Математический анализ

1. Н.С.Пискунов, Дифференциальное и интегральное исчисления

2. Л.Д.Кудрявцев, Краткий курс математического анализа.

3. И.В.Пивоварова, Л.Я.Дубинина, Л.С. Никулина, Сборник задач по высшей математике 2003.

1. Высшая математика. Практикум ч.2. Шуман Г.И., Волгина О.А., Голодная Н.Ю., Одияко Н.Н.

2. Высшая математика. Практикум ч.3. Шуман Г.И., Волгина О.А.

3. Высшая математика. Практикум ч.4. Шуман Г.И., Волгина О.А.

Дифференциальное исчисление функции одной переменной (производная).

1. Задача, приводящая к понятию производной.
2. Определение производной.
3. Геометрический смысл производной.
4. Основные правила дифференцирования.
5. Производные основных элементарных функций.

Введение в анализ

- Функцией называется правило, по которому каждому элементу x некоторого множества M соответствует единственный элемент y другого множества N.

$$y = f(x)$$

x - независимая переменная (аргумент);
y - зависимая переменная;
M - область определения функции;
N - множество значений функции.

- Графиком функции $y = f(x)$ наз. множество точек плоскости XOY , для каждой из которых абсцисса x является значением аргумента, а ордината y- соответствующее значение данной функции.

Способы задания функции:

1) аналитический;
2) табличный;
3) графический.

Основные элементарные функции

Постоянная $y = conct.$

Степенная

$$y = x^n, \; n - действительное\ число, \, n \neq 0.$$

Показательная $y = a^x \; (a > 0, a \neq 1).$

Логарифмическая $y = \log_a x \left(a > 0, a \neq 1\right).$

Тригонометрические

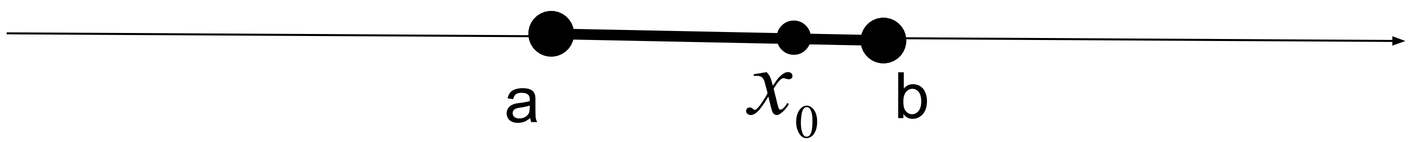
$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = tgx, \; y = ctgx.$$

Обратные тригонометрические

$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x,$$

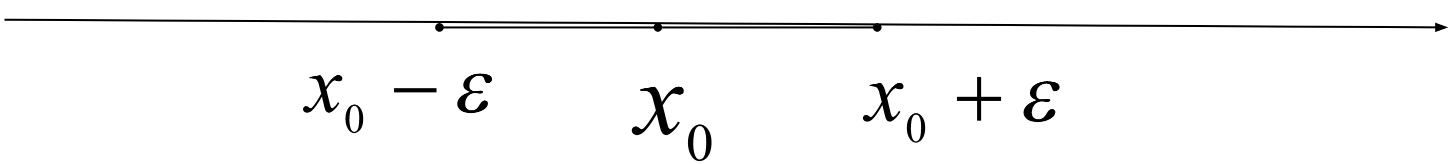
$$y = arctgx, \quad y = arcctgx.$$

- Окрестностью точки x_0 числовой прямой называется любой $(\forall)$ интервал $(a;b)$ содержащий эту точку (U_{x_0}).



Если $x \in U_{x_0}$, то $a < x < b$.

- $\varepsilon - \textit{окрестностью}$ точки x_0 числовой прямой называется интервал $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$, т.е. если $x \in U^{\varepsilon}_{x_0}$, то $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ или $|x - x_0| < \varepsilon$.



- Точка x_0 называется центром, а число ε – радиус ε-окрестности точки x_0.

Внешность любого интервала $(a;b)$ называется окрестностью бесконечности и обозначается U_∞.

Внешность интервала $(-\varepsilon;\varepsilon)$ называется ε –окрестностью бесконечности и обозначается U^ε.

$X = \{x\}$ -произвольное множество.

Ограниченное сверху:

$\exists$ действительное число $M : \forall x \in X \quad x \le M$.

Ограниченное снизу:

$\exists$ действительное число $M : \forall x \in X \quad x \ge M$.

Ограниченное:

$$\exists \quad M > 0 : \forall x \in X \quad |x| \le M \Rightarrow -M \le x \le M$$

Предел функции

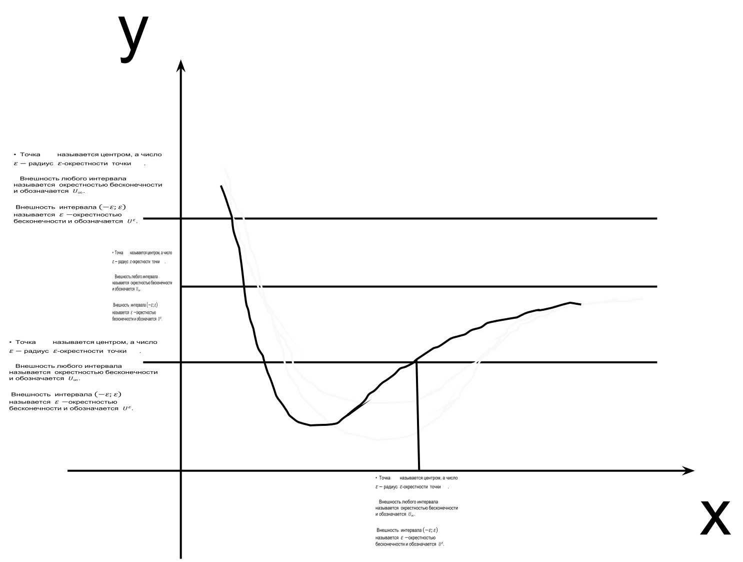
- Точка a называется центром, а число

ε — радиус ε-окрестности точки .

Внешность любого интервала называется окрестностью бесконечности и обозначается U_∞.

Внешность интервала $(-\varepsilon; \varepsilon)$ называется ε —окрестностью бесконечности и обозначается U^ε.

Геометрический смысл

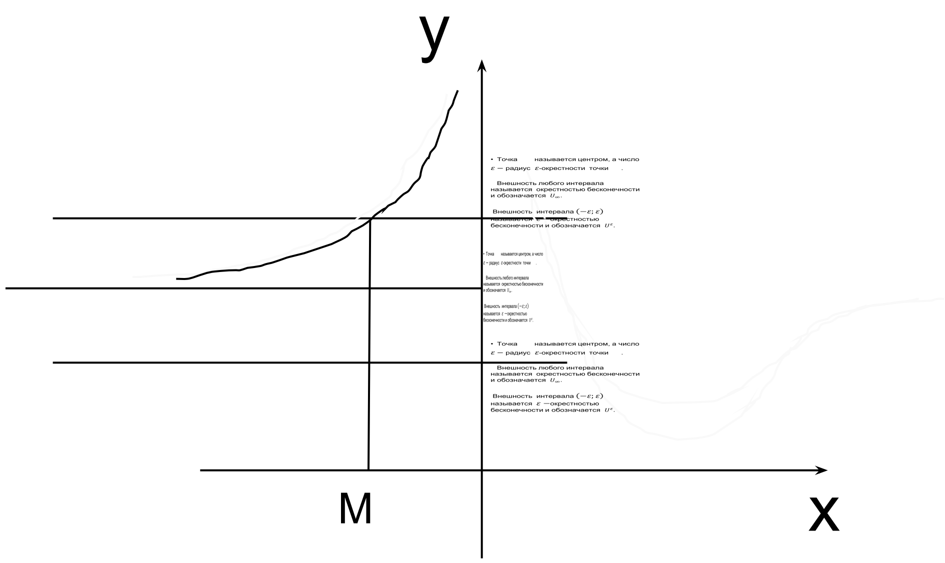


- Точка "b называется центром, а число ε — радиус ε-окрестности точки .

Внешность любого интервала называется окрестностью бесконечности и обозначается U_∞.

Внешность интервала $(-\varepsilon; \varepsilon)$ называется ε —окрестностью бесконечности и обозначается U^ε.

Геометрический смысл

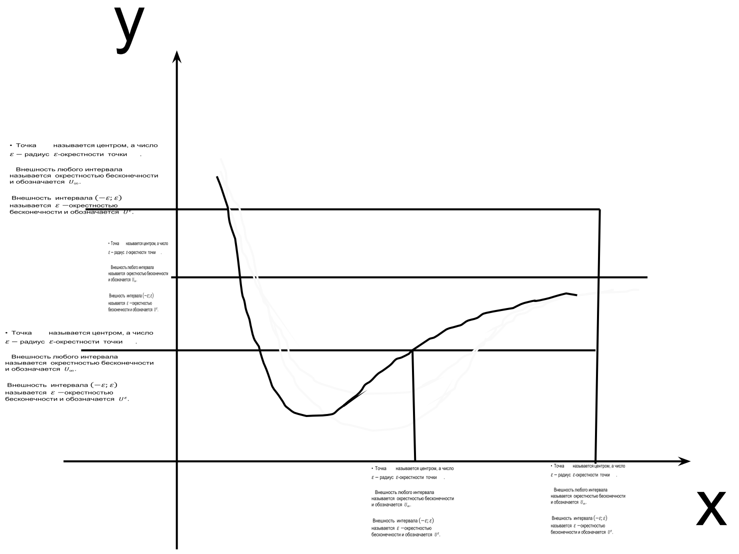


- Точка "b" называется центром, а число ε — радиус ε-окрестности точки .

Внешность любого интервала называется окрестностью бесконечности и обозначается U_{∞}.

Внешность интервала $(-\varepsilon; \varepsilon)$ называется ε —окрестностью бесконечности и обозначается U^{ε}.

Геометрический смысл



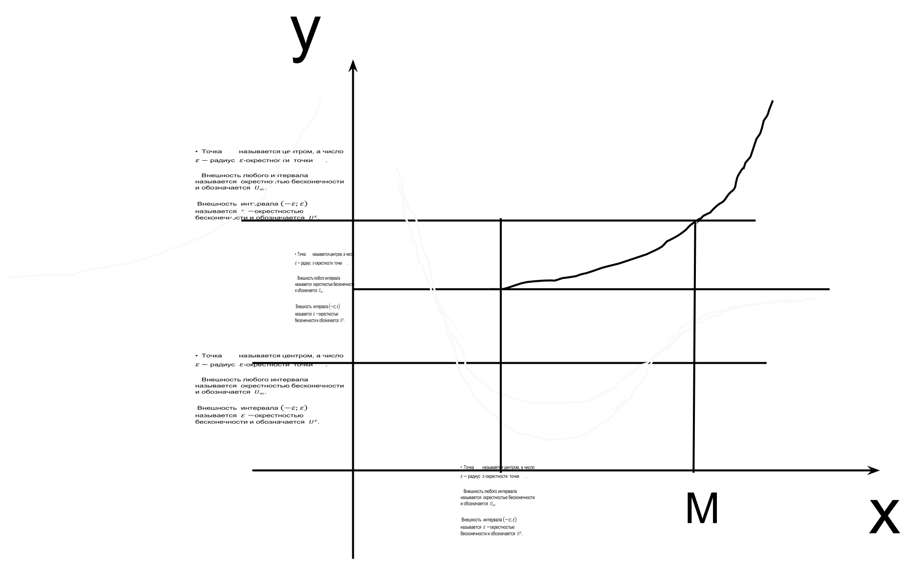
- Точка "b" называется центром, а число

ε — радиус ε-окрестности точки .

Внешность любого интервала называется окрестностью бесконечности и обозначается U_∞.

Внешность интервала $(-\varepsilon; \varepsilon)$ называется ε —окрестностью бесконечности и обозначается U^ε.

Геометрический смысл



• Точка $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ называется $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ центром, а число ε – радиус ε-окрестности точки .

Внешность любого интервала называется окрестностью бесконечности и обозначается U_∞.

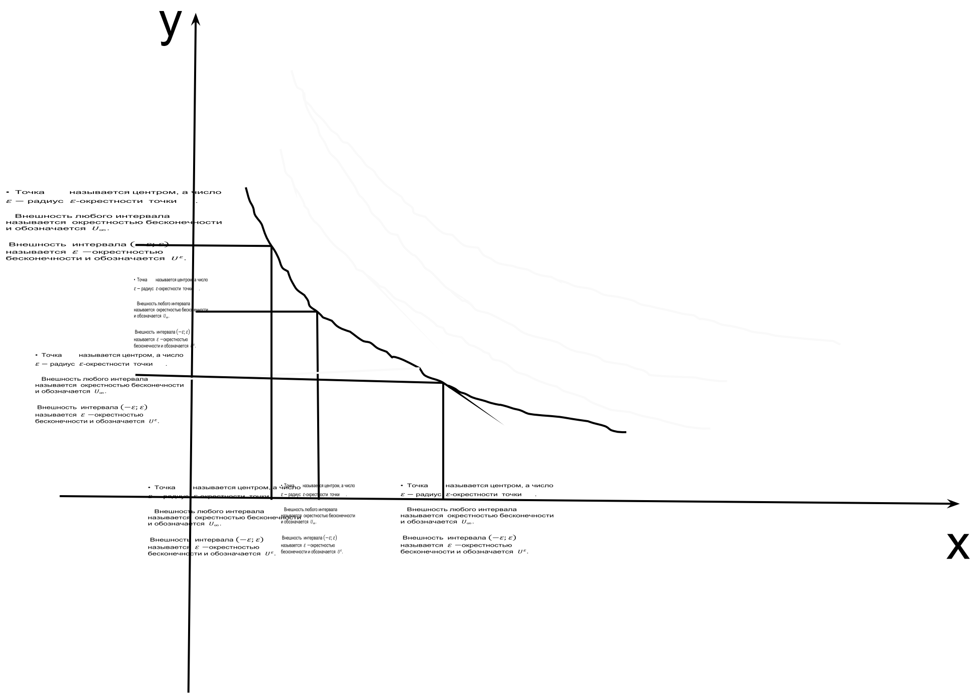
Внешность интервала $(-\varepsilon;\varepsilon)$ называется ε –окрестностью бесконечности и обозначается U^ε.

- Точка называется центром, а число

ε — радиус ε-окрестности точки .

Внешность любого интервала называется окрестностью бесконечности и обозначается U_a^{δ}, U_∞.

Внешность интервала $(-\varepsilon; \varepsilon)$ называется ε —окрестностью бесконечности и обозначается U^{ε}.


y
x

- Рассмотрим функцию $y = 2x$

$$x \to 3 - 0$$

x	2	2,5	2,9	2,99	2,999	2,9999
y	4	5	5,8	5,98	5,998	5,9998

$$x \to 3 + 0$$

x	4	3,5	3,1	3,01	3,001
y	8	7	6,2	6,02	6,002

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 3-0} 2x = 6\\ \lim_{x\to 3+0} 2x = 6\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 3} 2x = 6$$

Бесконечно малые функции

- Точка $y = f(x)$ называется центром, а число ε — радиус ε-окрестности точки $x \to a$.

a Внешность любого интервала называется окрестностью бесконечности $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ и обозначается U_∞.

Внешность интервала $(-\varepsilon; \varepsilon)$ называется ε —окрестностью бесконечности и обозначается U^ε.

- Точка называется центром, а число

ε — радиус ε-окрестности точки .

Внешность любого интервала называется окрестностью бесконечности и обозначается U_∞.

Внешность интервала $(-\varepsilon; \varepsilon)$ называется ε —окрестностью бесконечности и обозначается U^ε.

Свойства бесконечно малых функций

- Точка называется центром, а число

ε – радиус ε-окрестности точки .

Внешность любого интервала называется окрестностью бесконечности и обозначается U_{∞}.

Внешность интервала $(-\varepsilon; \varepsilon)$ называется ε –окрестностью бесконечности и обозначается U^{ε}.

Бесконечно большие функции

- Точка $y = f(x)$ называется центром, а число

ε — радиус ε-окрестности точки $x \to a$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

Внешность любого интервала называется окрестностью бесконечности и обозначается U_∞.

Внешность интервала $(-\varepsilon; \varepsilon)$ называется ε —окрестностью бесконечности и обозначается U^ε.

- Теорема. Если $\alpha(x)$ бесконечно малая при $x \to a$ и $\alpha(x) \neq 0$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ бесконечно большая при $x \to a$.

- Теорема. Если $f(x)$ бесконечно большая функция при $x \to a$, то $\dfrac{1}{f(x)}$ бесконечно малая при $x \to a$.

- Точка называется центром, а число ε — радиус ε-окрестности точки .

Внешность любого интервала называется окрестностью бесконечности и обозначается U_∞.

Внешность интервала $(-\varepsilon; \varepsilon)$ называется ε —окрестностью бесконечности и обозначается U^ε.

Свойства пределов

1) $\lim\limits_{x\to a} C = C;$

2) $\lim\limits_{x\to a} C\cdot f(x) = C\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x);$

3) $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x);$

4) $\lim\limits_{x\to a} (f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x);$

5) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}, \lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0.$

6) Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то

$$\lim_{x\to a}\{f(x)\}^{g(x)} = A^B$$

Теорема о зажатой переменной

- Точка называется центром, а число

ε — радиус ε-окрестности точки .

Внешность любого интервала называется окрестностью бесконечности и обозначается U_∞.

Внешность интервала $(-\varepsilon;\ \varepsilon)$ называется ε —окрестностью бесконечности и обозначается U^ε.

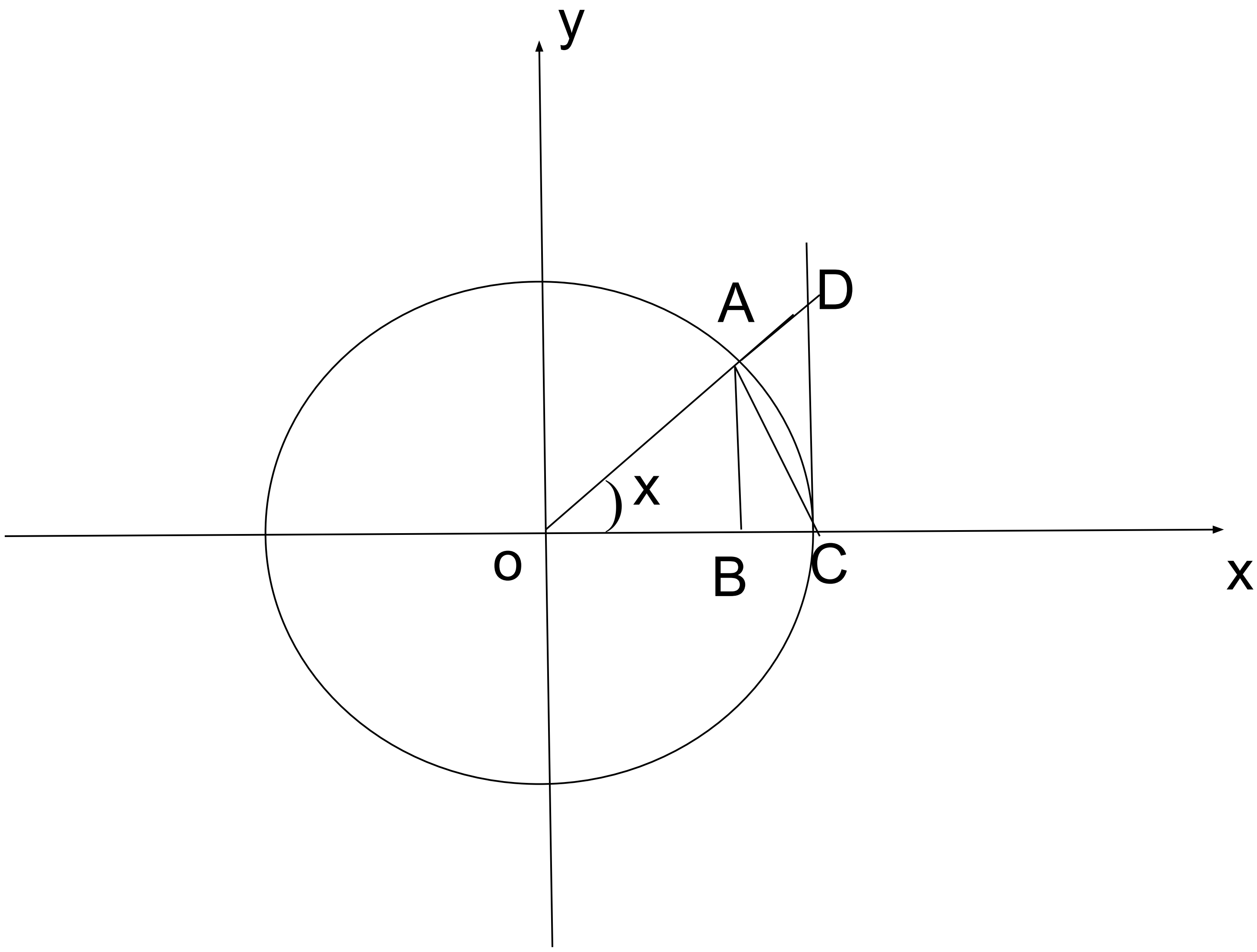
Первый замечательный предел

$$\lim_{\substack{x \to a \\ \alpha(x) \to 0}} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$$

Доказательство проведем для частного случая $\alpha(x) = x$, т.е. докажем, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$, свойство о пределе частного не применимо.



y
A
D
x
o
B
C
x

- Докажем, что

$$\lim_{x\to 0}\sin x = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0}\cos x = 1.$$

$$\cup\, AC = x \qquad AB = \sin x$$

$$CD = tgx$$

$$0 < AB < \cup AC$$

$$0 < \sin x < x$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} 0 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} x = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\sin x = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\cos x = \lim_{x\to 0}\sqrt{1-\sin^2 x} = 1$$

ВГУЭС

$$S_{\Delta OAC} < S_{сект.OAC} < S_{\Delta ODC}$$

$$\frac{1}{2} OC \cdot AB < \frac{1}{2} OC \cdot \cup AC < \frac{1}{2} OC \cdot CD$$

$$AB < \cup AC < CD$$

$$\sin x < x < tgx$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1\\[2ex] \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1;}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1.$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{x}{tgx}=1;}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1;}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\left|\begin{array}{l} y=\arcsin x \\ x=\sin y \\ x\to 0\Rightarrow y\to 0 \end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1.$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin x}=1;}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{arctgx}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{arctgx} = 1$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{\substack{x\to a\\ \alpha(x)\to 0}}\left\{1+\alpha(x)\right\}^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(x+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\log_a(x+1)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\log_a(x+1)^{\frac{1}{x}}=\log_a\left(\lim_{x\to 0}(x+1)^{\frac{1}{x}}\right)=\log_a e.$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(x+1)}{x}=\log_a e.}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=\ln e=1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\left|\begin{array}{l} y=a^x-1 \\ a^x=y+1 \\ x=\log_a(y+1) \\ x\to 0\Rightarrow y\to 0 \end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(y+1)}=\frac{1}{\log_a e}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\frac{1}{\log_a e}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{\log_e e}=1}$$

Сравнение бесконечно малых

- Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые функции при $x \to a$:

1) $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются б.м. одного порядка малости при $x \to a$, если существует конечный

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \neq 0$$

2) бесконечно малые $\alpha(x)$и $\beta(x)$ одного порядка малости при $x \to a$ называются эквивалентными бесконечно малыми, если

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

- При $x \to 0$

$$\sin x \sim x$$
$$tgx \sim x$$

$$\arcsin x \sim x$$
$$arctgx \sim x$$
$$\ln(x+1) \sim x$$
$$e^x - 1 \sim x$$

3) бесконечно малая $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка чем бесконечно малая $\beta(x)$ при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0.$$

4) если не существует конечного

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)},$$

то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются несравнимыми бесконечно малыми при $x \to a.$

- Теорема. Пусть $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ и $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ бесконечно малые функции при $x \to a$ (а конечно и бесконечно) и существует

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, тогда существует

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha(x)}\cdot\frac{\beta(x)}{\beta_1(x)}\cdot\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\beta_1(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta_1(x)}$$

- Точка называется центром, а число ε – радиус ε-окрестности точки .

Внешность любого интервала называется окрестностью бесконечности и обозначается U_∞.

Внешность интервала $(-\varepsilon; \varepsilon)$ называется ε –окрестностью бесконечности и обозначается U^ε.

- Точка называется центром, а число

ε – радиус ε-окрестности точки .

Внешность любого интервала называется окрестностью бесконечности и обозначается U_∞.

Внешность интервала $(-\varepsilon;\varepsilon)$ называется ε –окрестностью бесконечности и обозначается U^ε.

Непрерывность функции

Непрерывность в точке

- Функция $y=f(x)$ наз. непрерывной в точке a, если:

1) функция определена в точке a и некоторой её окрестности;

2) существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ $\left(\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$

$$\lim_{x\to a} f(x)=f\left(\lim_{x\to a} x\right)=f(a)$$

Классификация точек разрыва

- Точка, в которой нарушается непрерывность функции, называется точкой разрыва этой функции.
- Точка разрыва a функции $y = f(x)$ называется точкой разрыва первого рода, если существуют конечные пределы

$$\lim_{x \to a-0} f(x) \neq \lim_{x \to a+0} f(x)$$

- Если хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности, то точка a называется точкой разрыва второго рода.
- Точка разрыва называется точкой устранимого разрыва функции $y = f(x)$, если

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) \neq f(a).$$

- Пусть a - точка разрыва первого рода функции $y = f(x)$. Скачком функции в точке a называется

$$h = \left| \lim_{x \to a+0} f(x) - \lim_{x \to a-0} f(x) \right|.$$

Свойства функций непрерывных в точке

- Точка называется центром, а число

ε — радиус ε-окрестности точки .

Внешность любого интервала называется окрестностью бесконечности и обозначается U_∞.

Внешность интервала $(-\varepsilon; \varepsilon)$ называется ε —окрестностью бесконечности и обозначается U^ε.

Непрерывность на отрезке

- Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a;b]$, если она определена на этом отрезке, непрерывна в каждой точке интервала $(a;b)$, а на концах отрезка непрерывна соответственно слева и справа, т.е.

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = f(b)$$

Свойства функций непрерывных на отрезке

1.Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

Следствие. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на этом отрезке.

2.Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри отрезка $[a;b]$ существует по крайне мере одна точка, в которой значение функции равно нулю.

3. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и $f(a) = A,\ f(b) = B,\ A \neq B.$ Тогда для любого числа C,заключенного между A и B , найдется точка $c \in (a;b)$, такая, что

$$f(c) = C.$$

- Пусть дана функция $y = f(x)$.

Рассмотрим два значения её аргумента: Исходное x_0 и новое x .

Разность $x - x_0$ наз.приращением аргумента в точке x_0 и обозначим Δx:

$$\Delta x = x - x_0$$

- Разность $y - y_0 = f(x) - f(x_0)$ наз. приращением функции в точке x_0 :

$$\Delta y = f(x) - f(x_0).$$

$$x = x_0 + \Delta x$$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0} \left(f(x) - f(x_0)\right) = 0$$

$$f(x) - f(x_0) = \Delta y$$

$$x - x_0 = \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$$

ВГУЭС

- Функция наз. непрерывной в точке. если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.