

ВЕКТОРИ У ПРОСТОРИ



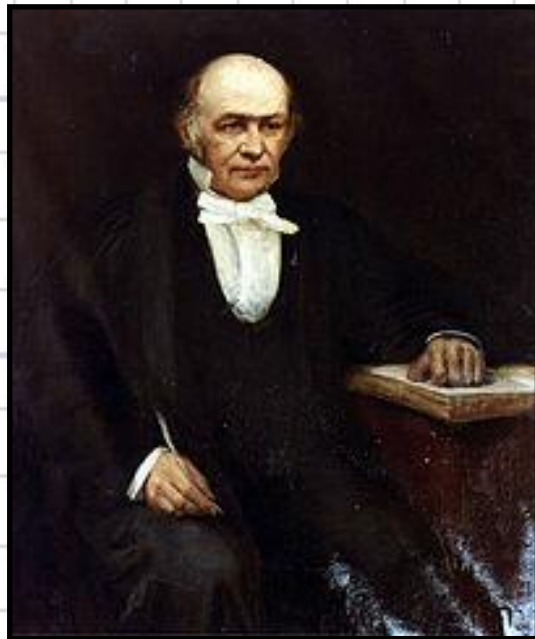
Зміст

- 1.Поняття вектора.
- 2.Координати вектора.
- 3.Абсолютна величина вектора.
- 4.Рівні вектори.
- 5.Колінеарні вектори.
- 6.Компланарні вектори.
- 7.Дії над векторами.
- 8.Скалярний добуток векторів.
- 9.Приклади.





Герман Грассман



Гамільтон

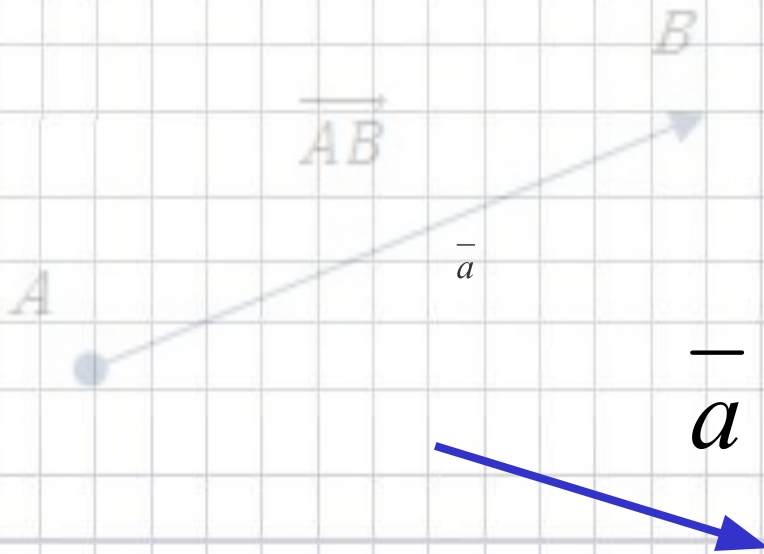
Вектор

Поняття вектора з'явилося в роботах німецького математика XIX ст. Г. Грассмана та ірландського математика У. Гамільтона. Згодом воно було охоче сприйняте багатьма математиками і фізиками. В сучасній математиці це поняття відіграє дуже важливу роль.



Поняття вектора

- **Вектор** - це величина, яка характеризується числовим значенням і напрямком.
- **Вектор** - напрямлений відрізок.
- Під направленим відрізком розуміють впорядковану пару точок, перша з яких - точка A - називається його **початком**, а друга - B - його **кінцем**.



$\vec{AB}, \vec{AB}, \bar{a}, \bar{a}$

$\vec{AA}$



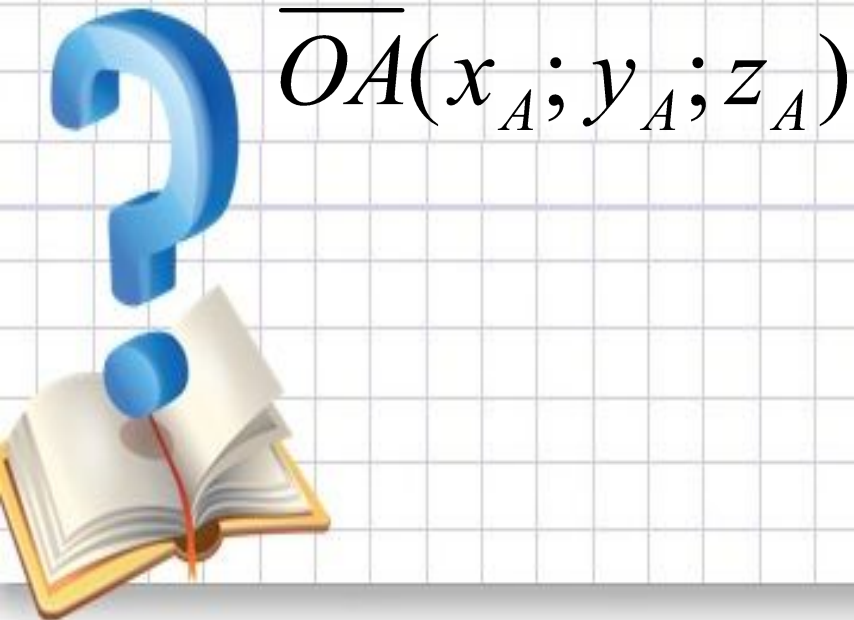
$$\vec{AA} = \bar{0}$$



Координати вектора

$$AB(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$$

- Координати вектора дорівнюють різниці координат його кінця та початку
- Координати вектора, для якого початком є початок координат дорівнюють координатам його кінця



$$\overline{OA}(x_A; y_A; z_A)$$

Абсолютна величина вектора

$$|\overline{AB}| = \sqrt{x_{AB}^2 + y_{AB}^2 + z_{AB}^2}$$

Абсолютна величина вектора

*(модуль вектора, довжина вектора)
дорівнює кореню квадратному із*

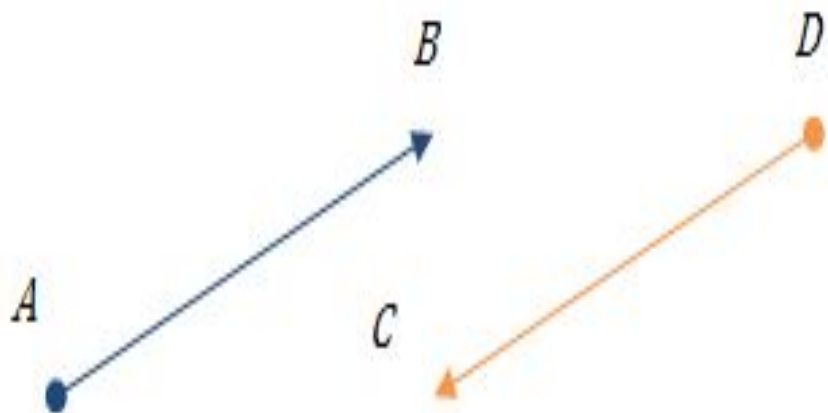
суми квадратів його координат

$$|\overline{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$$

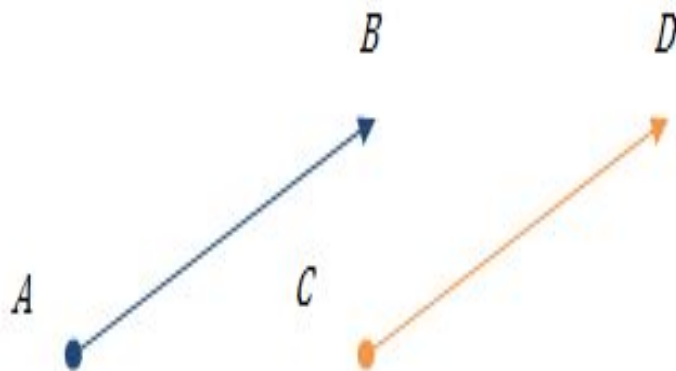
$$|\overline{0}| = 0$$



Напрямлєність векторів



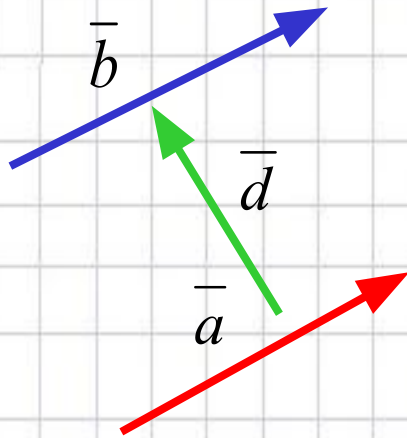
- Вектори $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{CD}$ називають **протилежно напрямлєними**, якщо протилежно напрямлєні півпрямі AB і CD .



- Вектори $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{CD}$ називають **співнаправлєними**, якщо співнаправлєні півпрямі AB і CD .



Рівні вектори



$$|\vec{a}| = |\vec{b}|$$
$$\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$$

- **Рівні вектори** – це вектори, що мають рівні абсолютні величини та однаковий напрям.
- **Рівні вектори** – це вектори, що мають рівні координати.

$$\vec{a} = \vec{b},$$

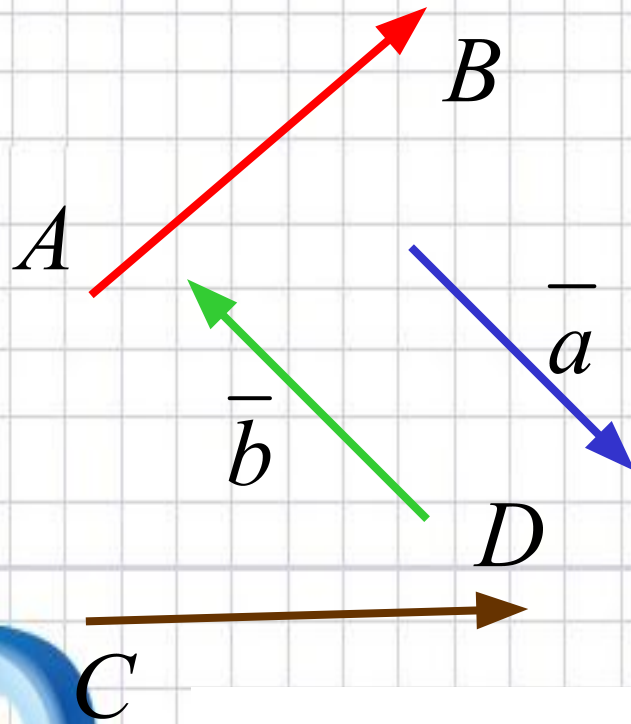
$$x_{\vec{a}} = x_{\vec{b}},$$

$$y_{\vec{a}} = y_{\vec{b}},$$

$$z_{\vec{a}} = z_{\vec{b}}$$



Колінеарні вектори



Колінеарні вектори

—

**це вектори, що
лежать**

**на паралельних
прямих,**

або на одній прямій



$$\vec{a} \parallel \vec{b}$$

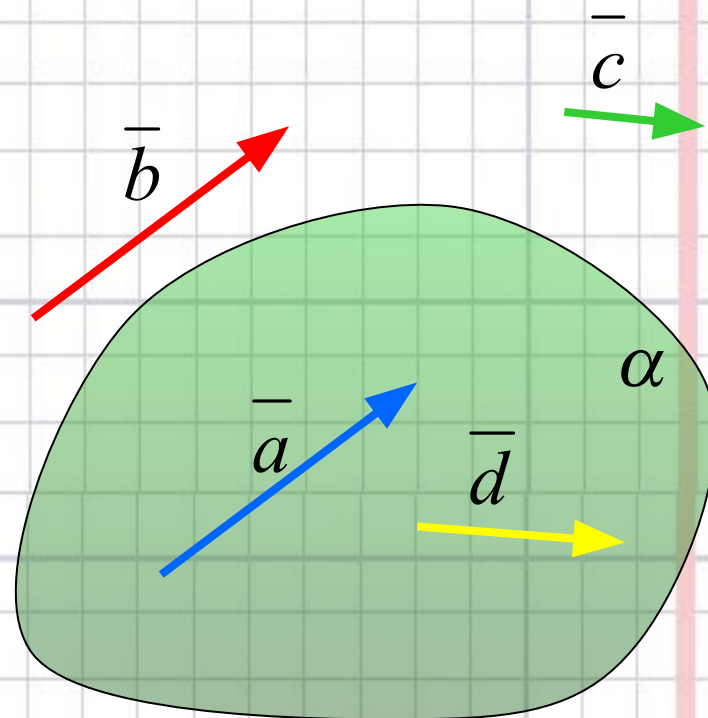


Компланарні вектори

**Компланарні
вектори -**

**це вектори, що
лежать**

**у одній площині, або
паралельні одній
площині**



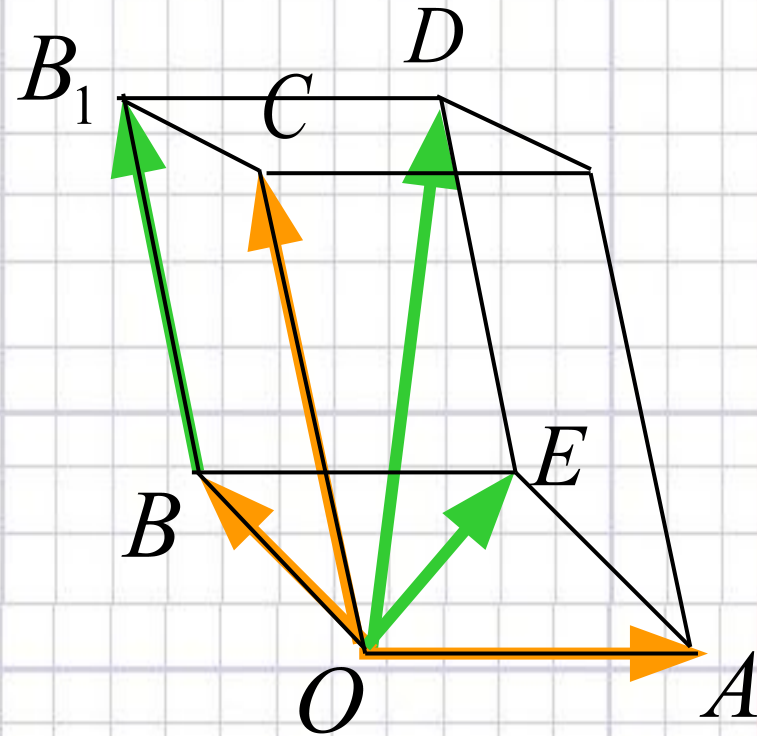
Компланарні вектори

**Компланарні
вектори**

$$\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{OD} \text{ и } \overrightarrow{OE}.$$

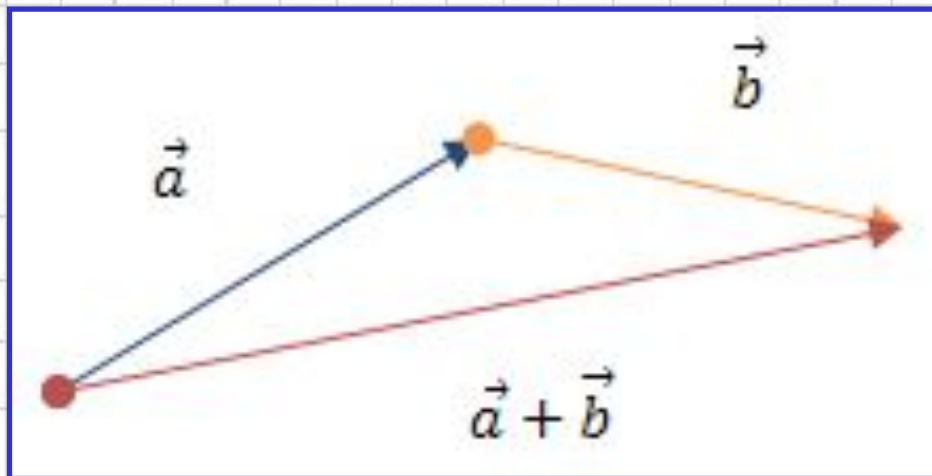
**Некомпланарні
вектори**

$$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \text{ и } \overrightarrow{OC}.$$

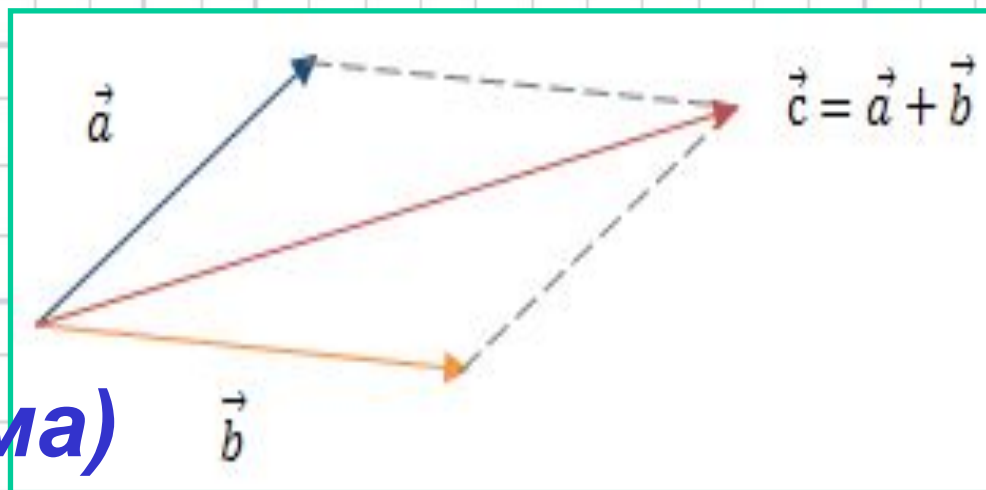


Дії над векторами

Додавання
(правило
трикутника)

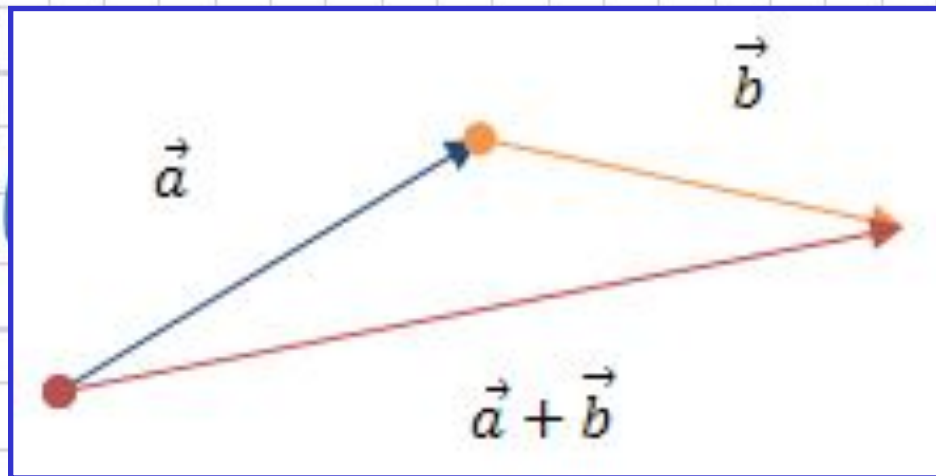


Додавання
(правило
паралелограма)



Дії над векторами

Додавання (правило трикутника)

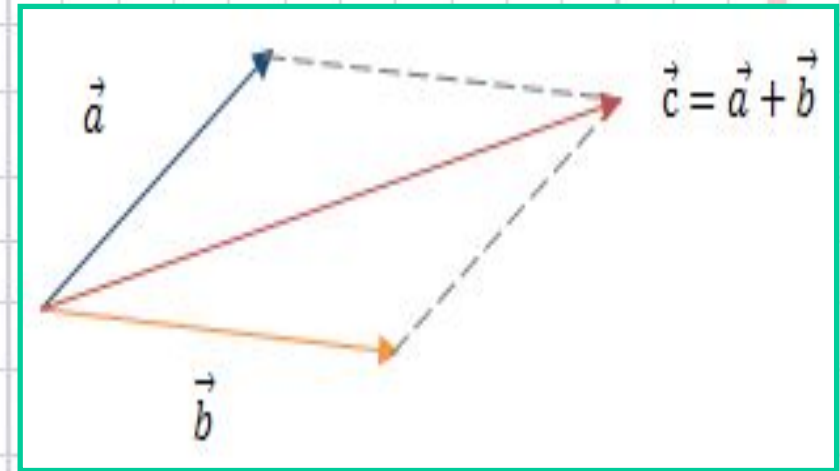


- За правилом трикутника обидва вектора переносяться паралельно самим собі так, щоб початок одного з них збігався з кінцем іншого.
- Вектор суми задається третьою стороною трикутника, що утворився, причому його початок збігається з початком першого вектора.



Дії над векторами

- *За правилом паралелограма обидва вектора переносяться паралельно самим собі так, щоб їх початки збігалися.*
- *Вектор суми задається діагоналлю побудованого на них паралелограма, яка виходить з їх спільного початку.*

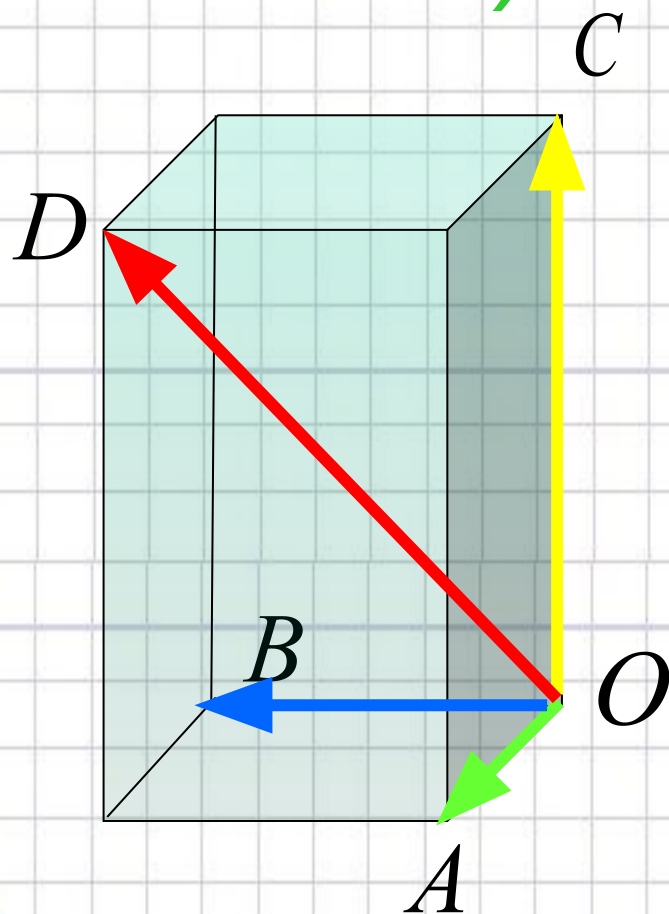


Додавання
(**правило**
паралелограма)



Дії над векторами

Додавання (правило паралелепіпеда)



$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} &= \\ &= \overrightarrow{OD}\end{aligned}$$



Дії над векторами

Додавання

$$\begin{aligned} \bar{a}(x_{\bar{a}}; y_{\bar{a}}; z_{\bar{a}}) + \bar{b}(x_{\bar{b}}; y_{\bar{b}}; z_{\bar{b}}) &= \\ &= \overline{(x_{\bar{a}} + x_{\bar{b}}; y_{\bar{a}} + y_{\bar{b}}; z_{\bar{a}} + z_{\bar{b}})} \end{aligned}$$

Закони додавання:

1) переставний

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$$

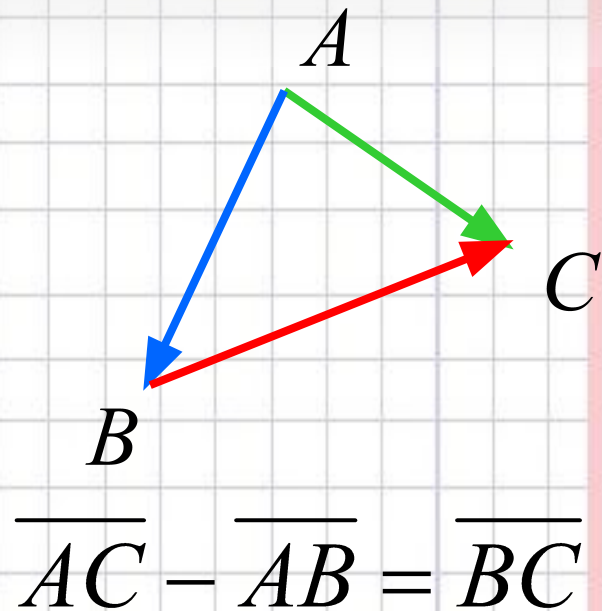
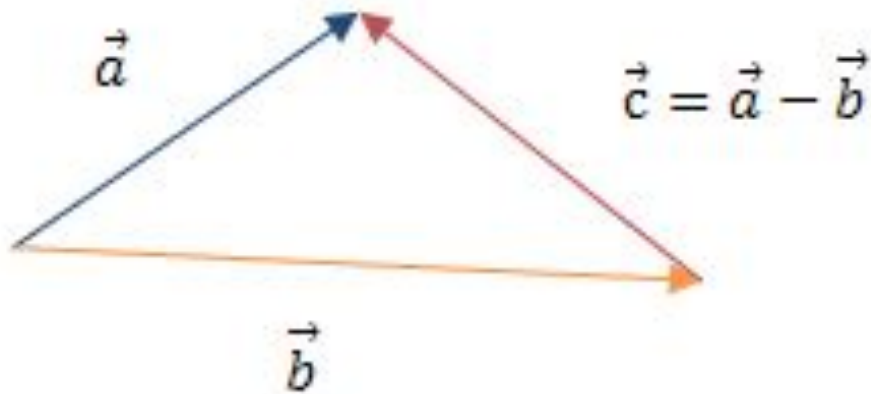
2) сполучний

$$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$$



Дії над векторами

Віднімання



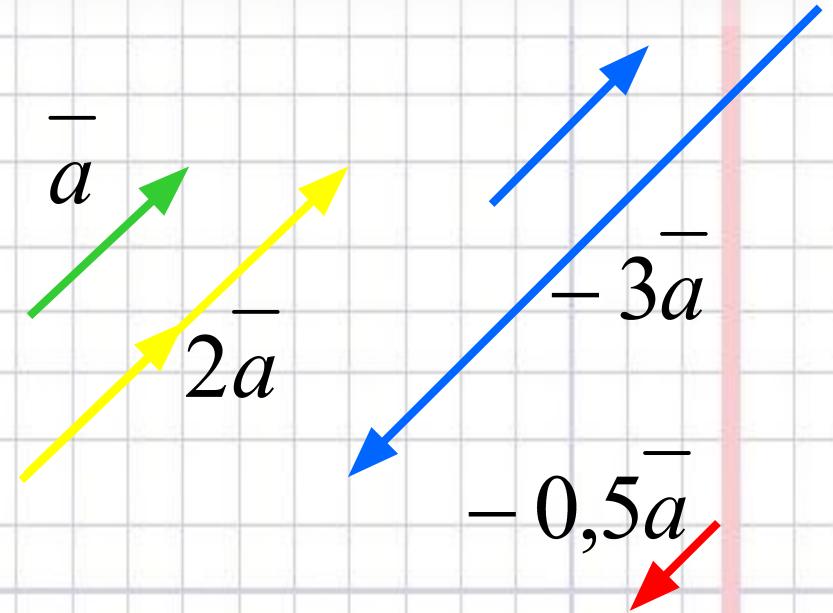
$$\begin{aligned} \vec{a}(x_{\vec{a}}; y_{\vec{a}}; z_{\vec{a}}) - \vec{b}(x_{\vec{b}}; y_{\vec{b}}; z_{\vec{b}}) &= \\ &= (x_{\vec{a}} - x_{\vec{b}}; y_{\vec{a}} - y_{\vec{b}}; z_{\vec{a}} - z_{\vec{b}}) \end{aligned}$$



Дії над векторами

- **Множення вектора на число**

$$\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda x_{\vec{a}}; \lambda y_{\vec{a}}; \lambda z_{\vec{a}})$$



- **Якщо $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то координати векторів пропорційні.**

І навпаки, якщо координати векторів пропорційні, то $\vec{a} \parallel \vec{b}$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_{\vec{a}}}{x_{\vec{b}}} = \frac{y_{\vec{a}}}{y_{\vec{b}}} = \frac{z_{\vec{a}}}{z_{\vec{b}}} = \lambda$$



Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком векторів називається сума добутків відповідних координат

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_{\vec{a}} \cdot x_{\vec{b}} + y_{\vec{a}} \cdot y_{\vec{b}} + z_{\vec{a}} \cdot z_{\vec{b}}$$

Властивості скалярного добутку

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$(\vec{a})^2 = (|\vec{a}|)^2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$



№1 Знайдіть координати вектора
 AB , якщо:

$$A(-3; 4; 7)$$

$$B(-3; 2; 16)$$

$$A(-2; 5; 3)$$

$$B(0; 4; -9)$$

$$A(0; 0; 0)$$

$$B(-7; 8; 12)$$

$$A(3; -4; 2)$$

$$B(3; -6; 11)$$



№2 Знайдіть абсолютну величину вектора:

$$\vec{a}(0;4;-3) \quad |\vec{a}| = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-3)^2} = 5$$

$$\vec{b}(2;-8;3) \quad |\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-8)^2 + 3^2} = \sqrt{77}$$

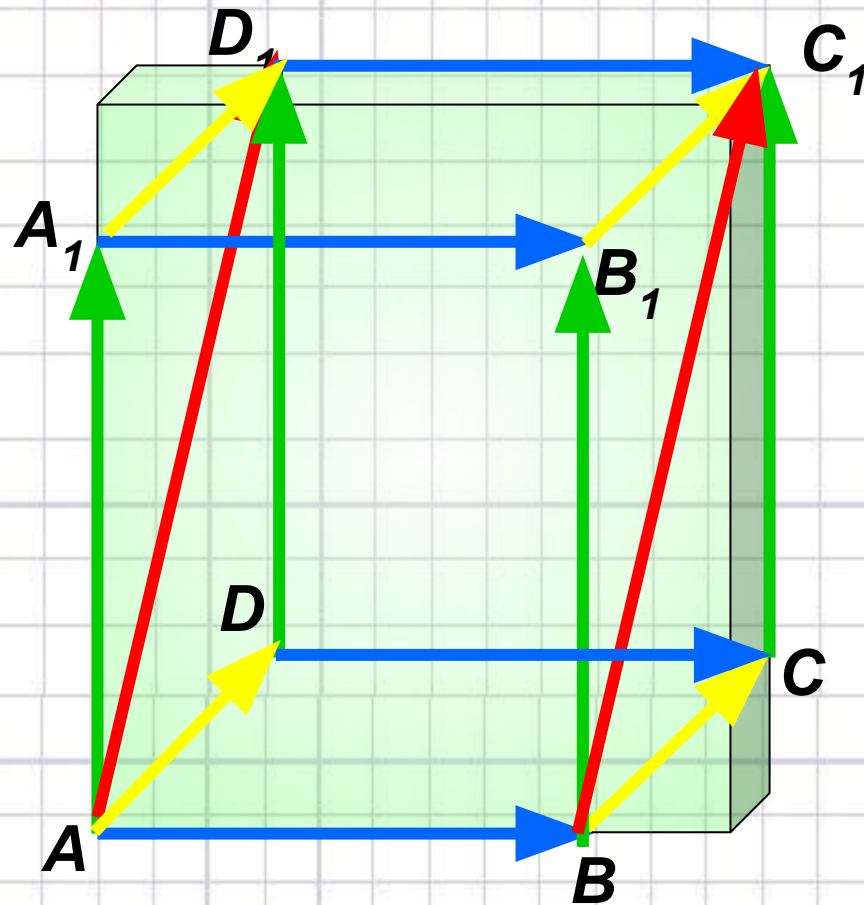
$$A(0;4;-3) \quad B(2;-8;3)$$

$$\begin{aligned} |\overline{AB}| &= \sqrt{(0-2)^2 + (4+8)^2 + (-3-3)^2} = \\ &= \sqrt{184} = 2\sqrt{46} \end{aligned}$$



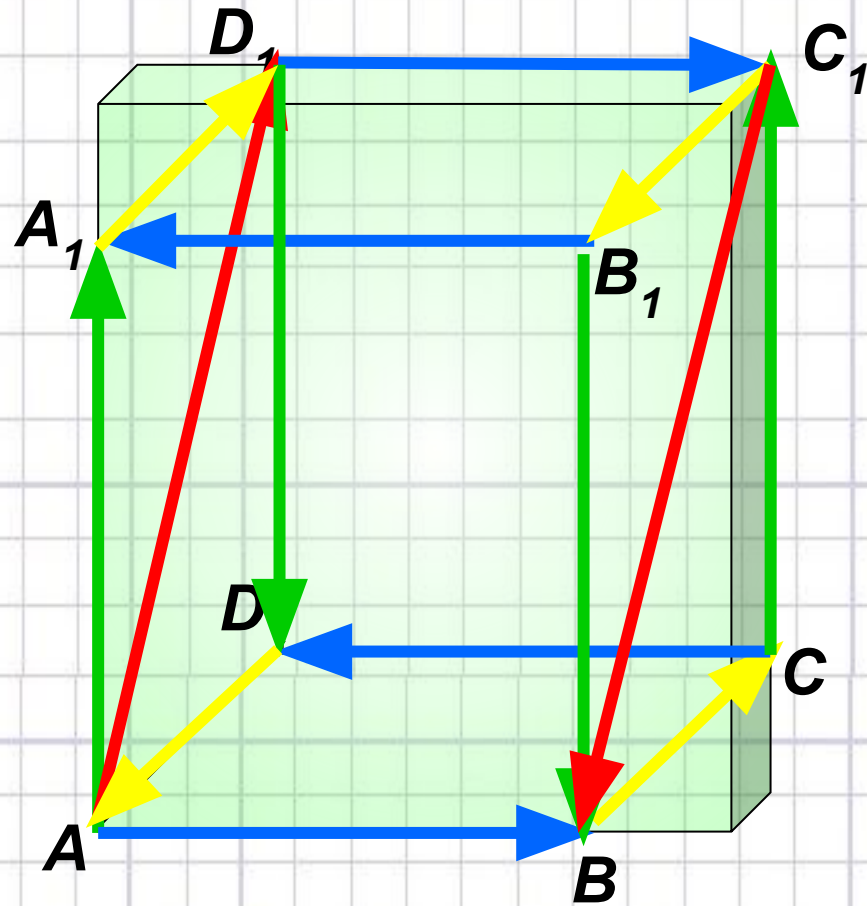
№3 Знайдіть вектори, що дорівнюють:

$$\begin{array}{c} \overline{AB} \\ \overline{AA_1} \\ \overline{BC} \\ \overline{AD_1} \end{array}$$



№4 Знайдіть вектори,
що є колінеарними до векторів:

$$\begin{array}{c} \overline{AB} \\ \overline{AA_1} \\ \overline{BC} \\ \overline{AD_1} \end{array}$$

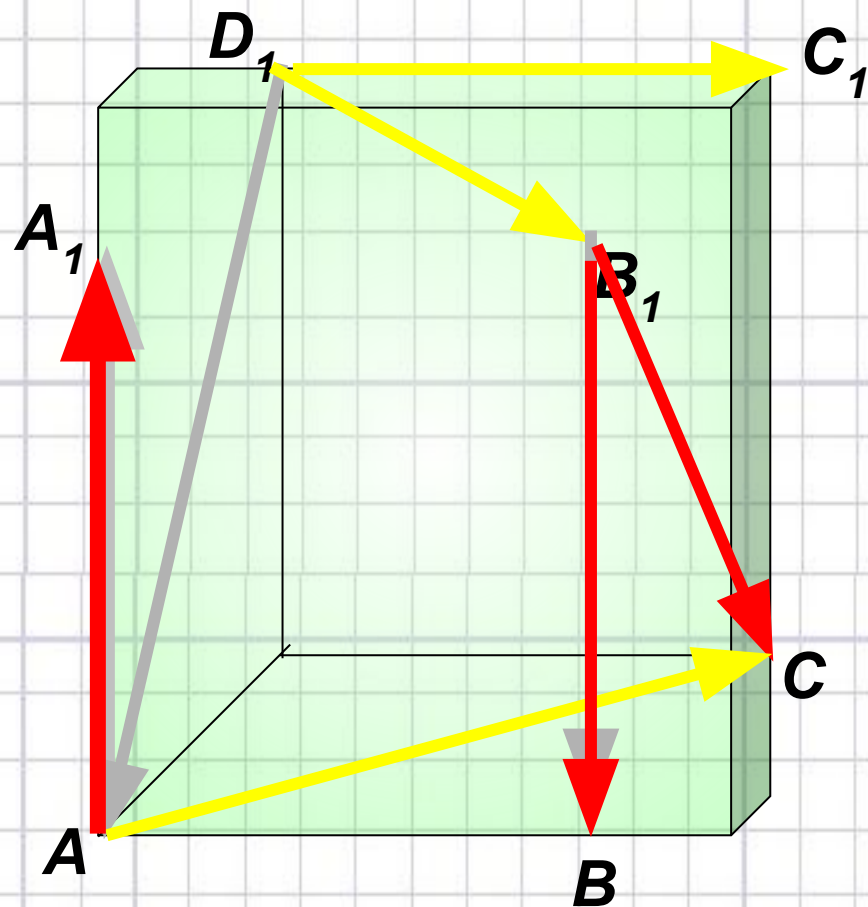


№5 Знайдіть вектори, що є компланарними

$$\overline{AA_1}, \overline{D_1A}, \overline{B_1B}$$

$$\overline{D_1B_1}, \overline{D_1C_1}, \overline{AC}$$

$$\overline{B_1B}, \overline{B_1C}, \overline{AA_1}$$

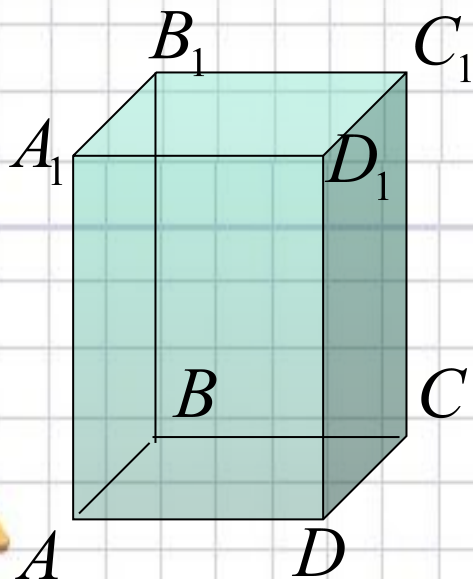


№6 Спростіть вираз

$$\overrightarrow{TR} - \overrightarrow{DK} + \overrightarrow{HK} + \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{FH}$$

$$\overrightarrow{KT} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{TK} + \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{BX}$$

№7 Знайдіть вектор



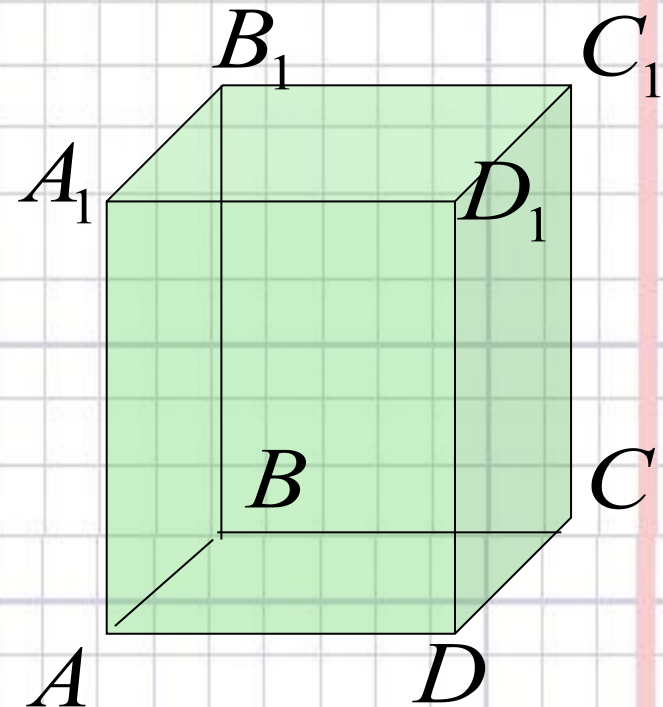
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{BD_1}$$

$$\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{D_1A_1} - \overrightarrow{CC_1}$$

№8 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ паралелепіпед.
Укажіть вектор початком і кінцем якого
є вершини паралелепіпеда, що дорівнює:

$$\overrightarrow{A_1 B_1} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CC_1}$$



№9 Дано вектори $\vec{a}(2;-5;-4)$
 $\vec{b}(-4;3;-3)$.

1. Чи будуть колінеарними вектори $\vec{c} = 2\vec{a} - 4\vec{b}$ та

$$\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b} ?$$

2. Обчисліть $|2\vec{c} - 3\vec{d}|$

3. Знайдіть координати вектора $\vec{p} = 2\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c}$.

4. Знайдіть значення m і n , при яких вектори $(-6;n;1)$ і $(m;16;-2)$ будуть колінеарними.



№10 Знайдіть скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$,

якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 120^\circ$.

№11 При якому значенні n вектори

$\overline{(2n; -3; -6)}$ і $\overline{(3; -n; -3)}$ будуть

перпендикулярними?

№12 Знайдіть кут між векторами

$\overline{(5; -2; 7)}$ і $\overline{(7; 5; 2)}$.



Джерела

<http://formula.co.ua/vectors.php>

<http://uk.wikipedia.org>

<http://shkolnik.in.ua>

Г.П.Бевз, В.Г.Бевз, Н.Г.Владімірова, В.М.Владіміров

Геометрія 11

Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів

Академічний рівень, профільний рівень

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Київ “Генеза” 2011

