МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

МКЭ

к.т.н., доцент кафедры ТКЭМ

Жидков Александр Васильевич

2017/2018 учебный год,

осенний семестр,

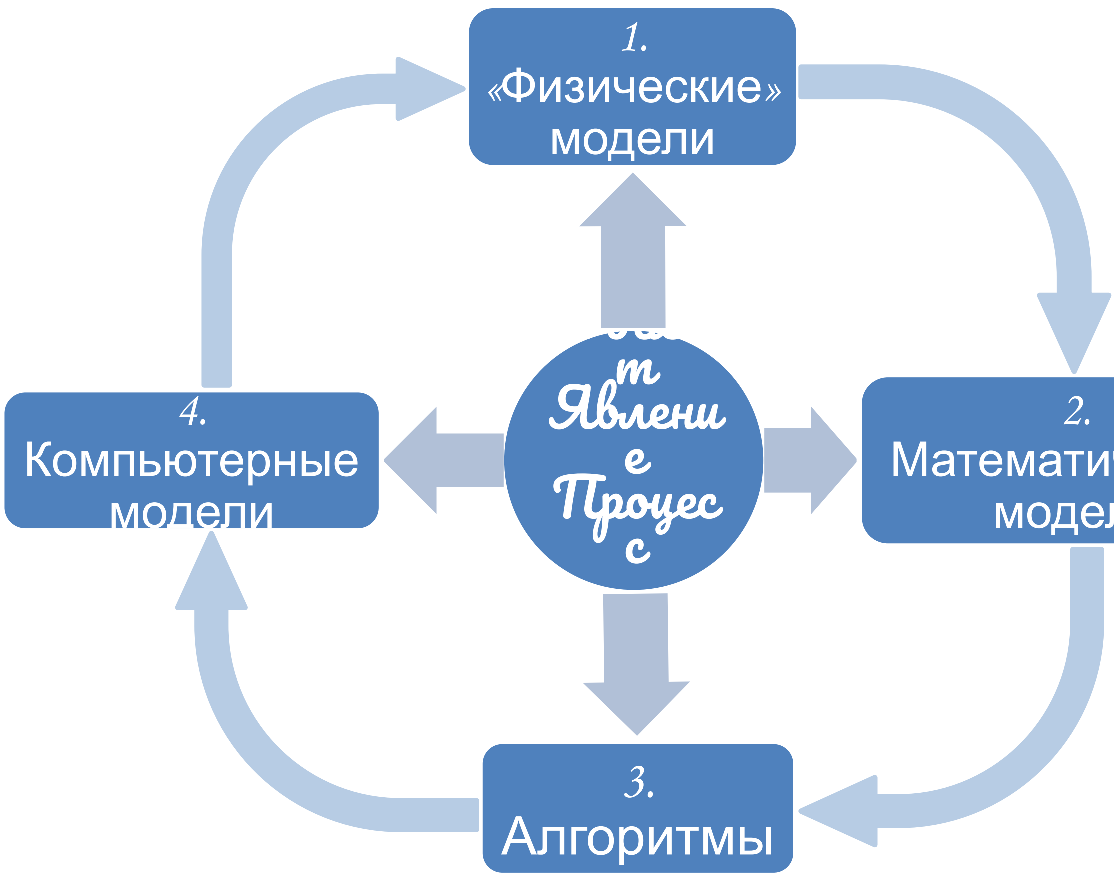
магистратура, 2 курс

Содержание

Основная литература

- Деклу Ж. Метод конечных элементов, перев. с фр. М.: Мир, 1976. 96 с. (http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Deklu1976ru.djvu).
- Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике, перев с англ. М.: Мир, 1975. 543 с. (http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Zenkevich1975ru.djvu).
- Капустин С.А. Метод взвешенных невязок решения задач механики деформируемых тел и теплопроводности: учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2010. – 60 с. (http://www.unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files/19.pdf).
- Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов, перев. с англ. М.: Мир, 1977. 351 с. (http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/StrengFiks1977ru.djvu).

Математическое моделирование – стиль мышления



1. ***Идеализация***: материальная точка, абсолютно твёрдое тело, сплошная среда, однородность, сосредоточенная сила … (простота математической модели)

2. ***Системы уравнений***: дополнитель-ные упрощения, гипотезы, законы, связи, … (несколько моделей: стерж-ни). Универсальность, инвариантность.

Единство природы обнаруживает-ся в "поразительной аналогич-ности" дифференциальных уравне-ний, относящихся к разным областям явлений.

Ленин В.И.
«Материализм и эмпириокритицизм»

3. ***Аналитические и численные ме-тоды***. (Аналитика ограничена прос-тыми областями и граничными усло-виями)

4. ***Информационные технологии***: программирование, проверка на анали-тических решениях

Методы дискретизации и метод конечных элементов (МКЭ)

3. Алгоритмы 3. Алгоритмы 3. Алгоритмы 3. Алгоритмы

3. А лг ор ит м ы 3. А лг ор ит м ы 3. А лг ор

	Аналитические методы	Численные методы
Дифференциальная постановка		**Методы конечных разностей** **Методы взвешенных невязок (…, МКЭ, …)** **Методы граничных элементов**
Вариационная постановка		**Вариационно-разностные методы** **Методы Релея-Ритца (…, МКЭ, …)**

3. Ал го ри тм ы 3. Ал го ри тм ы 3. Ал го ри тм ы 3. Ал го ри тм

Семейство «Метод взвешенных невязок» (МВН)

- ***Аппроксимация***

Дано $f:\Omega \to \mathbb{R};\ f\big|_{\partial\Omega} = \varphi.$

: Аппроксимировать за-данную функцию f в об-ласти Ω, ограниченной поверхностью $\partial\Omega$ и принимающую на этой поверхности заданные значения ϕ.

Введём: *1.* $\Phi:\Omega \to \mathbb{R};\ \Phi\big|_{\partial\Omega} = \varphi.$

2. Систему линейно-независимых **базисных** (**пробных**) функций $\left\{N_k, k=\overline{1,K}\right\}:\Omega \to \mathbb{R};\ N_k\big|_{\partial\Omega} = 0, \forall k.$

Тогда $$f \cong F = \Phi + \sum_{k=1}^{K} a_k N_k.$$

(сходимость и полнота).

МВН Вводятся: *1.* **невязка** $R = F - f.$

2. Система линейно-независимых **весовых** (**тестовых**) функций $\left\{\omega_k, k=\overline{1,K}\right\}:\Omega \to \mathbb{R}$ (полнота)

$$\int_{\Omega} \omega_k R\, d\Omega = 0,\ k = \overline{1,K}.$$

Семейство «Метод взвешенных невязок» (МВН)

- ***Решение уравнений***

Дано:

$$Du + f = 0,$$

$$\left(Lu + \varphi\right)\Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$\{u, f\} : \Omega \to ▯ ,$$

$$\varphi : \partial\Omega \to ▯ .$$

Найти решение дифферен-циального уравнения в об-ласти Ω, ограниченной по-верхностью ∂Ω, удовлетво-ряющее краевым условиям.

Приближение $u \cong U = \Phi + \sum_{k=1}^{K} a_k N_k .$

$$\Phi : \Omega \to ▯ ; \left(L\Phi + \varphi\right)\Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

$$\left\{N_k ; k = \overline{1, K}\right\} : \Omega \to ▯ ; LN_k\Big|_{\partial\Omega} = 0, \forall k.$$

Для точного решения $\forall\omega : \Omega \to ▯$ и

$$\int_\Omega \left(Du + f\right)\omega \, d\Omega = 0.$$

МВН *Невязка* $R = LU + f \neq 0.$

Весовые функции $\left\{\omega_k ; k = \overline{1, K}\right\} : \Omega \to ▯ .$

$$\int_\Omega \omega_k \left(LU + f\right) d\Omega = 0, k = \overline{1, K}.$$

Семейство «Метод взвешенных невязок» (МВН)

- Метод коллокации (базисные функции – любые; коллокация в точке: весовые функции – дельта функции Дирака, коллокации по подобластям: весовые функции – равны 1 в подобласти и равны 0 вне подобласти)
- Метод Галёркина (весовые функции совпадают с базисными функциями)
- Метод моментов (весовые функции вида $\left\{\omega_k = x^{k-1}; k = \overline{1, K}\right\}$)
- Метод наименьших квадратов (весовые функции – $\left\{\omega_k = \dfrac{\partial R}{\partial a_k}; k = \overline{1, K}\right\}$)
- Метод конечных элементов (МКЭ) (базисные функции задаются на локальных носителях – конечных элементах, весовые функции совпадают с базисными функциями)

Семейство «Метод Релея-Ритца» (МРР)

- ***Решение вариационных задач***

Дано

$$I(u) = \int_{\Omega} F(u)d\Omega +$$

$$+ \int_{\partial\Omega} G(u)d\omega,$$

$$u : \Omega \to \mathbb{R},\, u \in V; \quad I : V \to \mathbb{R};$$

$$W \subset V, W \neq \varnothing.$$

Найти функцию u принадле-жащую подпространству до-пустимых функций W и явля-ющуюся стационарной точ-кой функционала $I(u)$.

Приближение

$$u \cong U = \sum_{k=1}^{K} a_k N_k.$$

$$\left\{N_k;\, k = \overline{1,K}\right\} : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Для стационарной точки

$$\delta I(u) = 0.$$

Для приближённого решения

$$\frac{\partial}{\partial a_i} I\left(\sum_{k=1}^{K} a_k N_k\right) = 0, \quad i = \overline{1,K}.$$

Исторические сведения о МКЭ

…

1877 Рэлей (Sir John William Strutt, Lord Rayleigh) - приближённое решение дифференциального уравнения

1908 Ритц (Ritz W., 1878-1909, швейц. матем.) – обобщение метода Рэлея

1913 Бубнов И.Г. (рос.) – обобщение метода Ритца

1915 Галёркин Б.Г. (рос. матем.) – частный случай МВН (и обобщение метода Ритца – более явные формулировки условий на границах КЭ)

1933 Канторович Л.В. (рос.) – полудискретный метод (метод Канторовича), лежит в основе решения нестационарных задач

1939 Крон Г. (Kron G.) – изучал топологические свойства некоторых типов дискретных систем, разработал универсальные методы анализа сложных электрических цепей и строительных конструкций (диакоптика –расчленение сложной исходной системы на отдельные простые элементы с последующим их соединением в единое целое)

1941 Хренников (Hrennikoff A.) – «метод каркасов» – предшественник общих дискретных методов строительной механики

1943 Курант Р. (Courant R.) – первая работа, в которой рассматривалась схема типа МКЭ (задача кручения Сен-Венана, метод Ритца)

1947 Прагер (Prager W.), Синг (Synge J.L.) – «метод гиперокружностей» – приближённый метод решения некоторых краевых задач математической физики

1952 Пойя (Polya G.) – использовал идеи аналогичные идеям Куранта

1954 Аргирис Дж. (Argyris J.H.) – методы исследования дискретных конструкций сложных конфигураций в форме, удобной для использования ЭВМ

1956 Тэрнер (Turner M.J.), Клаф (Clough R.W.), Мартин (Martin H.C.), Топп (Topp L.P.) – первое формальное изложение МКЭ

1960 Клаф (Clough R.W.) – первым ввёл термин «конечные элементы»

1963 доказано (Мелош), что МКЭ - один из вариантов известного в строительной механике метода Рэлея-Ритца

1967 первая монография Зенкевич О., Чанг И.

…

Исторические сведения о МКЭ

Ива́н Григо́рьевич Бу́бнов (06(18).01.1872–13.03.1919) – российский корабельный инженер и математик. Впервые указал методы расчёта пластин, работающих в составе корпуса судна. Математически объяснил вопросы местной и общей прочности судов. Основоположник строительной механики корабля. Работы по теории подводного плавания и расчету прочности подводных лодок легли в основу русского подводного судостроения. Разработал метод нахождения приближенного решения операторного уравнения в виде линейной комбинации элементов заданной линейно независимой системы, который применил к решению ряда задач теории упругости. Разрабатывал приближенный метод интегрирования дифференциальных уравнений теории упругости. Родился в Нижнем Новгороде, скончался в Петрограде от тифа. В центре Нижнего Новгорода на бывшем здании реального училища, которое он закончил в 1887 году, установлена мемориальная доска.

Бори́с Григо́рьевич Галёркин (20.02(04.03).1871–12.07.1945) – российский и советский инженер, механик и математик, академик АН СССР (с 1935, член-корреспондент с 1928), инженер-генерал-лейтенант. Труды, относящиеся к проблемам строительной механики и теории упругости, способствовали внедрению современных методов математического анализа в исследования работы сооружений, конструкций и машин. Разработал эффективные методы точного и приближённого интегрирования уравнений теории упругости. Один из создателей теории изгиба пластинок. Исследовал влияние формы пластинки на распределение в ней усилий, эффект распределения местного давления, влияние упругости опорного контура. Предложенная Галёркиным в 1930 форма решения уравнений упругого равновесия, содержащая три бигармонические функции, позволила эффективно решить многие важные пространственные задачи теории упругости. В работах по теории оболочек он отказался от общепринятых гипотез относительно характера изменения смещений по толщине и ввёл другие допущения, обеспечивающие большую точность и возможность распространить теорию на оболочки средней толщины.

Общая схема МКЭ

1. Рассматриваемая область разделяется на ряд простых по форме конечных подобластей, которые называются конечными элементами (КЭ). В случае плоской задачи за конечные элементы чаще всего принимают треугольники или четырехугольники, а в случае пространственной задачи – тетраэдры или гексаэдры. Эти элементы имеют общие узловые точки (узлы) и в совокупности аппроксимируют форму области.
2. Предполагается, что КЭ взаимодействуют между собой лишь в узлах, т.е. в вершинах многоугольников или многогранников.
3. За основные неизвестные принимаются узловые значения основной искомой функции.
4. Выбирается система функций, однозначно определяющая искомую функцию в пределах рассматриваемого КЭ в зависимости от её узловых значений. Аппроксимирующие функции чаще всего выбираются в виде линейных, квадратичных или кубических полиномов. Для каждого элемента можно выбрать свою систему функций, но они выбираются таким образом, чтобы сохранить непрерывность искомой функции вдоль границ элементов. Эти локальные (отличные от нуля только на элементе и равны нулю всюду вне элемента) функции называют «функциями формы» (базисными, пробными, координатными функциями).
5. Распределенные по границе области краевые условия заменяются эквивалентными узловыми (сосредоточенными) значениями, приложенными к граничным узлам.
6. Весовые функции считаются совпадающими с функциями формы.
7. Из интегрального соотношения формируется система уравнений, неизвестными которой являются узловые значения искомой функции.

Преимущества и недостатки МКЭ

1. Применим для задач аппроксимации функций, решения дифференциальных уравнений, вариационных задач, стационарных и нестационарных задач.
2. Области произвольной конфигурации.
3. Произвольные краевые условия (разрывные, смешанные).
4. Различные свойства соседних элементов (размеры, физические свойства).
5. Сочетает преимущества разностных и вариационных методов: универсальность первых и высокую точность вторых.
6. Алгоритмичность.

1. Высокая размерность результирующей системы алгебраических уравнений, разреженность матрицы – требует применения компьютерной техники (быстродействие, память) и разработки специальных способов хранения матрицы коэффициентов системы и методов решения.
2. Главным недостатком МКЭ, как и любого вариационного метода, является сложность получения априорных оценок (Зенкевич, стр. 6, предисловие Победря Б.)

Уравнение теплопроводности

Первый закон термодинамики (закон баланса энергии) для **недиссипативных** сред представляет собой уравнение распространения тепла (теплопроводности):

$$\rho T \frac{d\eta}{dt} = \rho q - \nabla \cdot \mathbf{h}$$

ρ – плотность (кг·м$^{-3}$), T – температура (К), η – удельная энтро-пия (Дж·К$^{-1}$·кг$^{-1}$), d/dt – материальная производная, q – мощ-ность источника тепла на единицу массы (Вт·кг$^{-1}$), **h** – вектор плотности теплового потока (Вт·м$^{-2}$), ∇ – набла оператор Гамиль-тона, точка – · – скалярное произведение, $\nabla \cdot ()$ – дивергенция.

Предполагается возможным представить вектор плотности потока тепла **h** в виде **обобщённого закона Фурье**:

$$\mathbf{h} = -\mathbf{K} \cdot \nabla T,$$

K – тензор удельной теплопроводности (Вт·м$^{-1}$·К$^{-1}$), $\nabla ()$ – градиент.

В привычной записи уравнения теплопроводности используется понятие теплоём-кости (**удельной теплоёмкости**) c – тепла, расходуемого для повышения темпера-туры единицы массы на один градус (Дж·К$^{-1}$·кг$^{-1}$). Для **недеформирующейся** (неизменной деформации) сплошной среды

$$c = T \frac{\partial \eta}{\partial T},$$

и для неподвижной анизотропной сплошной среды прихо-дим к хорошо известному уравнению Фурье

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \rho q + \nabla \cdot \left(\mathbf{K} \cdot \nabla T \right).$$

Уравнение теплопроводности

В **изотропном** для тепловых процессов материале тензор удельной теплопроводности **K** – шаровой:

$$\mathbf{K} = k\mathbf{E},$$

k – коэффициент удельной теплопроводности (Вт·м$^{-1}$·К$^{-1}$),
E – единичный тензор.

Теперь уравнение распространения тепла (теплопроводности) в неоднородном изотропном теле принимает вид:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \rho q + \nabla \cdot \left(k \nabla T \right).$$

Если тело **однородно**, то ρ, c и k – постоянные и нестационарное уравнение теплопроводности однородного изотропного тела можно представить в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a^2 \Delta T = f, \qquad a = \sqrt{\frac{k}{\rho c}}, \qquad f = \frac{q}{c},$$

где a^2 – коэффициент температуропроводности (м^2·с$^{-1}$).

Частные случаи:

1. Распространение тепла без тепловыделения $q = 0$ ($f = 0$).
2. Установившийся поток тепла (уравнение Пуассона) $\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0.$
3. Установившийся поток тепла без тепловыделения (уравнение Лапласа) $q = 0$ ($f = 0$), $\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0.$

Уравнение теплопроводности

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t}-\nabla\cdot\left(\mathbf{K}\cdot\nabla T\right)=\rho q,$$

$$T\big|_{t=0}=T_0,$$

$$1.\ T\big|_{\partial\Omega_1}=\varphi,\qquad 2.\ \left(\mathbf{n}\cdot\mathbf{K}\cdot\nabla T\right)\big|_{\partial\Omega_2}=\psi,$$

$$3.\ \left[\left(\mathbf{n}\cdot\mathbf{K}\cdot\nabla T\right)-\alpha\left(T-T_\infty\right)\right]\Big|_{\partial\Omega_3}=0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}-a^2\Delta T=f,$$

$$T\big|_{t=0}=T_0,$$

$$1.\ T\big|_{\partial\Omega_1}=\varphi,\qquad 2.\ \left(k\frac{\partial T}{\partial n}\right)\Big|_{\partial\Omega_2}=\psi,$$

$$3.\ \left[k\frac{\partial T}{\partial n}-\alpha\left(T-T_\infty\right)\right]\Big|_{\partial\Omega_3}=0,$$

Уравнение нестационарной теплопроводности содержит производную первого порядка по времени и производные второго порядка по пространственным координатам. Поэтому для однозначности его решения должны быть заданы начальное условие для всей рассматриваемой области пространства и граничное (краевое) условие для всей границы рассматриваемой области.

Стационарное уравнение теплопроводности (уравнения Пуассона и Лапласа) не содержат переменной время, так что в этом случае необходимы только граничные условия.

Начальное условие состоит в том, что температура всех точек тела в момент $t = 0$ является определённой функцией координат.

Краевые условия при решении физических задач бывают трёх видов:

1. В любой момент времени известна температура на поверхности тела.
2. Температура на поверхности тела неизвестна, но известен тепловой поток через поверхность через поверхность единичной площади (ψ) в любой момент времени. В частном случае, когда $\psi=0$, это – условие непроницаемости границы отражает отсутствие переноса тепла (теплоизолированная граница)
3. Смешанное условие применяется в случае теплообмена с окружающей средой. Согласно эмпирическому закону Ньютона этот тепловой поток пропорционален разности температур на поверхности тела и окружающей среды. Коэффициент пропорциональности называется коэффициентом теплоотдачи (коэффициент контактного теплообмена). Приравнивая внутренний и внешний тепловые потоки получаем условие, в котором α – коэффициент внешней теплопроводности (конвективного теплообмена), Вт·м$^{-2}$·К$^{-1}$, αT – потери тепла путём конвекции.

Вариационная постановка задачи теплопроводности

$$I(T)=\int\limits_{\Omega}\left[\frac{1}{2}\nabla T\cdot\mathbf{K}\cdot\nabla T-\rho\left(q-c\frac{\partial T}{\partial t}\right)T\right]d\Omega-\int\limits_{\partial\Omega_2}\psi T d\omega-\int\limits_{\partial\Omega_3}\frac{1}{2}\alpha\left(T-T_\infty\right)^2 d\omega$$

$$I(T)=\int\limits_{\Omega}\left[\frac{1}{2}k\left(\nabla T\right)^2-\rho\left(q-c\frac{\partial T}{\partial t}\right)T\right]d\Omega-\int\limits_{\partial\Omega_2}\psi T d\omega-\int\limits_{\partial\Omega_3}\frac{1}{2}\alpha\left(T-T_\infty\right)^2 d\omega$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа-Остроградского (1750-е годы – Л.Эйлер, Ж.Л.Лагранж, 1834 – М.В.Остроградский)

$$\delta I(T)=I(T+\delta T)-I(T)=$$

$$=\int\limits_{\Omega}\left[k\nabla T\cdot\nabla\delta T-\rho\left(q-c\frac{\partial T}{\partial t}\right)\delta T\right]d\Omega-\int\limits_{\partial\Omega_2}\psi\delta T d\omega-\int\limits_{\partial\Omega_3}\alpha\left(T-T_\infty\right)\delta T d\omega$$

$$k\nabla T\cdot\nabla\delta T=\nabla\cdot\left(k\nabla T\delta T\right)-\nabla\cdot\left(k\nabla T\right)\delta T$$

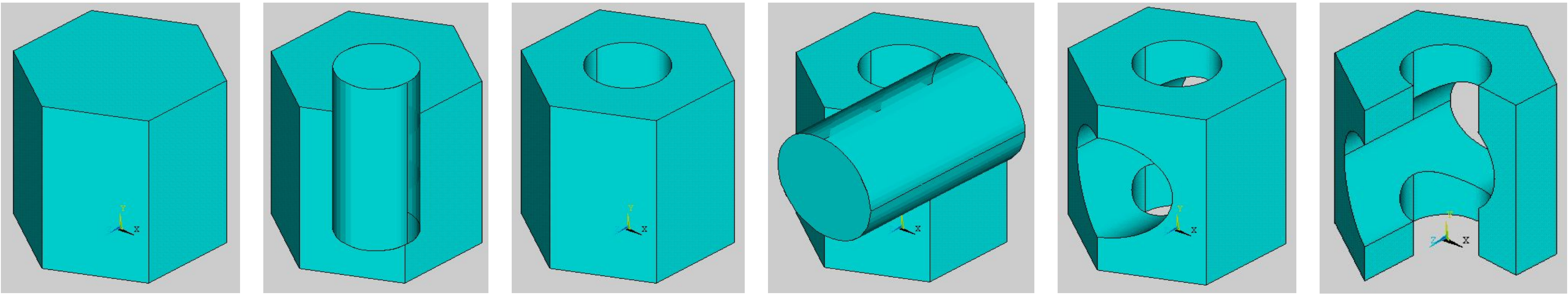
$$\delta I(T)=\int\limits_{\Omega}\left[-\nabla\cdot\left(k\nabla T\right)\delta T-\rho\left(q-c\frac{\partial T}{\partial t}\right)\delta T\right]d\Omega+\int\limits_{\partial\Omega}\mathbf{n}\cdot\left(k\nabla T\delta T\right)d\omega-\int\limits_{\partial\Omega_2}\psi\delta T d\omega-\int\limits_{\partial\Omega_2}\alpha\left(T-T_\infty\right)\delta T d\omega=$$

$$=-\int\limits_{\Omega}\left[\nabla\cdot\left(k\nabla T\right)+\rho\left(q-c\frac{\partial T}{\partial t}\right)\right]\delta T d\Omega+\int\limits_{\partial\Omega}k\frac{\partial T}{\partial\mathbf{n}}\delta T d\omega-\int\limits_{\partial\Omega_2}\psi\delta T d\omega-\int\limits_{\partial\Omega_2}\alpha\left(T-T_\infty\right)\delta T d\omega$$

Геометрическое моделирование

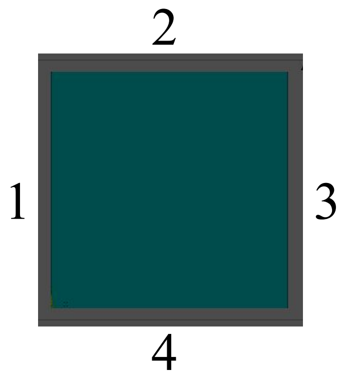
$$\Omega \subset E^3, \quad \partial\Omega = \partial\Omega_1 + \partial\Omega_2 + \partial\Omega_3$$

1. **Импорт** готовой геометрической модели (средства проверки, редактирования, изменения).
2. **Восходящее** моделирование (точки→линии→поверхности→объёмы).
3. **Нисходящее** моделирование (примитивы+операции булевой алгебры).

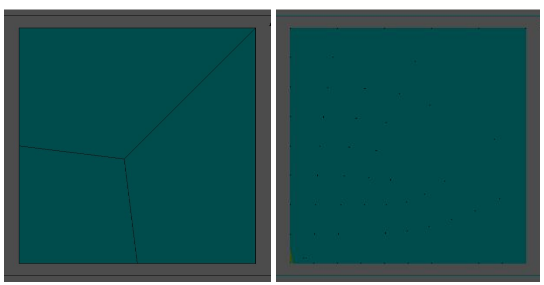


Конечно-элементное моделирование

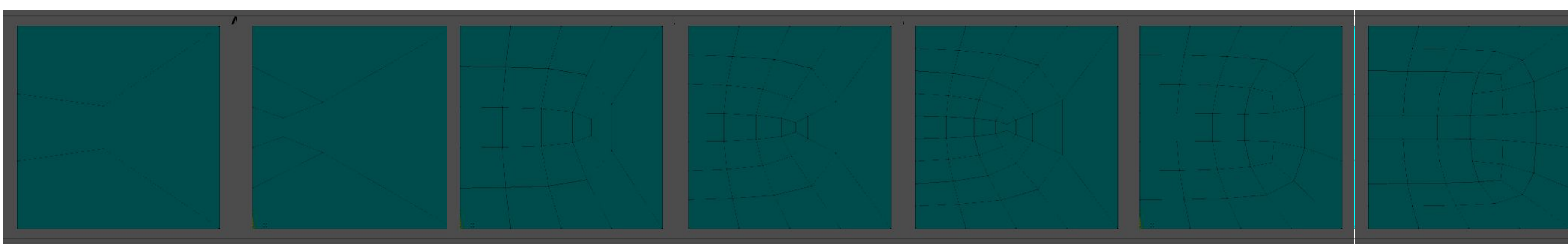
$$\Omega \subset E^3, \quad \partial\Omega = \partial\Omega_1 + \partial\Omega_2 + \partial\Omega_3$$



$K_1 - K_3 = K_2 - K_4$



$K_1 - K_3 = 2k, \; K_2 = K_4$



1. Нерегулярная сетка.
2. Регулярная сетка.
3. Квазирегулярная сетка.
4. Сгущение сетки.
5. Качество сетки.