1. МАТРИЦІ ТА ВИЗНАЧНИКИ

1. Матриці та їх властивості
2. Лінійні операції над матрицями
3. Визначники та їх властивості

§1 МАТРИЦІ ТА ВИЗНАЧНИКИ

1.1 Матриці та їх властивості

Матрицею розміру $m \times n$ називається сукупність чисел, розташованих у вигляді таблиці з m рядків і n стовпчиків:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Приклад:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & -8 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

размера 3×3

Числа, що складають матрицю, називаються ***елементами*** матриці. Якщо $m \neq n$, то матриця називається ***прямокутною***. Якщо $m = n$, то матриця называється ***квадратною порядку n.***

Матриця розміру $m\times 1$ виду $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$, що складається з одного стовпця

називається ***вектор-стовпець***, а матриця $A=[a_1 \; a_2 \ldots a_n]$ розміру $1\times n$, що складається з одного рядка – ***вектор-рядок***.

У випадку квадратної матриці

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

елементи $a_{11}, a_{22},\ldots a_{nn}$ утворюють ***головну діагональ***, а елементи $a_{n1}, a_{n-1\,2},\ldots a_{1n}$ – ***побічну діагональ*** матриці.

Квадратна матриця, в якої всі елементи a_{ij} дорівнюють 0 називається ***нульовою*** матрицею.

Матриця $$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ називається ***одиничною***.

1.2 Лінійні операції над матрицями

1. Порівняння

$A=B$, якщо у них елементи, що розташовані на відповідних місцях, рівні.

2. Додавання

Для того, чтоб додать дві матриці A і B (одинакової розмірності) необхідно додать їх відповідні елементи.

Для того, чтобы знайти ***різницю матриць*** A *і* B (одинакової розмірності) необхідно з кожного елемента матриці A відняти відповідний елемент матриці B.

Матриця -A (мінус A)називається матрицею ***протилежною*** A.

Приклад: Нехай $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 7 \end{bmatrix}$.

Тоді $A + B = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -10 \\ 0 & 9 & 6 \end{bmatrix}$, $A - B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -8 \end{bmatrix}$,

$$-A = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 6 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. *Множення на число*

Для того, чтоб помножити матрицю A на число $\alpha \in R$ необхідно кажен элемент матриці помножить на число α.

Приклад: Нехай $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$,

тоді $$2 \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 10 & -12 \\ 0 & 8 & -2 \end{bmatrix}.$$

4. ***Множення на вектор-стовпчик***

Для множення $m \times n$ матриці A на вектор-стовпчик x необхідно, щоб число стовпців n матриці A дорівнювало числу елементів вектор-стовпчика x. Тоді ***добуток матриці A на вектор-стовпець x*** позначається Ax і дорівнює

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Приклад:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 0 + (-6) \cdot 2 \\ 0 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

5. *Множення двох матриць*

Нехай $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ і $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{bmatrix}$

$m \times n$ і $n \times k$ матриці (***узгоджені матриці***) відповідно – число стовців матриці а дорівнює числу рядків матриці В.

Добутком матриці A на матрицю B називається $m \times k$ матриця C з елементами c_{ij}, що дорівнюють сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B, $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$, $i=1..m$, $j=1..k$.

Приклад: Зайти добуток матриць $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ і $B=\begin{bmatrix}2 & 4 & 1\\ 0 & 3 & -1\end{bmatrix}$.

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}1\cdot 2+(-1)\cdot 0 & 1\cdot 4+(-1)\cdot 3 & 1\cdot 1+(-1)\cdot(-1)\\ 1\cdot 2+0\cdot 0 & 1\cdot 4+0\cdot 3 & 1\cdot 1+0\cdot(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 2 & 4 & 1\end{bmatrix}.$$

Матриця A^T, отримана з даної матриці A шляхом заміни рядків на стовпчики, і навпаки, називається ***транспонованою***.

Приклад:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\qquad A^T=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}.$$

1.3 Визначники та їх властивості

Поняття визначника вводиться тільки для квадратних матриць.

Визначником n-го порядку матриці A називається алгебраїчна сума всіляких добутків елементів, взятих точно по одному з кожного рядка і кожного стовпчика матриці A. Знак кожного доданка визначається спеціальним правилом.

Визначник n-го порядку містить $n!$ членів.

$$\boxed{|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$ – ***визначник другого порядку***.

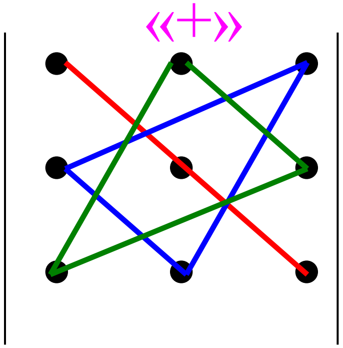
Приклад:

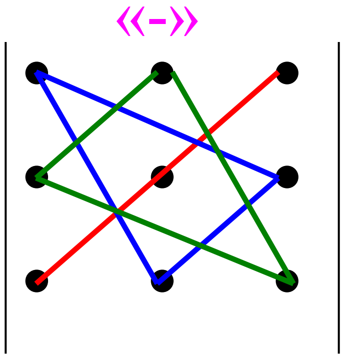
$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - (-5) \cdot 3 = 14 - (-15) = 29.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} -$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33}$$ – ***визначник третього порядку***.

Правило трикутника*:*три додатних члена визначника третього порядку є добутком елементів головної діагоналі і елементів, що знаходяться в вершинах двох рівнобедрених трикутників, основи яких паралельні головній діагоналі. Три його від'ємних члена є добутком елементів побічної діагоналі і елементів, що знаходяться в вершинах двох рівнобедрених трикутників, основи яких паралельні побічної діагоналі.





Властивості визначників n-го порядку:

1. Визначник матриці А дорівнює визначнику транспонованою матриці, $|A| = |A^T|$.
2. Якщо всі елементи деякого рядка матриці А дорівнюють 0, то визначник дорівнює 0.
3. Загальний (спільний) множник всіх елементів рядка визначника можна винести за знак цього визначника.
4. Якщо у визначнику поміняти місцями два рядки, то він змінить знак на протилежний.
5. Якщо визначник має два рівні рядки, то він дорівнює 0.
6. Якщо елементи двох рядків визначника пропорційні, то визначник дорівнює 0.

7. Значення визначника не зміниться, якщо до елементів його рядка додати відповідні елементи іншого рядка, помножені на одне і те ж число k.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} називається визначник $(n$-$1)$ порядку, отриманний викресленням з визначника n-го порядку елементів i –го рядка та j-го стовпця, i, j=1..n.

Приклад:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & -8 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 3 - 1\cdot 0 = -6$$

– мінор елемента a_{23}.

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} називаєтьчя число

$$\boxed{A_{ij}=(-1)^{i+j} M_{ij}.}$$

$A_{23}=(-1)^{2+3} M_{23}=(-1)(-6)=6.$

8. Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого його рядка на відповідні алгебраїчні доповнення елементів цього рядка.

Формула Лапласа:

$$\boxed{|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in},\ i = 1..n.}$$

Приклад: обчислити визначник

а) за правилом трикутника:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & -8 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 2\cdot 6 + 6\cdot 3\cdot 4 + 1\cdot(-8)\cdot 0 - 4\cdot 2\cdot 0 -$$

$$-3\cdot(-8)\cdot(-2) - 1\cdot 6\cdot 6 = -24 + 72 + 0 - 0 - 48 - 36 = -36.$$

б) використовуючи формулу Лапласа, розкладемо визначник за елементами третього рядка :

$$|A| = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33},$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & -8 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} +$$

$$+ 6 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 3 \cdot (-1) \cdot ((-2) \cdot (-8) - 4 \cdot 6) +$$

$$+ 6 \cdot 1 \cdot ((-2) \cdot 2 - 1 \cdot 6) = 0 + (-3) \cdot (-8) + 6 \cdot (-10) = 24 - 60 = -36.$$