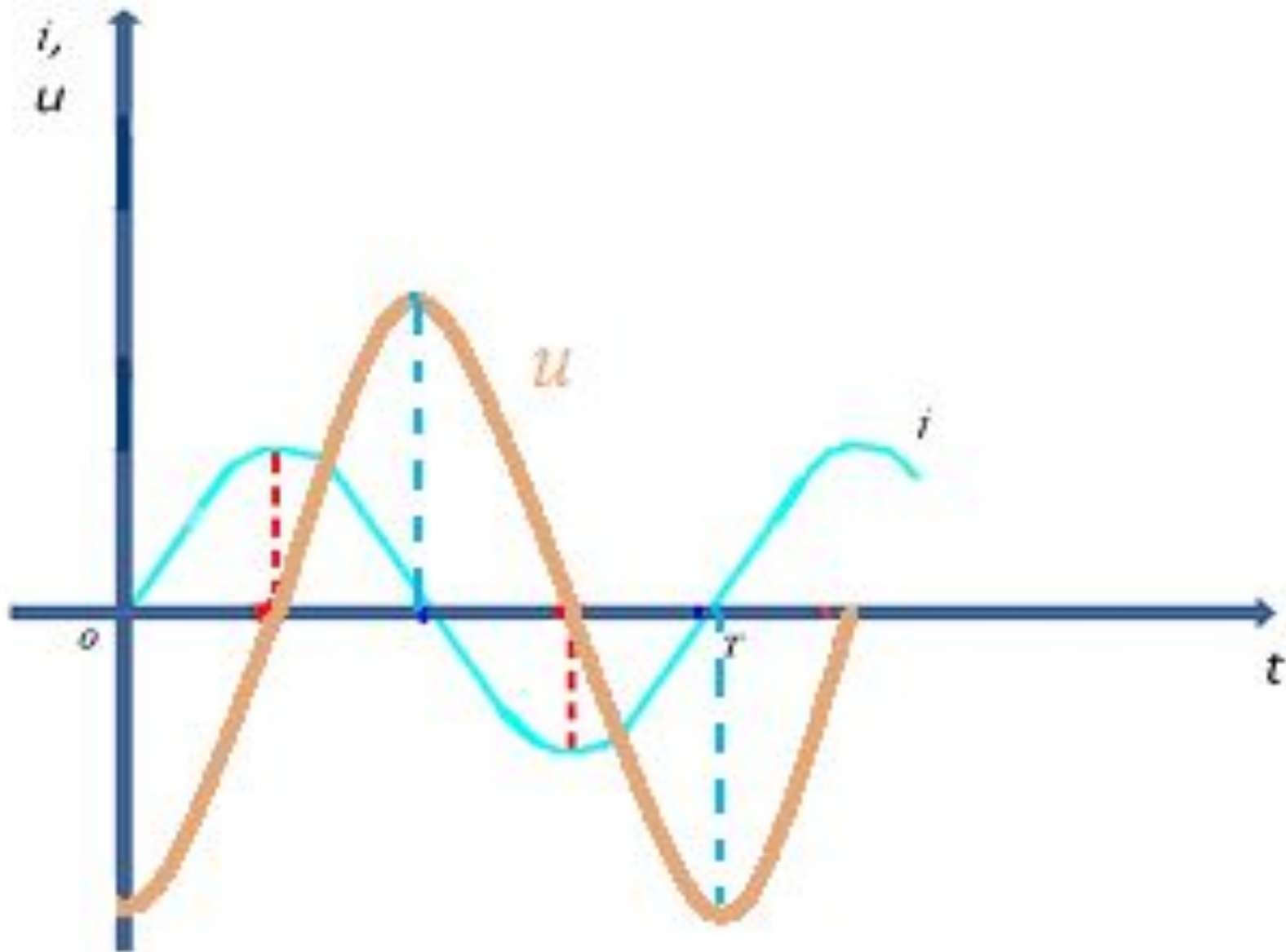
$$u_C = \frac{1}{\omega C} I_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = U_C \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

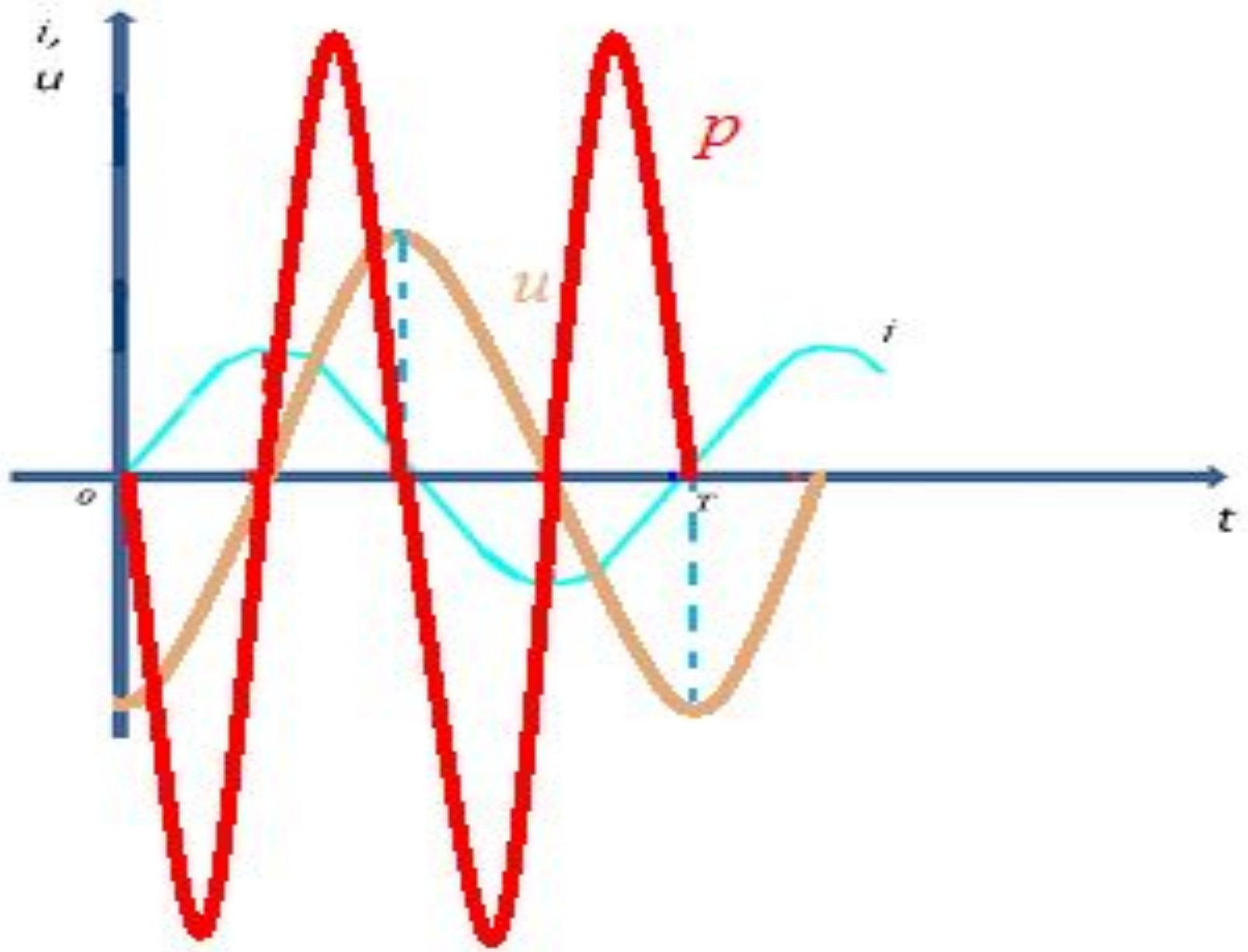


напряжение отстает от тока на
угол $\pi/2$.

$$\varphi = -\pi/2$$







Реактивная мощность в цепи с идеальным конденсатором

Мгновенная мощность в цепи с конденсатором

$$p = ui = -U_m \cos \omega t \cdot I_m \sin \omega t = -\frac{U_m I_m}{2} \cdot 2 \cos \omega t \sin \omega t = -UI \sin 2\omega t$$

Мощность изменяется по синусоидальному закону с двойной частотой.



Во 2-ю и 4-ю четверти периода мощность источника накапливается в электрическом поле конденсатора.

В 1-ю и 3-ю четверти эта мощность из электрического поля конденсатора возвращается к источнику.

Происходит колебание мощности между источником и конденсатором.

$$Q_c = UI = I^2 X_c = \frac{U^2}{X_c}$$