Розділ 2. Теорія відношень

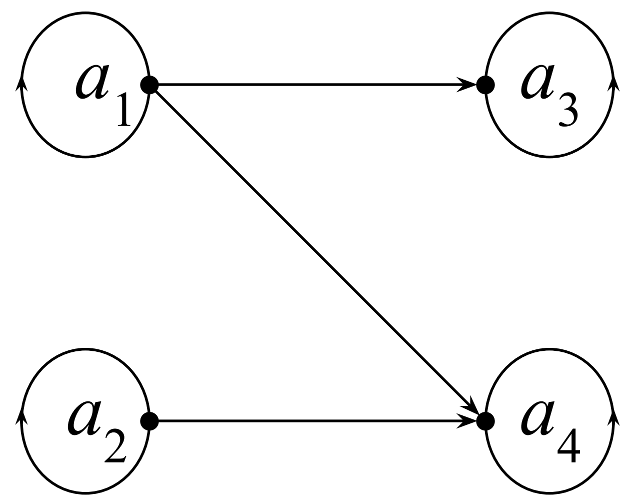
2.3. Властивості бінарних відношень

- *рефлексивність*
- *антирефлексивність*
- *симетричність*
- *асиметричність*
- *антисиметричність*
- *транзитивність*
- *антитранзитивність*
- *замикання відношень*

Рефлексивність

- Відношення R на множині X називається ***рефлексивним***, якщо для будь-якого $x \in X$ має місце xRx.

R	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	1	0	1	1
a_2	0	1	0	1
a_3	0	0	1	0
a_4	0	0	0	1

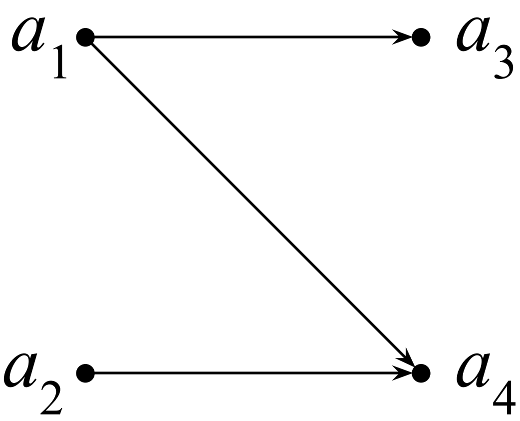


$E \subseteq R$ (E – одинична матриця)

Антирефлексивність

- Відношення R на множині X називається ***антирефлексивним***, якщо з $x_1 R\, x_2$ виходить, що $x_1 \neq x_2$.

R	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	0	0	1	1
a_2	0	0	0	1
a_3	0	0	0	0
a_4	0	0	0	0

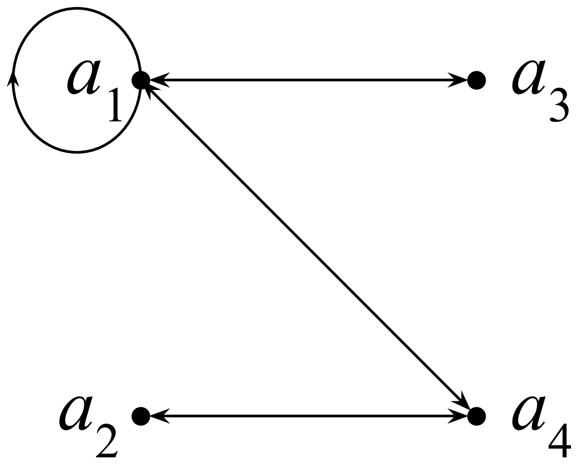


$E \cap R = \varnothing$ (E – одинична матриця)

Симетричність

- Відношення R на множині X називається ***симетричним***, якщо для пари $(x_1, x_2) \in X^2$ з $x_1\, R\, x_2$ виходить $x_2\, R\, x_1$.

R	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	1	0	1	1
a_2	0	0	0	1
a_3	1	0	0	0
a_4	1	1	0	0

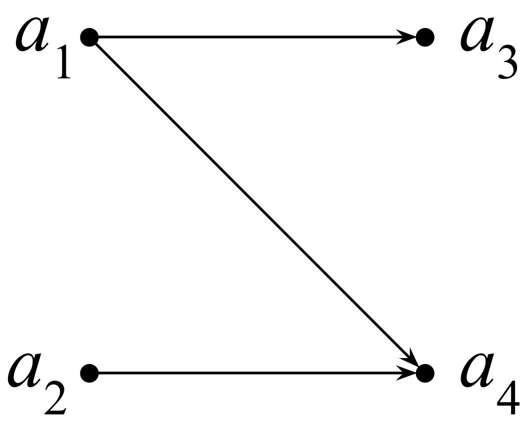


$R = R^{-1}$

Асиметричність

- Відношення R на множині X називається ***асиметричним***, якщо для пари $(x_1, x_2) \in X^2$ із $x_1\, R\, x_2$ виходить, що не виконується $x_2\, R\, x_1$.

R	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	0	0	1	1
a_2	0	0	0	1
a_3	0	0	0	0
a_4	0	0	0	0

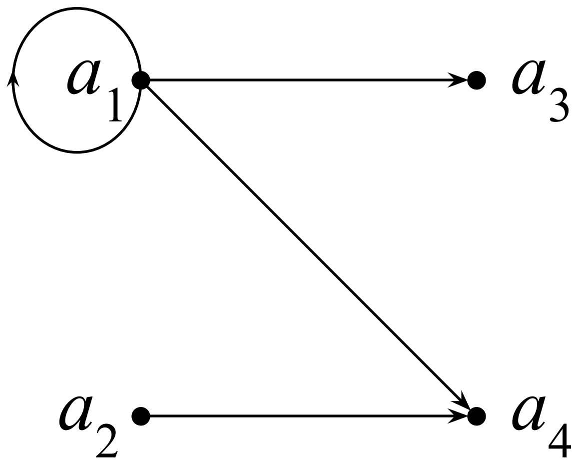


$R \cap R^{-1} = \varnothing$

Антисиметричність

- Відношення R на множині X називається ***антисиметричним***, якщо з $x_1\ R\ x_2$ і $x_2\ R\ x_1$ виходить, що $x_1 = x_2$.

R	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	1	0	1	1
a_2	0	0	0	1
a_3	0	0	0	0
a_4	0	0	0	0

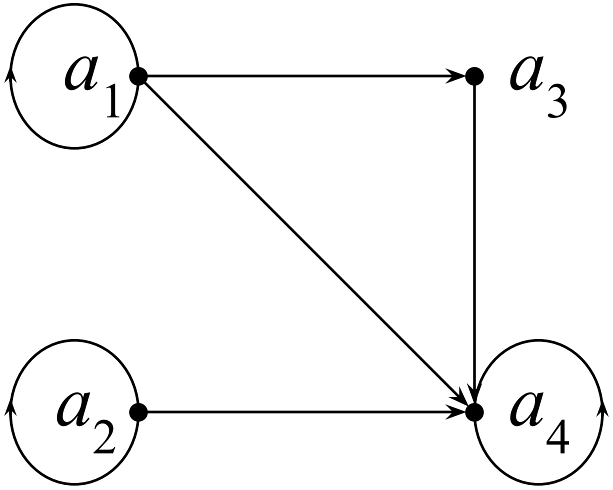


$R \cap R^{-1} \subseteq E$

Транзитивність

- Відношення R на множині X називається ***транзитивним***, якщо з $x_1\,R\,x_2$ і $x_2\,R\,x_3$ виходить $x_1\,R\,x_3$.

R	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	1	0	1	1
a_2	0	1	0	1
a_3	0	0	0	1
a_4	0	0	0	1

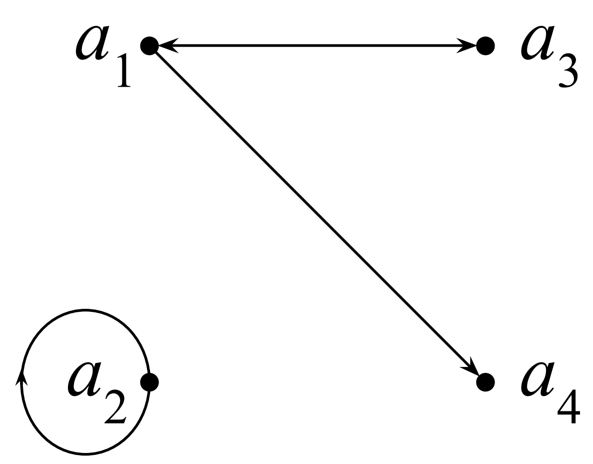


$R \circ R \subseteq R$

Антитранзитивність

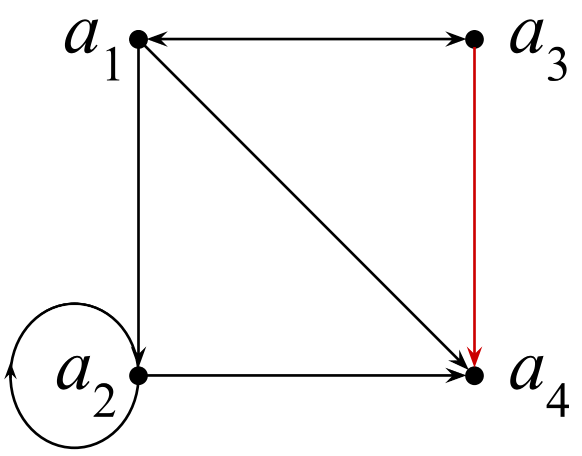
- Відношення R на множині X називається ***антитранзитивним***, якщо з $x_1\, R\, x_2$ і $x_2\, R\, x_3$ виходить, що не виконується $x_1\, R\, x_3$.

R	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	0	0	1	1
a_2	0	1	0	0
a_3	1	0	0	0
a_4	0	0	0	0



Приклад перевірки на транзитивність та антитранзитивність

R	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	0	1	1	1
a_2	0	1	0	1
a_3	1	0	0	0
a_4	0	0	0	0



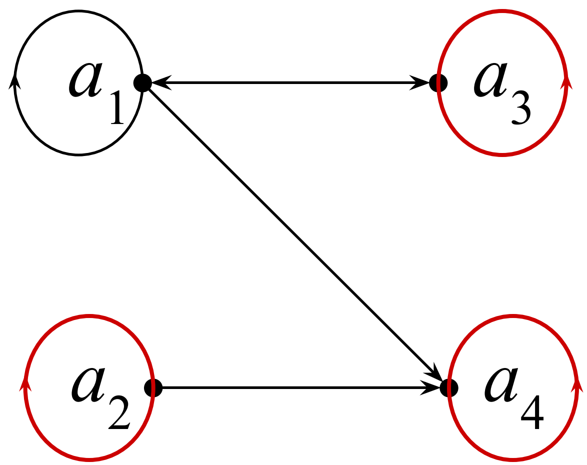
- $a_3\, R\, a_1$ і $a_1\, R\, a_4 \Rightarrow a_3\, R\, a_4$ відсутня транзитивність не виконується

- $a_1\, R\, a_2$ і $a_2\, R\, a_4 \Rightarrow a_1\, R\, a_4$ антитранзитивність не виконується

Замикання

- ***Рефлексивним замиканням*** R_E відношення R називається відношення $R_E = R \cup E$, де E – відношення тотожності на X (діагональ).

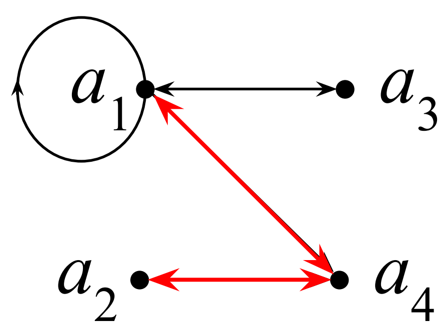
R_E	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	1	0	1	1
a_2	0	1	0	1
a_3	1	0	1	0
a_4	0	0	0	1



- ***Симетричним замиканням*** R_S відношення R називається відношення $R_S = R \cup R^{-1}$, тобто якщо $(x_1, x_2) \in R$, то $(x_1, x_2) \in R_S$ і $(x_2, x_1) \in R_S$.

R	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	1	0	1	1
a_2	0	0	0	1
a_3	1	0	0	0
a_4	0	0	0	0

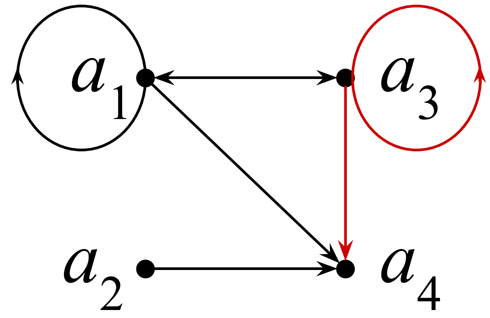
R_S	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	1	0	1	1
a_2	0	0	0	1
a_3	1	0	0	0
a_4	1	1	0	0



- ***Транзитивним замиканням*** R_t відношення R називається відношення $R_t = R \cup R^1 \cup \ldots \cup R^n \cup \ldots$

R	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	1	0	1	1
a_2	0	0	0	1
a_3	1	0	0	0
a_4	0	0	0	0

R_E	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	1	0	1	1
a_2	0	0	0	1
a_3	1	0	1	1
a_4	0	0	0	0



Алгоритм Уоршалла побудови транзитивного замикання для відношення R.

Нехай відношення задано у вигляді матриці.

1. Присвоювання початкових значень $W = R$, $k = 0$.
2. Виконати $k = k + 1$.
3. Для всіх $i \neq k$ таких, що $w_k = 1$, і для всіх j виконати операцію $w_{ij} = w_{ij} \vee w_{kj}$.
4. Якщо $k = n$, то отримано розв'язок.

Приклад. Використаня алгоритму Уоршалла для побудови транзитивного замикання.

Нехай $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $R \subseteq A\times A$

R	1	2	3	4
1	0	0	0	1
2	1	0	1	0
3	1	0	0	1
4	0	0	1	0

$$W^{(0)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$W^{(0)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad W^{(1)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$W^{(2)}=W^{(1)}$ бо другий стовпчик нульовий

$$W^{(3)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad W^{(4)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Результат $W^{(4)}$

2.4. Відношення еквівалентності, толерантності, порядку

- *відношення еквівалентності*
- *класи еквівалентності*
- *відношення толерантності*
- *строгий порядок*
- *частковий (нестрогий) порядок*
- *лінійний порядок*
- *порівнянні і непорівнянні елементи*
- *структура впорядкованих множин*

Відношення еквівалентності

- Бінарне відношення, що має властивості рефлексивності, симетричності і транзитивності, називається ***відношенням еквівалентності*** (позначається ~).

  Нехай задана множина A і відношення еквівалентності, що визначене на цій множині: $R \subseteq A \times A$.

- Елементи $a, b \in A$, для яких виконується aRb, називаються ***еквівалентними***.

- Будь-яке відношення еквівалентності R, визначене на множині A, розбиває множину A на неперетинні підмножини, які називаються ***класами еквівалентності***.

Розбиття скінченної множини A на класи еквівалентності за відношенням R.

1. Виберемо елемент $a_1 \in A$ і утворимо клас C_1 що складається з усіх елементів $y \in A$, для яких виконується відношення $a_1 R\, y$.

   (Клас C_1 може складатися тільки з одного елемента a_1, якщо не існує інших елементів y, таких, що $a_1 R y$ - через рефлексивність відношення еквівалентності завжди виконується $a_1 R\, a_1$.)

2. Якщо $C_1 \neq A$, то виберемо з A елемент a_2, що не входить до класу C_1, і утворимо клас C_2, який складається з елементів $y \in A$: $a_2 R\, y$.
3. Якщо $(C_1 \cup C_2) \neq A$, то виберемо з A елемент a_3, що не входить до класів C_1 і C_2, і утворимо клас C_3. Будемо продовжувати побудову класів доти, доки в A не залишиться жодного елемента, що не входить до одного з класів C_i.

- Система класів C_1, C_2, … ,C_n називається ***системою класів еквівалентності*** і має такі властивості:

1. класи попарно не перетинаються
   $\forall\ i, j$: $C_i \cap C_j = \varnothing$
2. будь-які два елементи з одного класу еквівалентні
   $\forall\ a, b \in C_i : (a, b) \in R$
3. будь-які два елементи з різних класів не еквівалентні
   $\forall\ a \in C_i, b \in C_j : (a, b) \notin R$

Приклад.

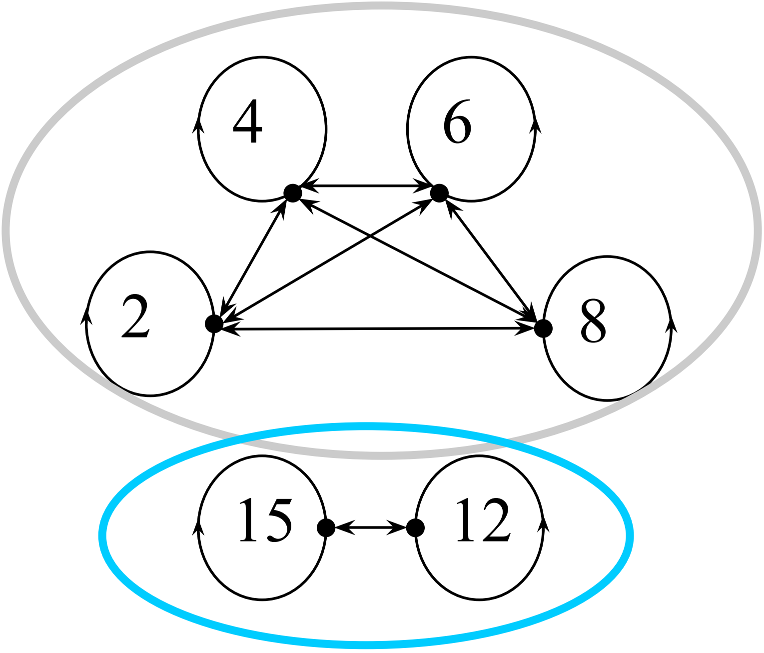
Нехай $A=\{2, 4, 6, 8, 12, 15\}$, $R_1 \subseteq A \times A$

R_1 – мати однакову кількість цифр

Розбиття на класи еквівалентності за R_1:

$\{\{2, 4, 6, 8\}, \{12, 15\}\}$

R_1	2	4	6	8	12	15
2	1	1	1	1	0	0
4	1	1	1	1	0	0
6	1	1	1	1	0	0
8	1	1	1	1	0	0
12	0	0	0	0	1	1
15	0	0	0	0	1	1



Приклад.

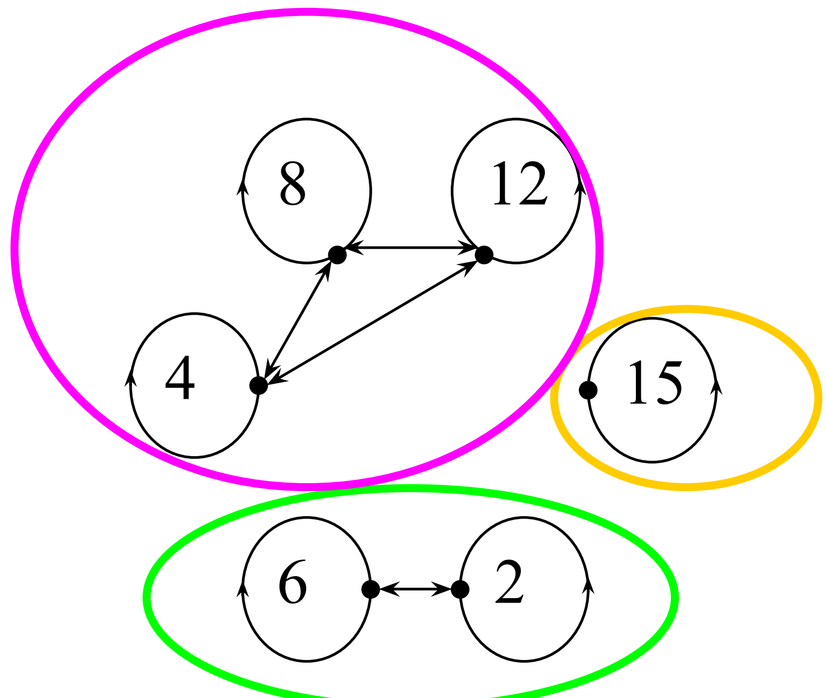
Нехай $A=\{2, 4, 6, 8, 12, 15\}$, $R_2 \subseteq A \times A$

$R_2 = \{(2,2),(2,6),(4,4),(4,8),(4,12),(6,2),(6,6),$
$(8,4),(8,8),(8,12),(12,4),(12,12),(15,15)\}$

Розбиття на класи еквівалентності за R_2:

$\{\{2, 6\},\{4, 8, 12\},\{15\}\}$

R_2	2	6	4	8	12	15
2	1	1	0	0	0	0
6	1	1	0	0	0	0
4	0	0	1	1	1	0
8	0	0	1	1	1	0
12	0	0	1	1	1	0
15	0	0	0	0	0	1



Відношення толерантності

- Бінарне відношення, що має властивості рефлексивності, симетричності і антитранзитивності, називається ***відношенням толерантності.***

Толерантність зображує собою формальне уявлення інтуїтивного поняття схожості.

Приклад.

Муха-мура-тура-тара-кара-каре-кафе-кафр-каюр-каюк-крюк-крок-срок-сток-стон-слон

Відношення порядку

- Бінарне відношення, що має властивості антирефлексивності (якщо $a<b$, то $a \neq b$), асиметричності (якщо $a<b$, то не правильне $b<a$) і транзитивності (якщо $a<b$ і $b<c$, то $a<c$) , називається ***відношенням строгого порядку*** (*позначається* **<**).

Приклад.

A – множина студентів групи, $R \subseteq A \times A$,

R – бути старшим.

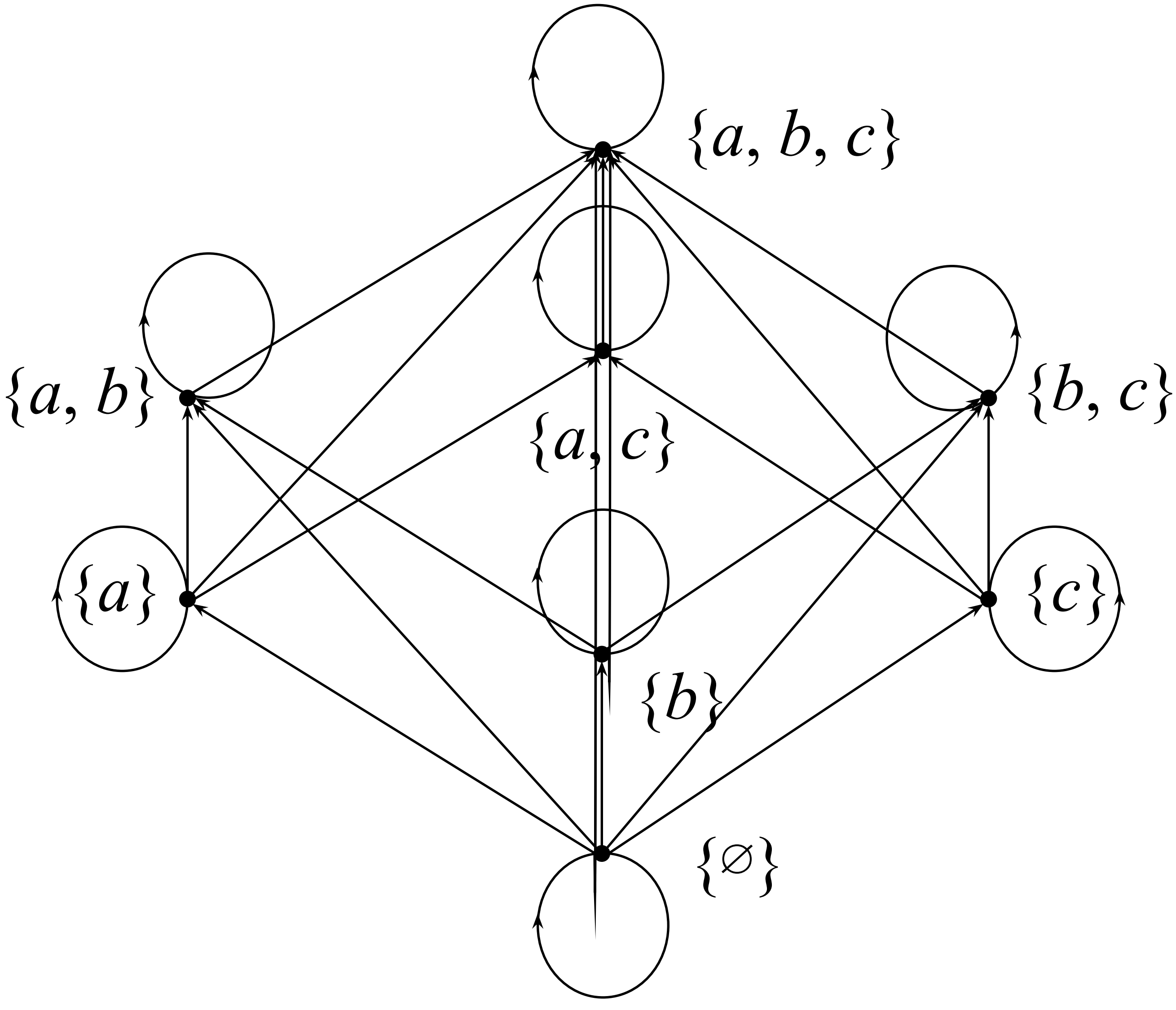
- Бінарне відношення, що має властивості рефлексивності, антисиметричності і транзитивності, називається ***відношенням нестрогого (часткового) порядку*** (позначається $\leq$).

Якщо на множині задане відношення часткового порядку, то ця множина називається ***частково упорядкованою***.

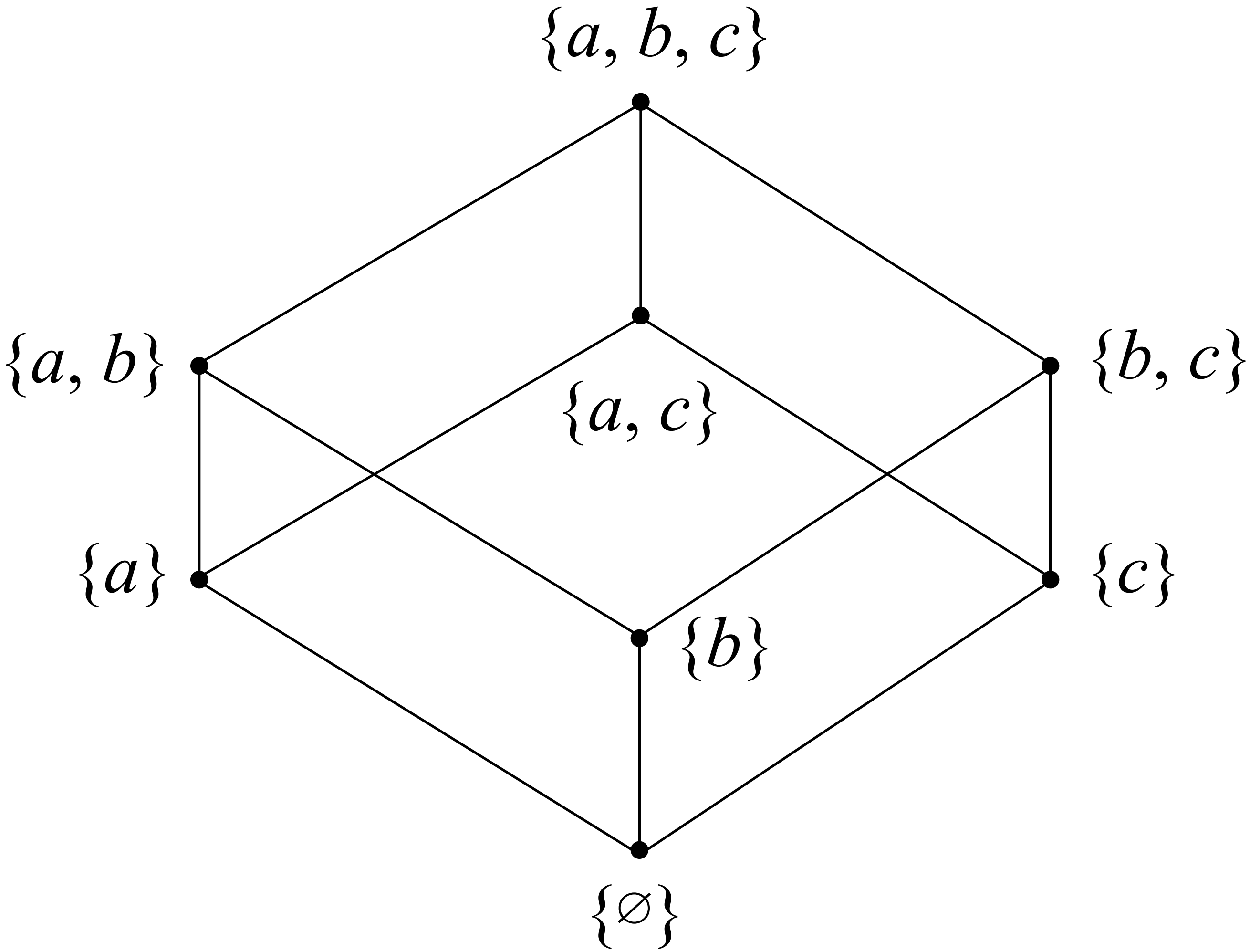
Приклад.

Нехай $A = \{a, b, c\}$, R – відношення включення, задане на булеані 2^A.

Зображення відношення часткового порядку



діаграма Хассе



- ***Шлях*** у графі відношення з вершини a до вершини b — це послідовність дуг (a, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3),..., (x_{n-1}, b), $n \geq 1$. Число дуг n називається ***довжиною шляху***.
- Елементи a і b називаються ***порівнянними*** у відношенні часткового порядку R, якщо виконується хоча б одне із співвідношень aRb або bRa.
- Множина A, на якій задане відношення часткового порядку R і для якої всілякі два елементи цієї множини порівнянні, називається ***лінійно упорядкованою*** або ***повністю упорядкованою***.

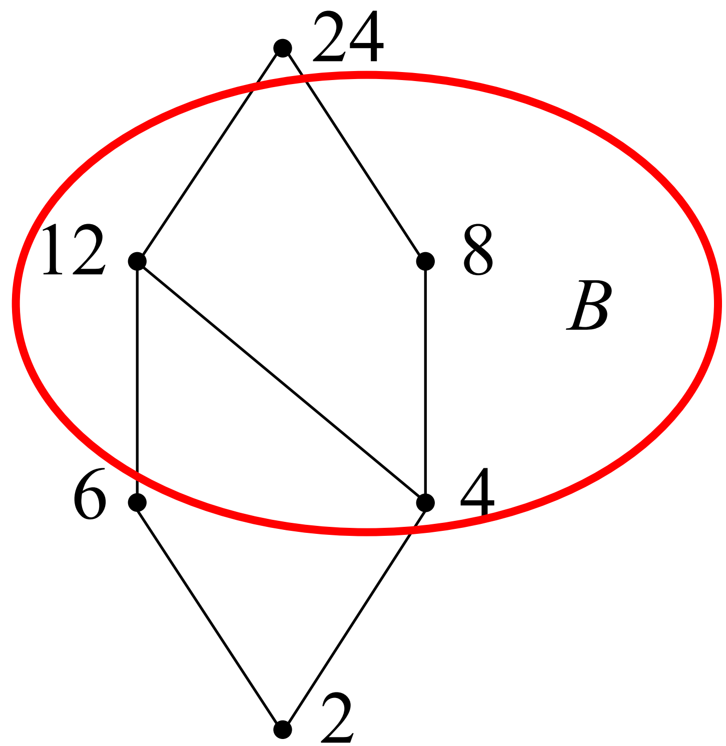
Структура впорядкованих множин

A={2, 4, 6, 8, 12, 24}, B={ 4, 8, 12}, $B \subseteq A$

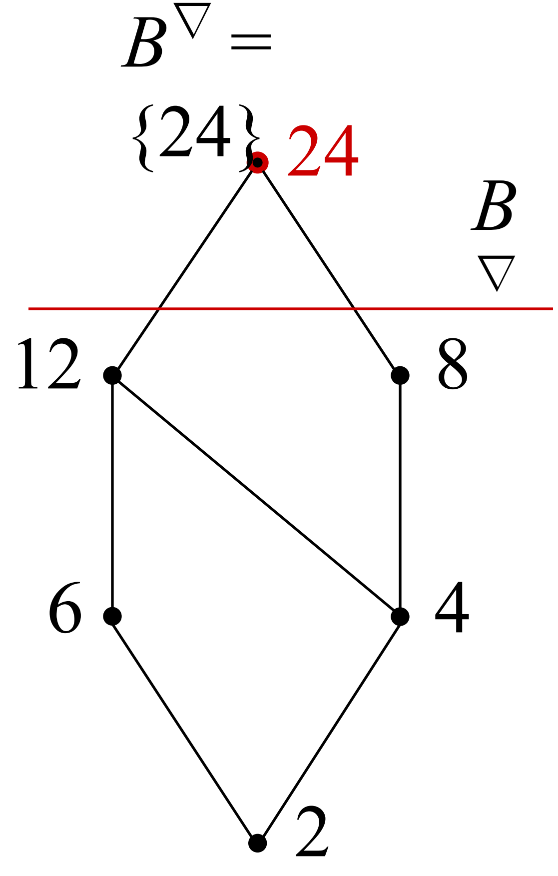
$R \subseteq A\times A$, R – бути дільником

R = (2,2),(2,4),(2,6),(2,8),
(2,12), (2,24),(4,4),(4,8),(4,12),
(4,24),(6,6),(6,12),(6,24),(8,8),
(8,24),(12,12),(12,24),(24,24)}

R	2	4	6	8	12	24
2	1	1	1	1	1	1
4	0	1	0	1	1	1
6	0	0	1	0	1	1
8	0	0	0	1	0	1
12	0	0	0	0	1	1
24	0	0	0	0	0	1



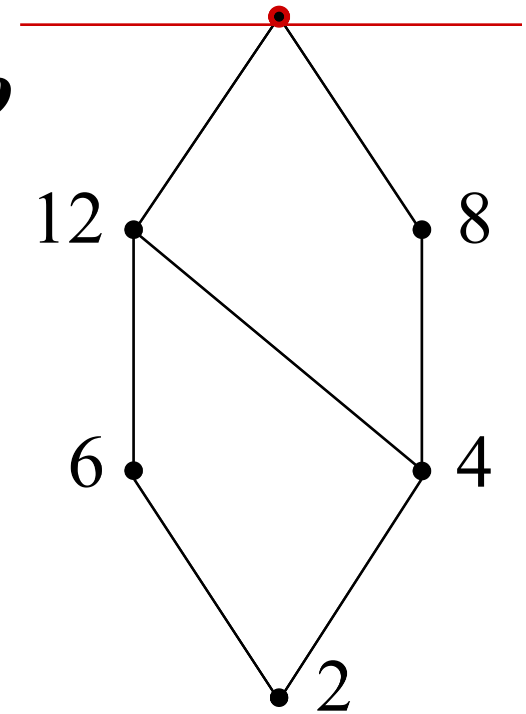
- ***Мажорантою*** (найбільшим елементом, верхньою гранню) підмножини B називають такий елемент $m \in A$, що для будь-якого елемента $b \in B$ справджується відношення bRm.
- Підмножина $B \subseteq A$ може мати кілька мажорант. Сукупність мажорант називають ***верхнім конусом*** підмножини B і позначають B^{∇}.



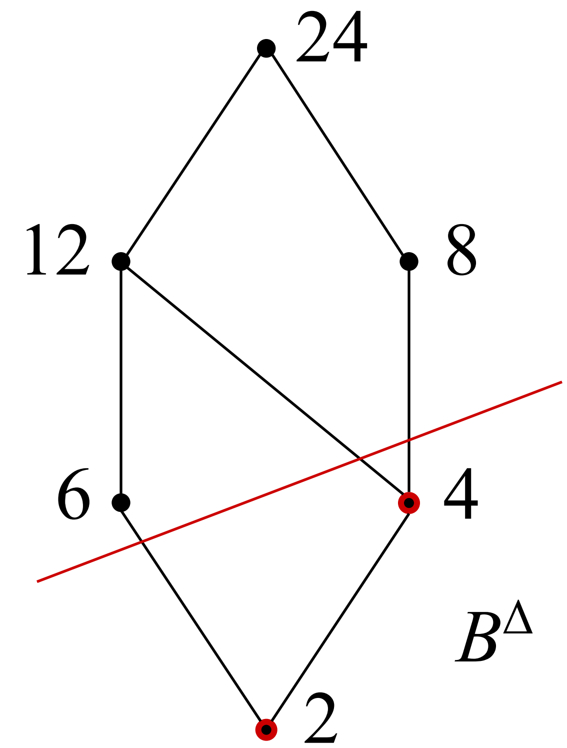
- Якщо верхній конус підмножини B має мінімальний елемент, то він називається ***точною верхньою гранню*** B і позначається $sup\ B$.
- Якщо точна верхня грань $sup\ B \in B$, то її називають ***максимальним елементом*** B (позначають $\max(B)$). Якщо максимальний елемент існує, то він єдиний.

$\max(B) = \varnothing$

$sup\ B = 24$

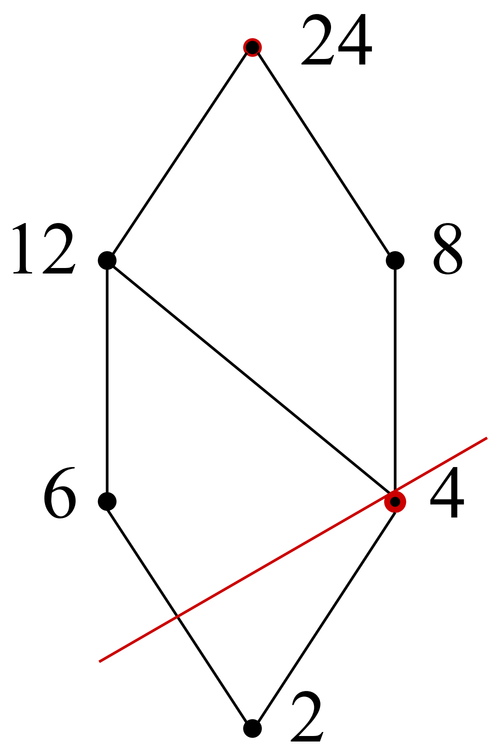


- ***Мінорантою*** (найменшим елементом, нижньою гранню) підмножини B називають такий елемент $n \in A$, що для будь-якого елемента $b \in B$ справджується відношення nRb.
- Підмножина $B \subseteq A$ може мати кілька мінорант. Сукупність мінорант називають ***нижнім конусом*** підмножини B і позначають B^{Δ}.



$B^{\Delta} = \{2, 4\}$

- Якщо нижній конус підмножини B має максимальний елемент, то він називається ***точною нижньою гранню*** B і позначається $inf\ B$.
- Якщо точна нижня грань $inf\ B \in B$, то її називають ***мінімальним елементом*** B (позначають $\min(B)$). Якщо мінімальний елемент існує, то він єдиний.



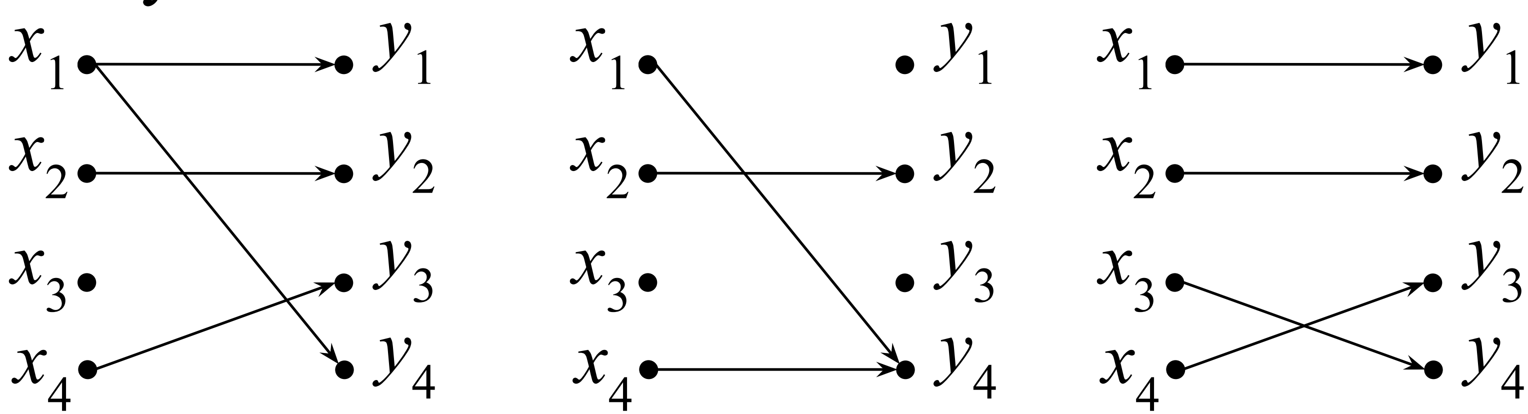
$inf\ \ B = 4$

$\min(B) = 4$

2.5. Функціональні відношення

- *функціональне відношення*
- *області визначення і значень*
- *відображення (функція)*
- *сюр'єкція, ін'єкція, бієкція*

- Відношення R між множинами X і Y ($R \subseteq X \times Y$) є ***функціональним***, якщо всі його елементи (упорядковані пари) різні за першим елементом: кожному $x \in X$ або відповідає тільки один елемент $y \in Y$, такий, що xRy, або такого елемента y взагалі не існує.



Матриця функціонального відношення, що задане на скінченних множинах X і Y, містить не більше однієї одиниці в кожному рядку.

Нехай R — деяке відношення, $R \subseteq X \times Y$.

- ***Областю визначення*** відношення R називається множина D_R (Dom_R), що складається з усіх елементів множини X, які зв'язані відношенням R з елементами множини Y:
  $D_R \subseteq X$, $D_R = \{x\colon \exists y \in Y, (x, y) \in R\}$.
- Якщо $D_R = X$, то відношення R називається ***повністю визначеним***.

- ***Областю значень*** відношення R називається множина $\mathfrak{R}_R$(Im_R), що складається з усіх елементів множини Y, які зв'язані відношенням R з елементами множини X: $\mathfrak{R}_R \subseteq Y$, $\mathfrak{R}_R = \{y\colon \exists x \in X, (x, y) \in R\}$.

Відображення (функція)

- ***Функцією f*** або ***відображенням f множини*** X в Y (позначається $f\colon X \to Y$) називається повністю визначене функціональне відношення F, $F \subseteq X \times Y$, $D_F = X$ $(D_F \equiv D_f)$.
- Якщо множина $A \subseteq X$, то через $f(A) = \{y \in Y\colon y = f(x),\ \forall x \in A)$ позначається ***образ*** множини A.
- Якщо множина $B \subseteq Y$, то множина $f^{-1}(B) = \{x \in X\colon f(x) \in B\}$ називається ***прообразом*** множини B відносно відображення f.

Види відображень

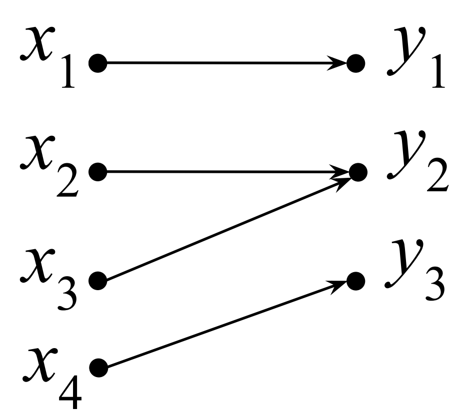
- Функція f: $X \to Y$ називається ***сюр'єктивним відображенням***, якщо $\Re_f = Y$.

На графі, що зображує сюр'єктивне відображення $X \to Y$, з будь-якої вершини $x \in X$ виходить точно одна дуга, а до будь-якої вершини, що зображує елемент множини Y, заходить не менше однієї дуги. В матриці відображення у кожному рядку точно одна одиниця, а в кожному стовпчику – не менше однієї одиниці.

Приклад.

X – множина студентів,

Y – множина років народження.

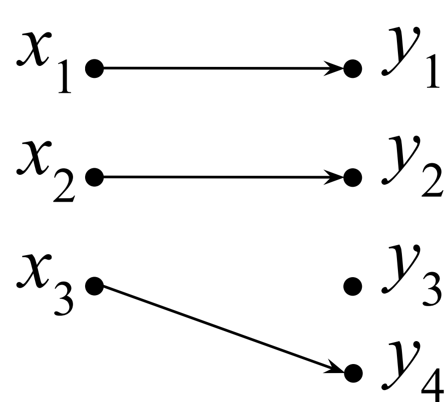


- Функція f: $X \to Y$ називається ***ін'єктивним відображенням***, якщо з $x_1 \neq x_2$ виходить $f(x_1) \neq f(x_2)$.

На графі, що зображує ін'єктивне відображення $X \to Y$, з будь-якої вершини $x \in X$ виходить точно одна дуга, а до будь-якої вершини, що зображує елемент множини Y, заходить не більше однієї дуги. В матриці відображення у кожному рядку точно одна одиниця, а в кожному стовпчику – не більше однієї одиниці.

Приклад.

Позиція на шахівниці
X – множина фігур,
Y – множина полів на дошці.



- Якщо $f\colon X \to Y$ — ін'єктивне відображення і $F = \{(x, f(x)),\ \forall x \in X\}$ — відповідне функціональне відношення ($F \subset X \to Y$), то обернене відношення $F^{-1} = \{(y, x),\ \forall y \in \mathfrak{R}_f\}$ також є функціональним.

- Функція $x = f^{-1}(y)$, $f^{-1}\colon \mathfrak{R}_f \to X$, що задається відношенням F^{-1}, має властивості:
  $f^{-1}(f(x)) = x,\ \forall x \in X;\ \ f^{-1}(f(y)) = y,\ \forall y \in \mathfrak{R}_f$
  і називається ***оберненою*** до функції f.

- Функція f: $X \to Y$ називається ***бієктивним відображенням***, якщо вона сюр'єктивна та ін'єктивна.

На графі, що зображує бієктивне відображення $X \to Y$, з будь-якої вершини $x \in X$ виходить точно одна дуга, а до будь-якої вершини, що зображує елемент множини Y, заходить точно одна дуга. В матриці відображення у кожному рядку точно одна одиниця, а в кожному стовпчику – теж точно одна одиниця.

Приклад.

X – множина студентів,

Y – множина їх ідентифікаційних кодів.