

Розділ 2. Теорія відношень

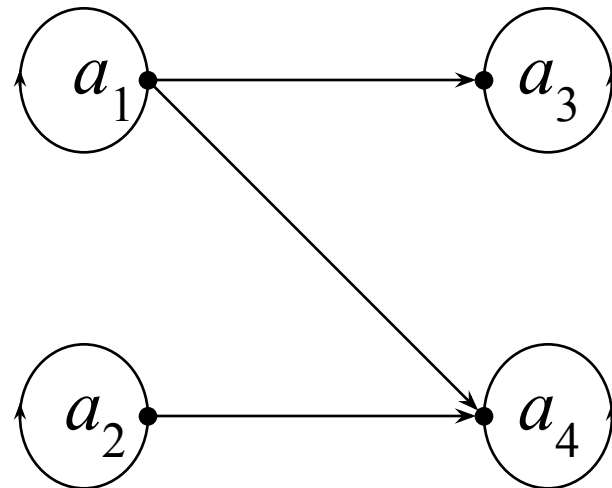
2.3. Властивості бінарних відношень

- *рефлексивність*
- *антирефлексивність*
- *симетричність*
- *асиметричність*
- *антисиметричність*
- *транзитивність*
- *антитранзитивність*
- *замикання відношень*

Рефлексивність

- Відношення R на множині X називається **рефлексивним**, якщо для будь-якого $x \in X$ має місце xRx .

R	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	1	0	1	1
a_2	0	1	0	1
a_3	0	0	1	0
a_4	0	0	0	1

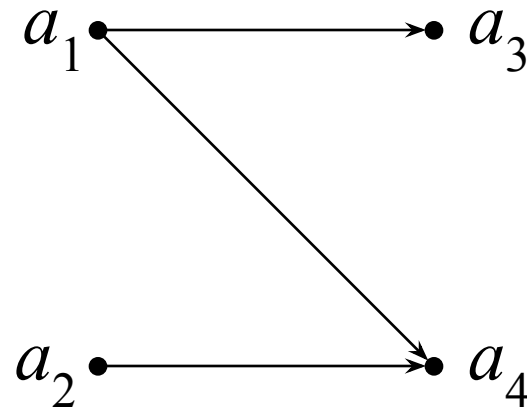


$E \subseteq R$ (E – одинична матриця)

Антирефлексивність

- Відношення R на множині X називається **антирефлексивним**, якщо з $x_1 R x_2$ виходить, що $x_1 \neq x_2$.

R	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	0	0	1	1
a_2	0	0	0	1
a_3	0	0	0	0
a_4	0	0	0	0

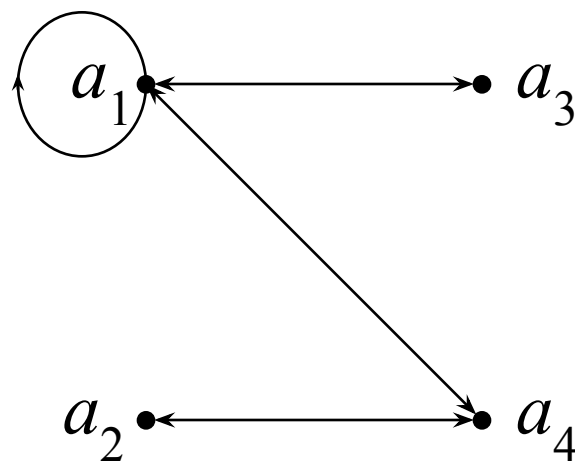


$$E \cap R = \emptyset \quad (E - \text{одинична матриця})$$

Симетричність

- Відношення R на множині X називається **симетричним**, якщо для пари $(x_1, x_2) \in X^2$ з $x_1 R x_2$ виходить $x_2 R x_1$.

R	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	1	0	1	1
a_2	0	0	0	1
a_3	1	0	0	0
a_4	1	1	0	0

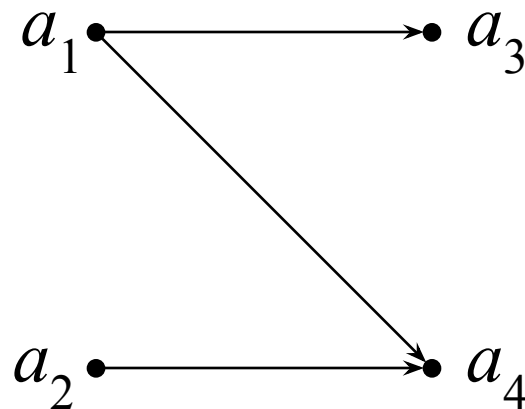


$$R = R^{-1}$$

Асиметричність

- Відношення R на множині X називається **асиметричним**, якщо для пари $(x_1, x_2) \in X^2$ із $x_1 R x_2$ виходить, що не виконується $x_2 R x_1$.

R	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	0	0	1	1
a_2	0	0	0	1
a_3	0	0	0	0
a_4	0	0	0	0

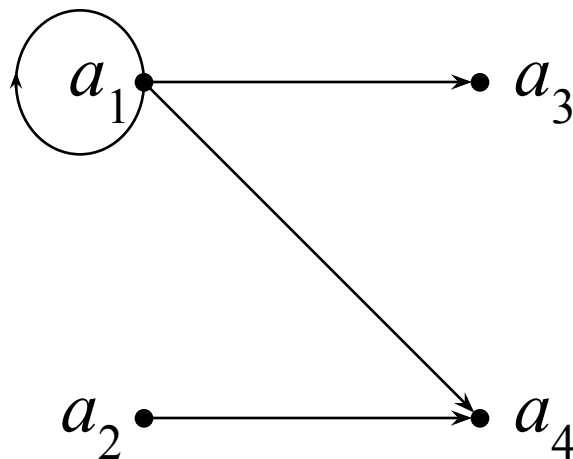


$$R \cap R^{-1} = \emptyset$$

Антисиметричність

- Відношення R на множині X називається **антисиметричним**, якщо з $x_1 R x_2$ і $x_2 R x_1$ виходить, що $x_1 = x_2$.

R	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	1	0	1	1
a_2	0	0	0	1
a_3	0	0	0	0
a_4	0	0	0	0

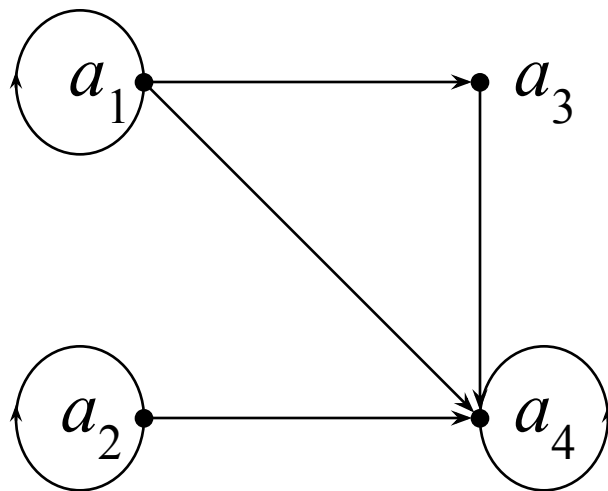


$$R \cap R^{-1} \subseteq E$$

Транзитивність

- Відношення R на множині X називається **транзитивним**, якщо з $x_1 R x_2$ і $x_2 R x_3$ виходить $x_1 R x_3$.

R	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	1	0	1	1
a_2	0	1	0	1
a_3	0	0	0	1
a_4	0	0	0	1

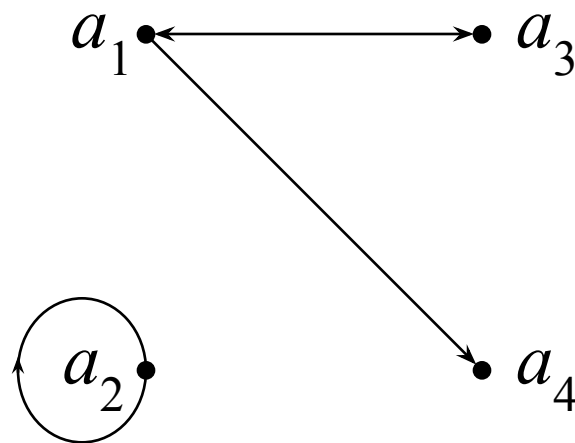


$$R \circ R \subseteq R$$

Антитранзитивність

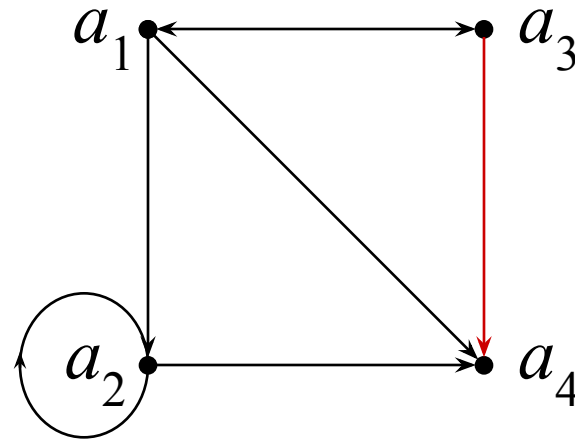
- Відношення R на множині X називається **антитранзитивним**, якщо з $x_1 R x_2$ і $x_2 R x_3$ виходить, що не виконується $x_1 R x_3$.

R	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	0	0	1	1
a_2	0	1	0	0
a_3	1	0	0	0
a_4	0	0	0	0



Приклад перевірки на транзитивність та антитранзитивність

R	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	0	1	1	1
a_2	0	1	0	1
a_3	1	0	0	0
a_4	0	0	0	0

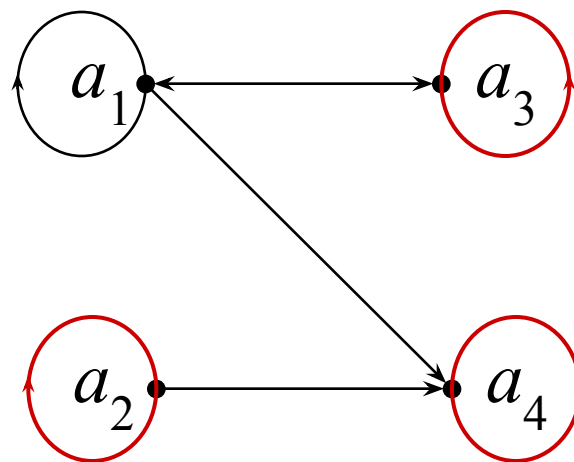


- $a_3 R a_1$ і $a_1 R a_4 \Rightarrow a_3 R a_4$ відсутня транзитивність не виконується
- $a_1 R a_2$ і $a_2 R a_4 \Rightarrow a_1 R a_4$ антитранзитивність не виконується

Замикання

□ *Рефлексивним замиканням* R_E відношення R називається відношення $R_E = R \cup E$, де E – відношення тотожності на X (діагональ).

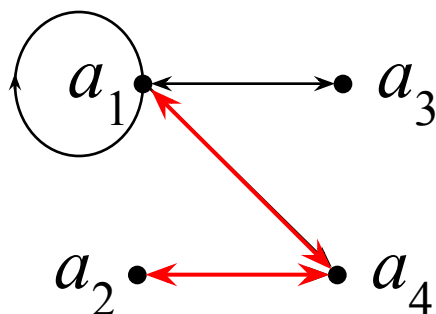
R_E	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	1	0	1	1
a_2	0	1	0	1
a_3	1	0	1	0
a_4	0	0	0	1



□ **Симетричним замиканням** R_S відношення R називається відношення $R_S = R \cup R^{-1}$, тобто якщо $(x_1, x_2) \in R$, то $(x_1, x_2) \in R_S$ і $(x_2, x_1) \in R_S$.

R	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	1	0	1	1
a_2	0	0	0	1
a_3	1	0	0	0
a_4	0	0	0	0

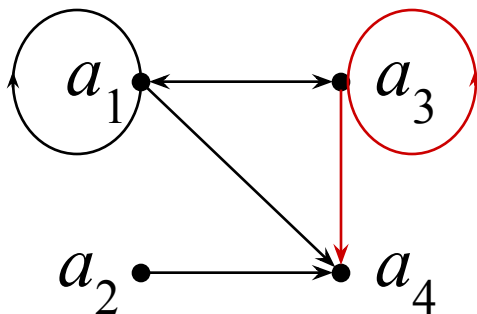
R_S	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	1	0	1	1
a_2	0	0	0	1
a_3	1	0	0	0
a_4	1	1	0	0



□ **Транзитивним замиканням** R_t відношення R називається відношення
 $R_t = R \cup R^1 \cup \dots \cup R^n \cup \dots$

R	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	1	0	1	1
a_2	0	0	0	1
a_3	1	0	0	0
a_4	0	0	0	0

R_E	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	1	0	1	1
a_2	0	0	0	1
a_3	1	0	1	1
a_4	0	0	0	0



Алгоритм Уоршалла

побудови транзитивного замикання для відношення R .

Нехай відношення задано у вигляді матриці.

1. Присвоювання початкових значень $W = R, k = 0$.
2. Виконати $k = k + 1$.
3. Для всіх $i \neq k$ таких, що $w_k = 1$, і для всіх j виконати операцію $w_{ij} = w_{ij} \vee w_{kj}$.
4. Якщо $k = n$, то отримано розв'язок.

Приклад. Використання алгоритму Уоршалла для побудови транзитивного замикання.

Нехай $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R \subseteq A \times A$

R	1	2	3	4
1	0	0	0	1
2	1	0	1	0
3	1	0	0	1
4	0	0	1	0

$$W^{(0)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$W^{(0)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$W^{(1)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$W^{(2)} = W^{(1)}$ бо другой стовпчик нульовий

$$W^{(3)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$W^{(4)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Результат $W^{(4)}$

2.4. Відношення еквівалентності, толерантності, порядку

- *відношення еквівалентності*
- *класи еквівалентності*
- *відношення толерантності*
- *строгий порядок*
- *частковий (нестрогий) порядок*
- *лінійний порядок*
- *порівнянні і непорівнянні елементи*
- *структура впорядкованих множин*

Відношення еквівалентності

- Бінарне відношення, що має властивості рефлексивності, симетричності і транзитивності, називається *відношенням еквівалентності* (позначається \sim).

Нехай задана множина A і відношення еквівалентності, що визначене на цій множині:
 $R \subseteq A \times A$.

- Елементи $a, b \in A$, для яких виконується aRb , називаються *еквівалентними*.
- Будь-яке відношення еквівалентності R , визначене на множині A , розбиває множину A на неперетинні підмножини, які називаються *класами еквівалентності*.

Розбиття скінченної множини A на класи еквівалентності за відношенням R .

1. Виберемо елемент $a_1 \in A$ і утворимо клас C_1 що складається з усіх елементів $y \in A$, для яких виконується відношення $a_1 R y$.

(Клас C_1 може складатися тільки з одного елемента a_1 , якщо не існує інших елементів y , таких, що $a_1 R y$ - через рефлексивність відношення еквівалентності завжди виконується $a_1 R a_1$.)

2. Якщо $C_1 \neq A$, то виберемо з A елемент a_2 , що не входить до класу C_1 , і утворимо клас C_2 , який складається з елементів $y \in A$: $a_2 R y$.

3. Якщо $(C_1 \cup C_2) \neq A$, то виберемо з A елемент a_3 , що не входить до класів C_1 і C_2 , і утворимо клас C_3 . Будемо продовжувати побудову класів доти, доки в A не залишиться жодного елемента, що не входить до одного з класів C_i .

□ Система класів C_1, C_2, \dots, C_n називається **системою класів еквівалентності** і має такі властивості:

1. класи попарно не перетинаються

$$\forall i, j: C_i \cap C_j = \emptyset$$

2. будь-які два елементи з одного класу еквівалентні

$$\forall a, b \in C_i: (a, b) \in R$$

3. будь-які два елементи з різних класів не еквівалентні

$$\forall a \in C_i, b \in C_j: (a, b) \notin R$$

Приклад.

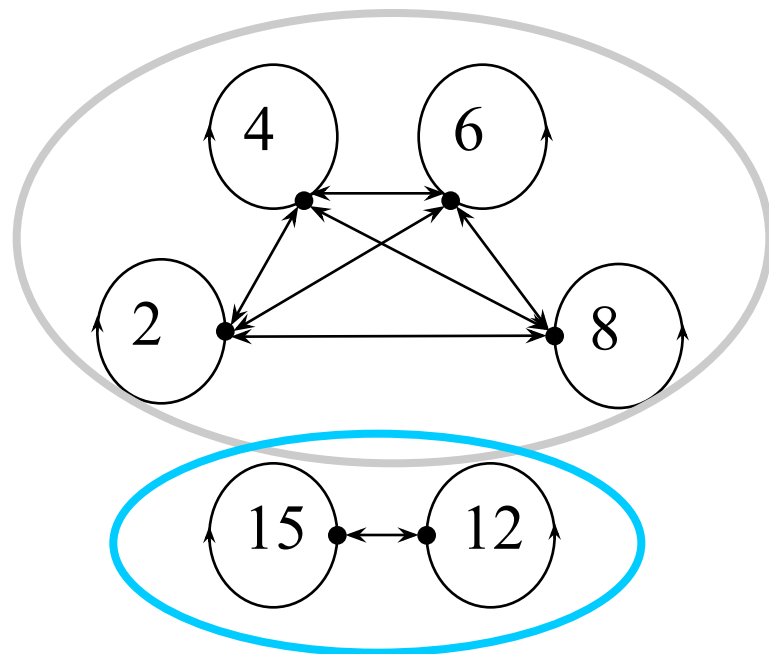
Нехай $A = \{2, 4, 6, 8, 12, 15\}$, $R_1 \subseteq A \times A$

R_1 – мати однакову кількість цифр

Розбиття на класи еквівалентності за R_1 :

$\{\{2, 4, 6, 8\}, \{12, 15\}\}$

R_1	2	4	6	8	12	15
2	1	1	1	1	0	0
4	1	1	1	1	0	0
6	1	1	1	1	0	0
8	1	1	1	1	0	0
12	0	0	0	0	1	1
15	0	0	0	0	1	1



Приклад.

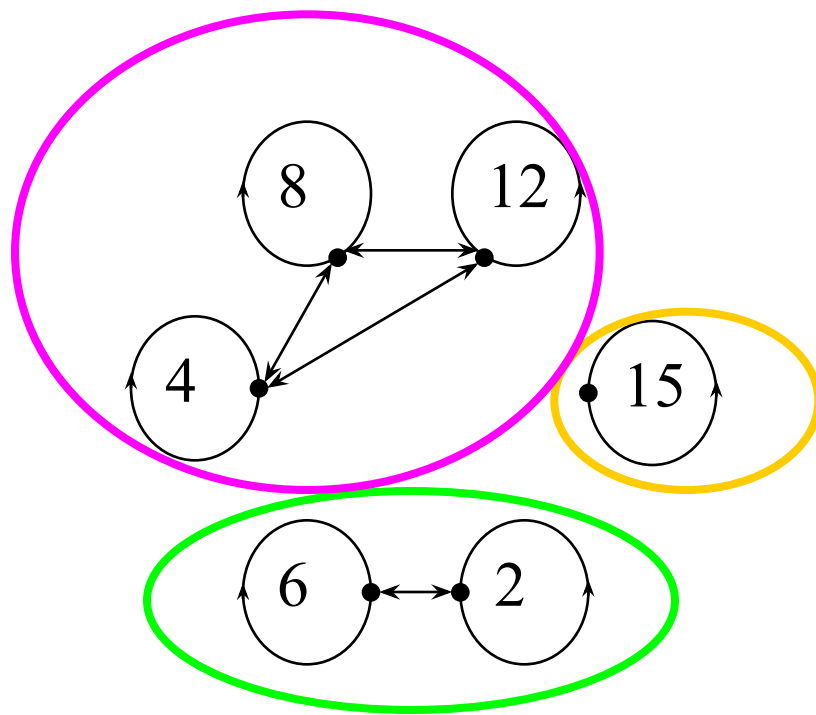
Нехай $A = \{2, 4, 6, 8, 12, 15\}$, $R_2 \subseteq A \times A$

$R_2 = \{(2,2), (2,6), (4,4), (4,8), (4,12), (6,2), (6,6),$
 $(8,4), (8,8), (8,12), (12,4), (12,12), (15,15)\}$

Розбиття на класи еквівалентності за R_2 :

$\{\{2, 6\}, \{4, 8, 12\}, \{15\}\}$

R_2	2	6	4	8	12	15
2	1	1	0	0	0	0
6	1	1	0	0	0	0
4	0	0	1	1	1	0
8	0	0	1	1	1	0
12	0	0	1	1	1	0
15	0	0	0	0	0	1



Відношення толерантності

- Бінарне відношення, що має властивості рефлексивності, симетричності і антитранзитивності, називається *відношенням толерантності*.

Толерантність зображує собою формальне уявлення інтуїтивного поняття схожості.

Приклад.

Муха-мура-тура-тара-кара-каре-кафе-кафр-каюр-каюк-крюк-крок-срок-сток-стон-слон

Відношення порядку

- Бінарне відношення, що має властивості антирефлексивності (якщо $a < b$, то $a \neq b$), асиметричності (якщо $a < b$, то не правильне $b < a$) і транзитивності (якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$), називається *відношенням строгого порядку* (позначається $<$).

Приклад.

A – множина студентів групи, $R \subseteq A \times A$,
 R – бути старшим.

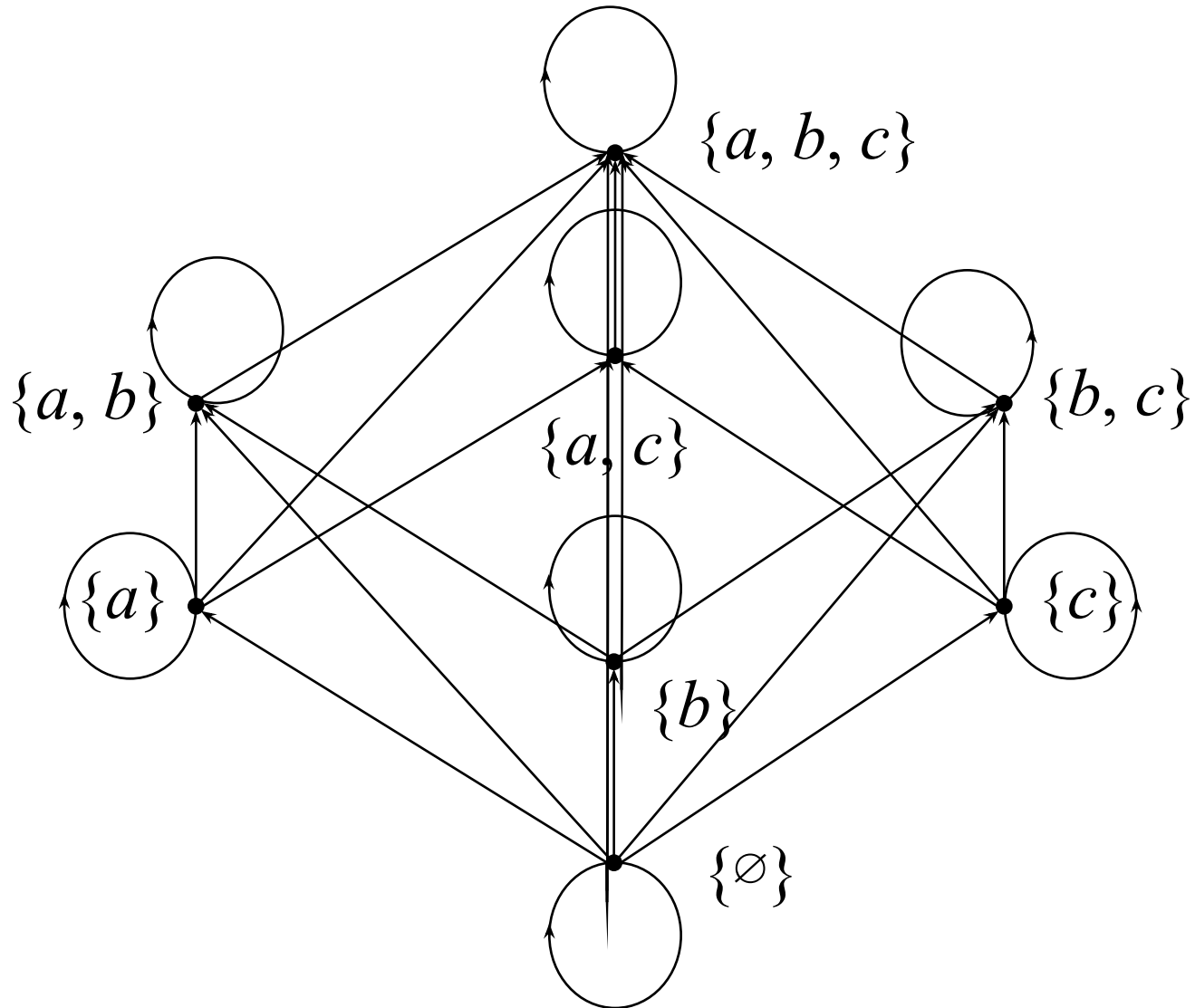
- Бінарне відношення, що має властивості рефлексивності, антисиметричності і транзитивності, називається *відношенням нестрогого (часткового) порядку* (позначається \leq).

Якщо на множині задане відношення часткового порядку, то ця множина називається *частково упорядкованою*.

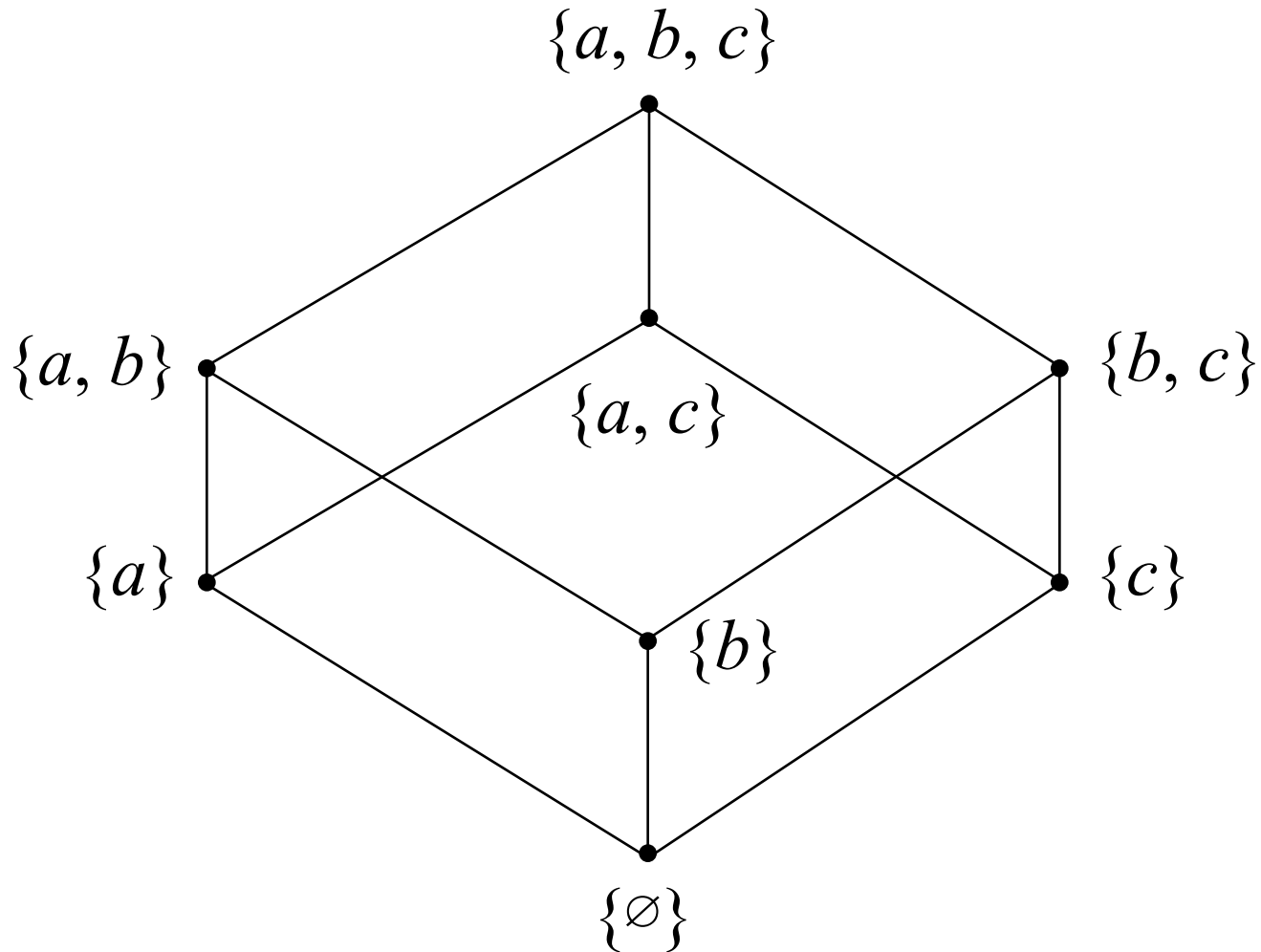
Приклад.

Нехай $A = \{a, b, c\}$, R – відношення включення, задане на булеані 2^A .

Зображення відношення часткового порядку



діаграма Хассе



- **Шлях** у графі відношення з вершини a до вершини b — це послідовність дуг $(a, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{n-1}, b), n \geq 1$. Число дуг n називається **довжиною шляху**.
- Елементи a і b називаються **порівнянними** у відношенні часткового порядку R , якщо виконується хоча б одне із співвідношень aRb або bRa .
- Множина A , на якій задане відношення часткового порядку R і для якої всілякі два елементи цієї множини порівнянні, називається **лінійно упорядкованою** або **повністю упорядкованою**.

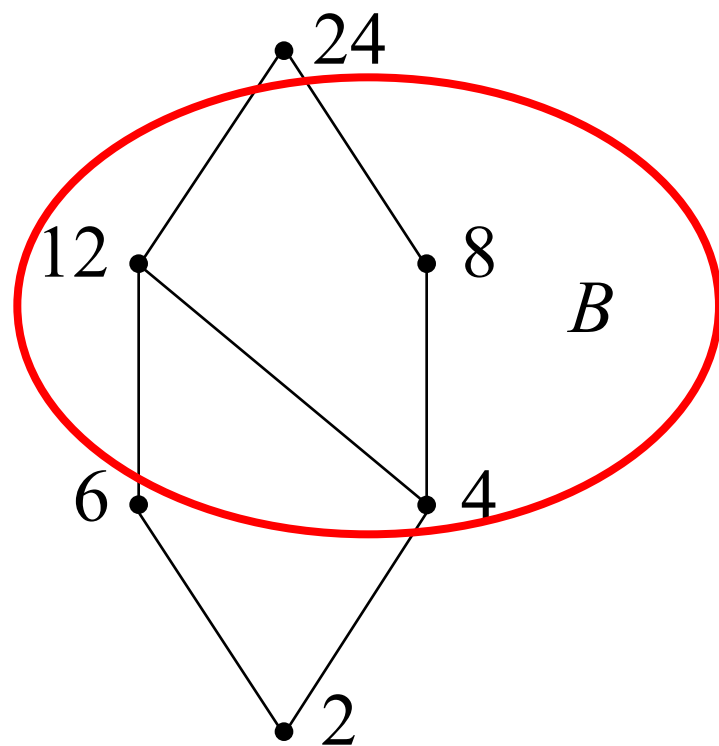
Структура впорядкованих множин

$A = \{2, 4, 6, 8, 12, 24\}$, $B = \{4, 8, 12\}$, $B \subseteq A$

$R \subseteq A \times A$, R – бути дільником

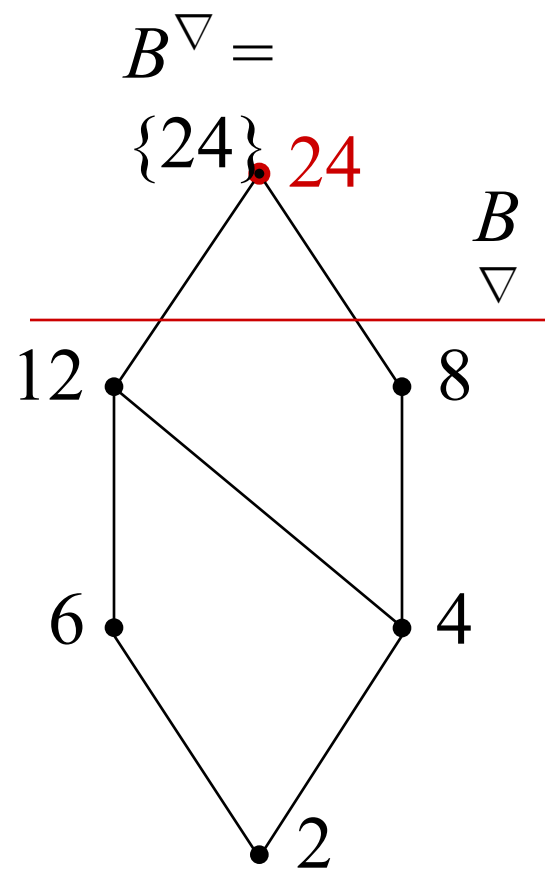
$R = (2,2), (2,4), (2,6), (2,8),$
 $(2,12), (2,24), (4,4), (4,8), (4,12),$
 $(4,24), (6,6), (6,12), (6,24), (8,8),$
 $(8,24), (12,12), (12,24), (24,24)\}$

R	2	4	6	8	12	24
2	1	1	1	1	1	1
4	0	1	0	1	1	1
6	0	0	1	0	1	1
8	0	0	0	1	0	1
12	0	0	0	0	1	1
24	0	0	0	0	0	1



□ **Мажорантою** (найбільшим елементом, верхньою гранню) підмножини B називають такий елемент $m \in A$, що для будь-якого елемента $b \in B$ справджується відношення bRm .

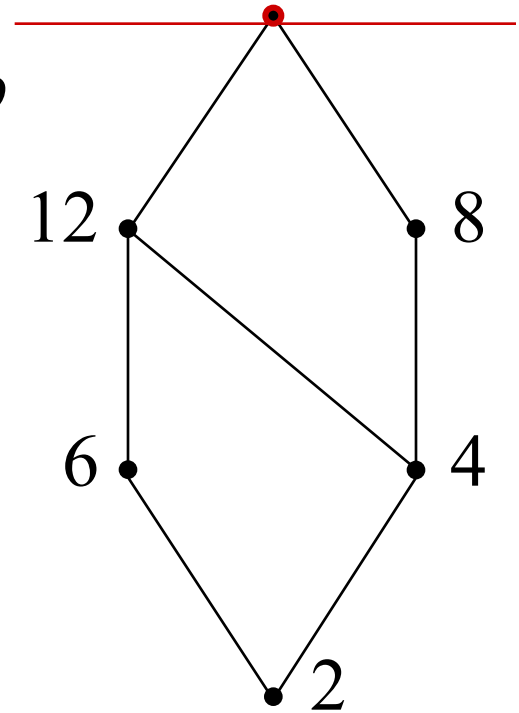
□ Підмножина $B \subseteq A$ може мати кілька мажорант. Сукупність мажорант називають **верхнім конусом** підмножини B і позначають B^∇ .



- Якщо верхній конус підмножини B має мінімальний елемент, то він називається **точною верхньою гранню** B і позначається $\sup B$.
- Якщо точна верхня грань $\sup B \in B$, то її називають **максимальним елементом** B (позначають $\max(B)$). Якщо максимальний елемент існує, то він єдиний.

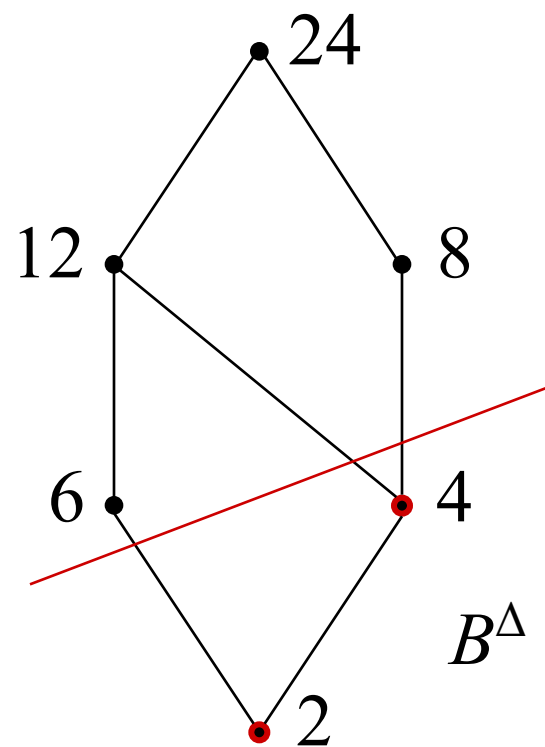
$$\max(B) = \emptyset$$

$$\sup B = 24$$



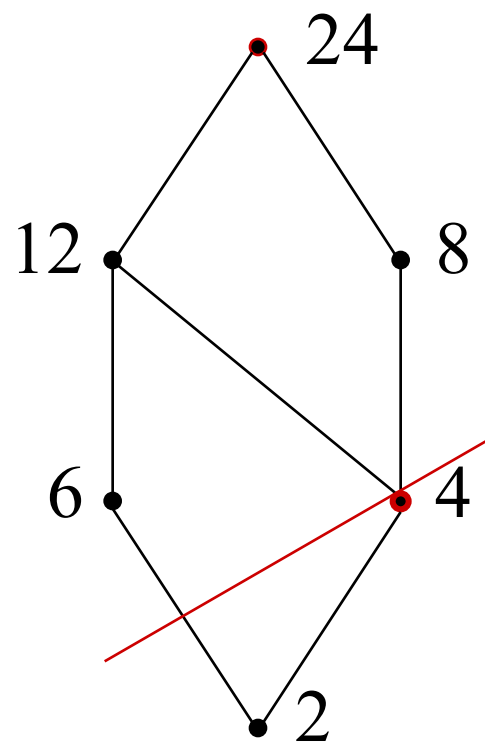
□ **Мінорантою** (найменшим елементом, нижньою гранню) підмножини V називають такий елемент $n \in A$, що для будь-якого елемента $b \in V$ справджується відношення nRb .

□ Підмножина $V \subseteq A$ може мати кілька мінорант. Сукупність мінорант називають **нижнім конусом** підмножини V і позначають V^Δ .



$$B^\Delta = \{2, 4\}$$

- Якщо нижній конус підмножини B має максимальний елемент, то він називається **точною нижньою гранню** B і позначається $\inf B$.
- Якщо точна нижня грань $\inf B \in B$, то її називають **мінімальним елементом** B (позначають $\min(B)$). Якщо мінімальний елемент існує, то він єдиний.



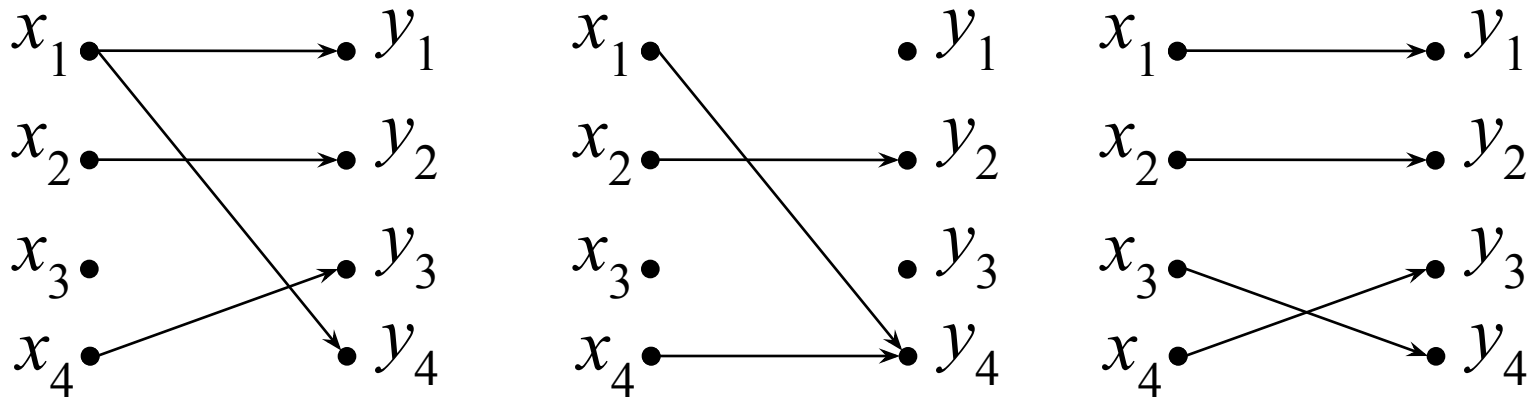
$$\inf B = 4$$

$$\min(B) = 4$$

2.5. Функціональні відношення

- *функціональне відношення*
- *області визначення і значень*
- *відображення (функція)*
- *сюр'єкція, ін'єкція, бієкція*

- Відношення R між множинами X і Y ($R \subseteq X \times Y$) є **функціональним**, якщо всі його елементи (упорядковані пари) різні за першим елементом: кожному $x \in X$ або відповідає тільки один елемент $y \in Y$, такий, що xRy , або такого елемента y взагалі не існує.



Матриця функціонального відношення, що задане на скінченних множинах X і Y , містить не більше однієї одиниці в кожному рядку.

Нехай R — деяке відношення, $R \subseteq X \times Y$.

□ **Областю визначення** відношення R називається множина D_R (Dom_R), що складається з усіх елементів множини X , які зв'язані відношенням R з елементами множини Y :

$$D_R \subseteq X, D_R = \{x: \exists y \in Y, (x, y) \in R\}.$$

□ Якщо $D_R = X$, то відношення R називається **повністю визначеним**.

□ **Областю значень** відношення R називається множина \mathcal{R}_R (Im_R), що складається з усіх елементів множини Y , які зв'язані відношенням R з елементами множини X : $\mathcal{R}_R \subseteq Y, \mathcal{R}_R = \{y: \exists x \in X, (x, y) \in R\}$.

Відображення (функція)

- Функцією f або відображенням f множини X в Y (позначається $f: X \rightarrow Y$) називається повністю визначене функціональне відношення F , $F \subseteq X \times Y$, $D_F = X$ ($D_F \equiv D_f$).
- Якщо множина $A \subseteq X$, то через $f(A) = \{y \in Y: y = f(x), \forall x \in A\}$ позначається **образ** множини A .
- Якщо множина $B \subseteq Y$, то множина $f^{-1}(B) = \{x \in X: f(x) \in B\}$ називається **прообразом** множини B відносно відображення f .

Види відображень

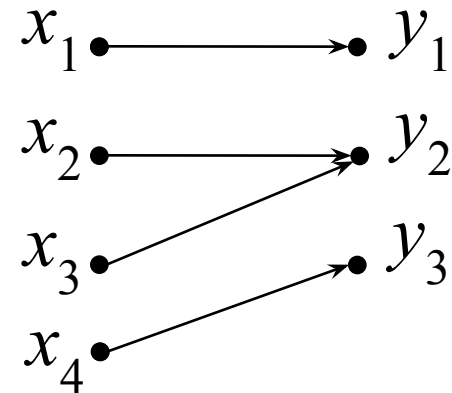
- Функція $f: X \rightarrow Y$ називається *сюр'єктивним відображенням*, якщо $\mathcal{R}_f = Y$.

На графі, що зображує сюр'єктивне відображення $X \rightarrow Y$, з будь-якої вершини $x \in X$ виходить точно одна дуга, а до будь-якої вершини, що зображує елемент множини Y , заходить не менше однієї дуги. В матриці відображення у кожному рядку точно одна одиниця, а в кожному стовпчику – не менше однієї одиниці.

Приклад.

X – множина студентів,

Y – множина років народження.



- Функція $f: X \rightarrow Y$ називається *ін'єктивним відображенням*, якщо з $x_1 \neq x_2$ виходить $f(x_1) \neq f(x_2)$.

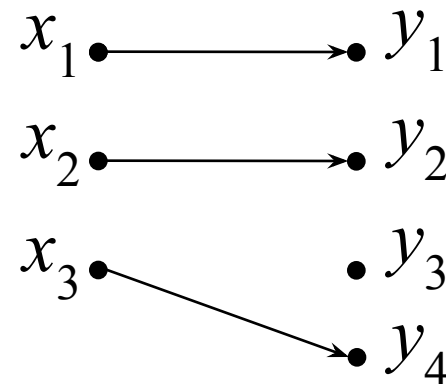
На графі, що зображує ін'єктивне відображення $X \rightarrow Y$, з будь-якої вершини $x \in X$ виходить точно одна дуга, а до будь-якої вершини, що зображує елемент множини Y , заходить не більше однієї дуги. В матриці відображення у кожному рядку точно одна одиниця, а в кожному стовпчику – не більше однієї одиниці.

Приклад.

Позиція на шахівниці

X – множина фігур,

Y – множина полів на дошці.



- Якщо $f: X \rightarrow Y$ — ін'єктивне відображення і $F = \{(x, f(x)), \forall x \in X\}$ — відповідне функціональне відношення ($F \subset X \rightarrow Y$), то обернене відношення $F^{-1} = \{(y, x), \forall y \in \mathcal{R}_f\}$ також є функціональним.

- Функція $x = f^{-1}(y), f^{-1}: \mathcal{R}_f \rightarrow X$, що задається відношенням F^{-1} , має властивості:
 $f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in X; f^{-1}(f(y)) = y, \forall y \in \mathcal{R}_f$
і називається **оберненою** до функції f .

- Функція $f: X \rightarrow Y$ називається **бієктивним відображенням**, якщо вона сюр'єктивна та ін'єктивна.

На графі, що зображує бієктивне відображення $X \rightarrow Y$, з будь-якої вершини $x \in X$ виходить точно одна дуга, а до будь-якої вершини, що зображує елемент множини Y , заходить точно одна дуга. В матриці відображення у кожному рядку точно одна одиниця, а в кожному стовпчику – теж точно одна одиниця.

Приклад.

X – множина студентів,

Y – множина їх
ідентифікаційних кодів.

