

## Лекція №5



# ***ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН***

# ЗМІСТ

- *Рівномірний розподіл*
- *Нормальний розподіл  
(розподіл Гаусса)*
- *Розподіл “ $\chi$  - квадрат”*
- *Розподіл Стьюдента*

# *Рівномірний розподіл*

**Рівномірний розподіл.** Розподіл ймовірностей називають рівномірним, якщо на проміжку  $(a, b)$ , до якого належать всі можливі значення випадкової величини  $X$ , щільність розподілу має постійне значення  $c$ , тобто:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a; \\ c & \text{при } a \leq x \leq b; \\ 0 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

# *Рівномірний розподіл*

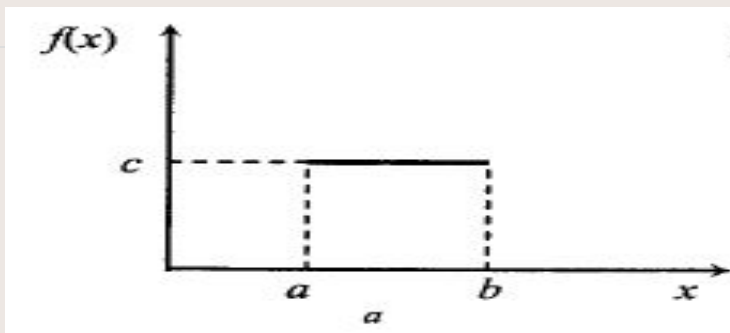


рис.1

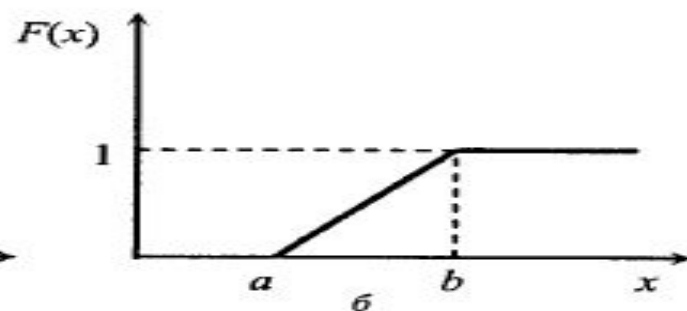


рис.2

Звідси

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_a^b c dx = c(b-a).$$

Але, як відомо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

З порівняння цих рівностей отримаємо:

$$c = \frac{1}{b-a}.$$

# *Рівномірний розподіл*

Отже щільність ймовірностей неперервної випадкової величини  $X$ , яка рівномірно розподілена на проміжку  $(a, b)$  має вигляд (рис.1)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a; \\ \frac{1}{b-a} & \text{при } a \leq x \leq b; \\ 0 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

Інтегральна функція розподілу  $F(x)$  для рівномірно розподіленої величини на проміжку

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x-a}{b-a}.$$

Її графік зображено на рис.2

# *Рівномірний розподіл*

Наведемо приклади деяких конкретних величин з рівномірним законом розподілу. При вимірюванні багатьох фізичних величин проводиться округлення до найближчої поділки шкали. Похибки (помилки) при округленні і є випадковою величиною, що має рівномірний закон розподілу. Симетричне колесо, яке обертається і зупиняється внаслідок тертя (рулетка в казино), утворює деякий кут між рухомим та нерухомим радіусом; значення цього кута – випадкова величина з рівномірним законом розподілу

# Нормальний розподіл (розподіл Гаусса)

Закон розподілу неперервної випадкової величини  $X$  називається нормальним, якщо щільність розподілу дорівнює

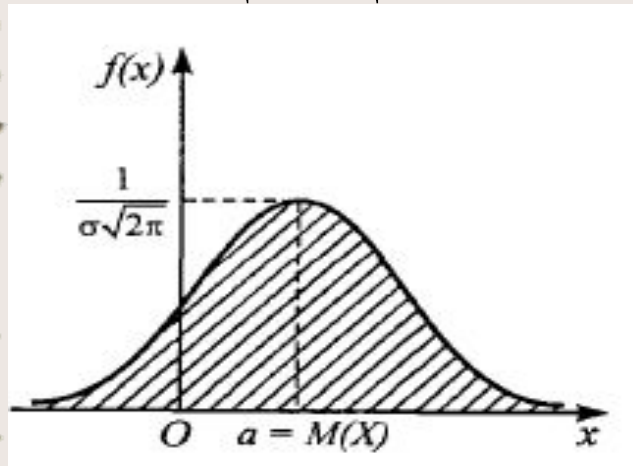


рис.3

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

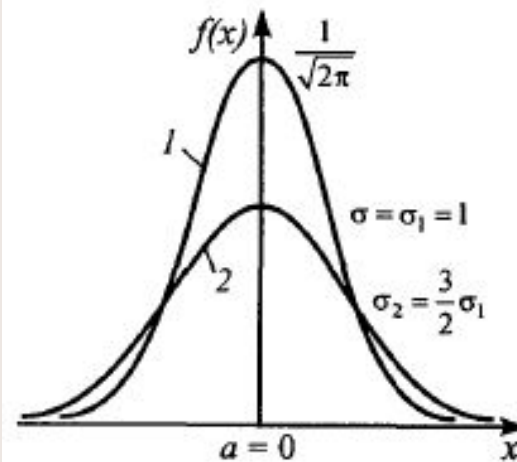


рис.4



# Нормальний розподіл (розподіл Гаусса)

Графік розподілу Гаусса описується симетричною відносно  $a = M(X)$  кривою (рис.3).  $\sigma$  має зміст середнього квадратичного відхилення  $\sigma = \sqrt{D(X)}$

При  $x=a$  ордината кривої нормальної щільності ймовірності дорівнює

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$



# *Нормальний розподіл (розподіл Гаусса)*

При збільшенні квадратичного відхилення ця ордината зменшується. При цьому крива пропорційно звужується вздовж осі ординат так, що обмежена графіком площа залишається рівною одиниці (рис.4). Іншими словами, розкид можливих значень випадкової величини збільшується при збільшенні квадратичного відхилення. Форма кривої Гаусса не залежить від  $a$ : при різних  $a$  вона може паралельно зміщуватися вздовж осі абсцис.

Нормальний розподіл з параметрами  $\mu$  та  $\sigma$  називають **стандартним (нормованим)**

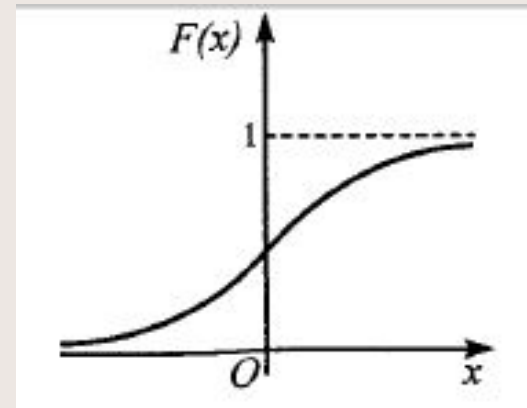
# Нормальний розподіл (розподіл Гаусса)

Щільність розподілу в такому випадку дорівнює:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Значення функції  $\varphi(x)$  наведені в таблиці-додатку а графік зображено на рис.4 інтегральна функція Розподілу має вигляд

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$



# Функція Лапласа

Припустимо, що випадкова величина  $X$  розподілена нормальним законом. Тоді ймовірність того, що  $X$  набуде значень з інтерва.  $(\alpha, \beta)$ , дорівнює:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx .$$

Зробимо підстановку  $\frac{x-a}{\sigma} = t$ . Тоді  $x = a + \sigma t$ , а  $dx = \sigma dt$ .

Функція щільності нормально розподіленої величини набуде при цьому нормованого виду і ми матимемо:

# Функція Лапласа

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt .$$

Отриманий інтеграл не береться в елементарних функціях, тому для його обчислення вводять функцію

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt ,$$

яка називається **функцією Лапласа**  
(інтегралом ймовірностей)

# Функція Лапласа

## Основні властивості функції Лапласа

1.  $\Phi(x)$  визначена при всіх значеннях  $x \in \mathbf{R}$ .
2.  $\Phi(x)$  – непарна, тобто  $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ .
3.  $\Phi(0) = 0$ .
4.  $\Phi(x)$  – монотонно зростаюча функція.

З допомогою функції Лапласа можна знайти ймовірність попадання значень нормально розподіленої випадкової величини в будь – який інтервал числової осі.

# Функція Лапласа

Згідно з

$$\int_a^b f(x)dx = P(a < X < b).$$

та

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

з урахуванням виконаної раніше підстановки

$$\frac{x-a}{\sigma} = t.$$

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1).$$



# Розподіл “ $\chi$ - квадрат”

Припустимо,  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) - нормально розподілені незалежні випадкові величини, математичне сподівання кожної з яких дорівнює нулю, а середнє квадратичне відхилення – одиниці. Тоді сума квадратів цих величин

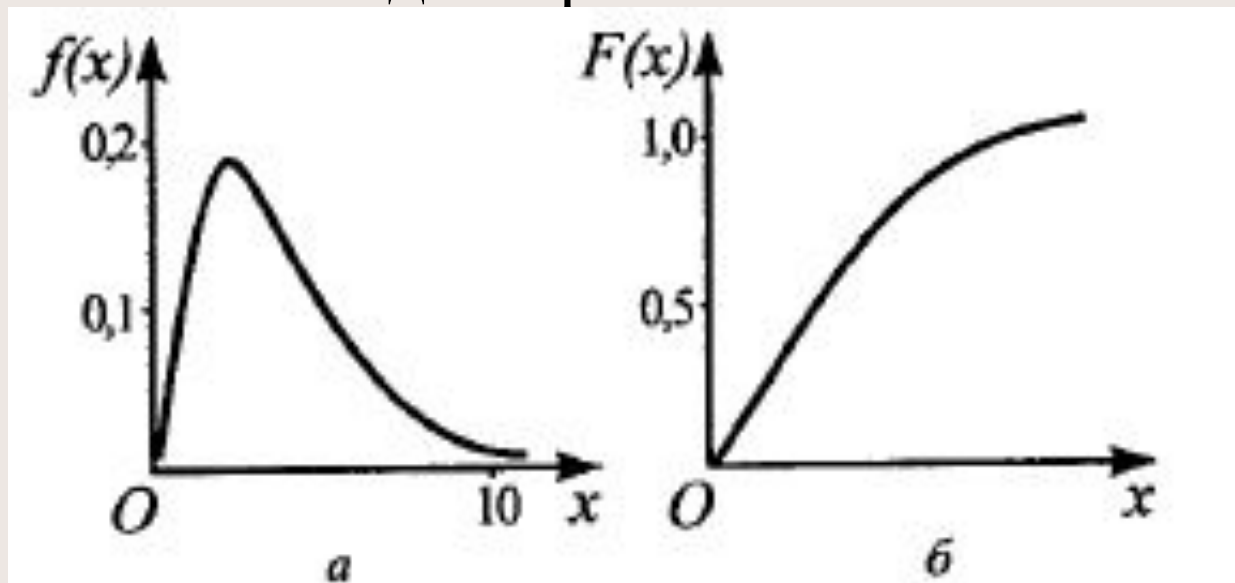
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

має розподіл  $\chi^2$  з  $k=n$  ступенями вільності. Якщо ж ці величини пов'язані між собою декількома (наприклад  $m$ ) лінійними співвідношеннями, то число ступенів вільності  $k = n - m$



# Розподіл “ $x$ - квадрат”

На малюнку подано графік щільності розподілу “ $x$  - квадрат” при  $k=4$  ступенях вільності (а) та графік функції розподілу (б). При збільшенні числа ступенів вільності розподіл наближається до нормального



# *Розподіл Стьюдента*

Припустимо що  $Z$  – нормально розподілена нормована випадкова величина ( $\mu(Z) = 0, \sigma(Z) = 1$ ), а  $V$  – незалежна від  $Z$  величина, що має розподіл “ $\chi$  - квадрат”, з  $k$  – ступенями вільності. Відношення нормованої нормальної величини до кореня квадратного з незалежної випадкової величини, розподіленої за законом “ $\chi$  - квадрат”, поділеної на кількість ступенів вільності цього розподілу  $k$ , називають розподілом Стьюдента:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{k}}}.$$

# *Розподіл Стюдента*

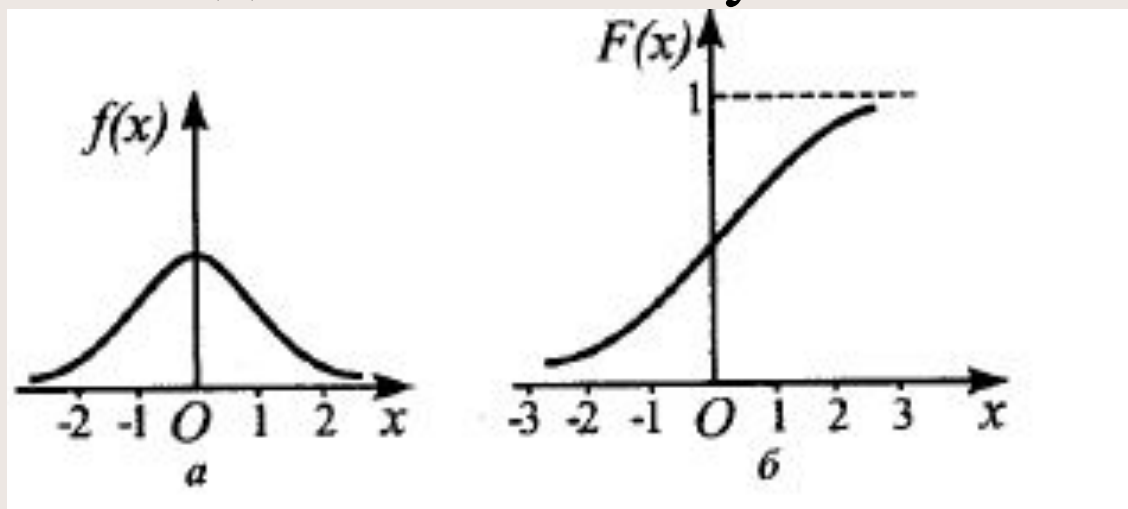
Розподіл Стюдента повністю визначається числом ступенів вільності і є парною функцією. Щільність ймовірності розподілу Стюдента:

$$s(t, k) = B_k \left( 1 + \frac{t^2}{k-1} \right)^{-\frac{k}{2}},$$

де  $B_k$  - коефіцієнт, який залежить від об'єму вибірки.

# *Розподіл Стюдента*

Графіки щільності розподілу (а) та функції розподілу (б) Стюдента з одним ступенем вільності подано на малюнку.



При збільшенні числа ступенів вільності розподіл Стюдента наближається до нормального.

