Навчально-науковий інститут комп'ютерних інформаційних технологій

Кафедра комп'ютеризованих систем управління

Навчальна дисципліна

«**МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ**»

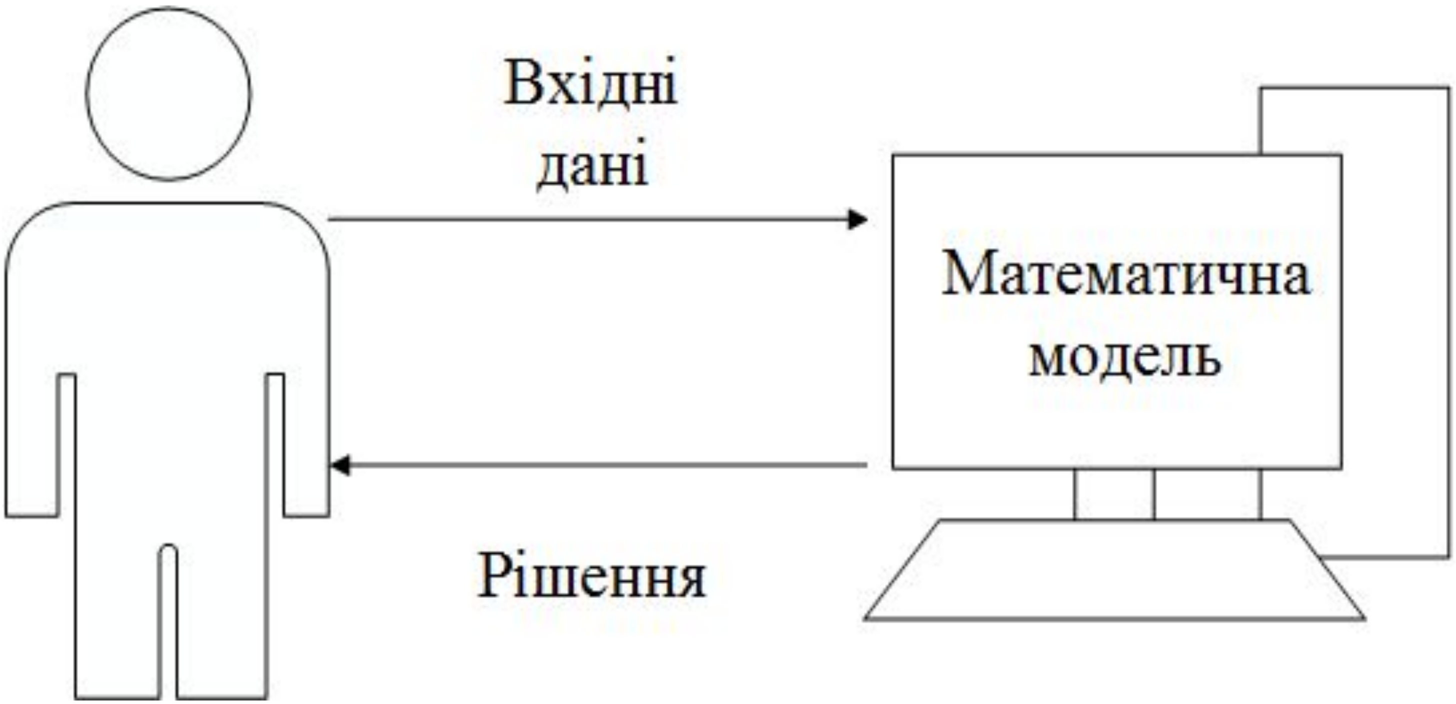
для спеціальності

6.05010202 «Системне програмування»

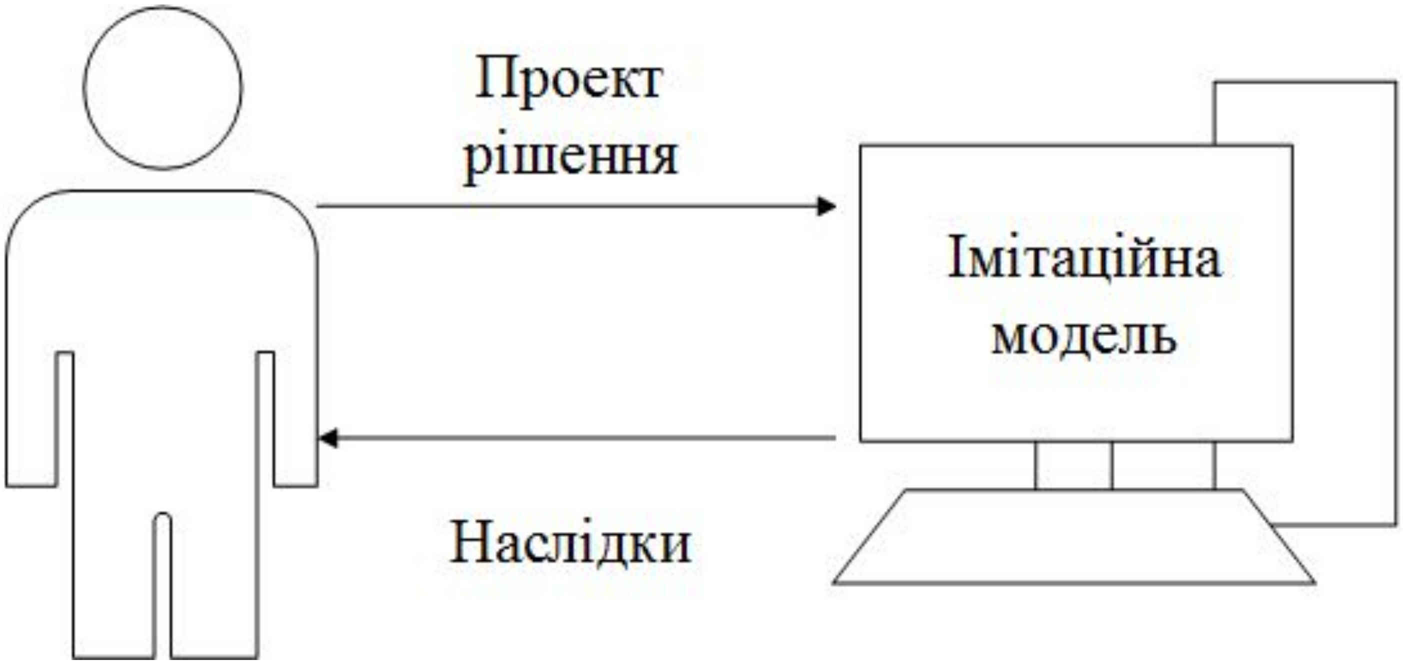
Курс 3	*Семестр 5*
Лекцій	34 години
Лабораторних занять	34 години
Самостійна робота	67 година
Всього	135 годин
Домашнє завдання	1 (5 семестр)
Екзамен	*5 семестр*

ГЛОБАЛЬНА ПРОБЛЕМА

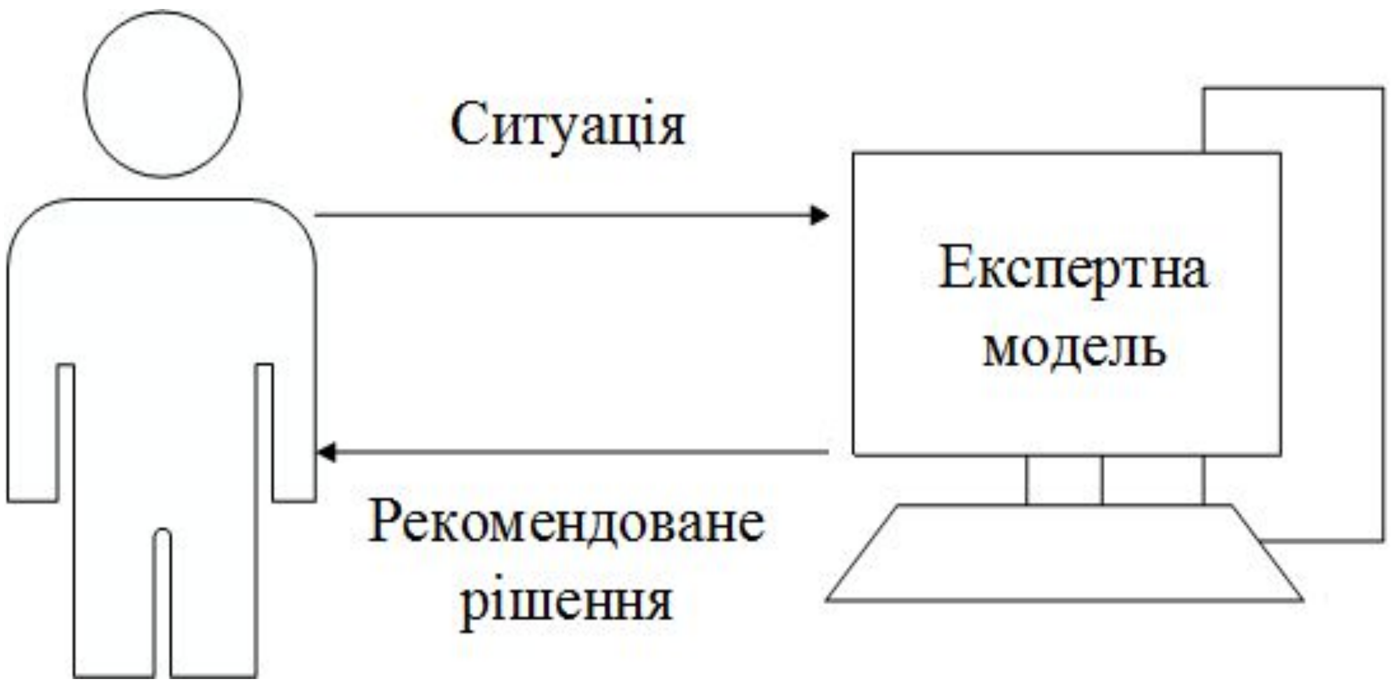
ВИРОБЛЕННЯ РІШЕНЬ НА ОСНОВІ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ



ВИРОБЛЕННЯ РІШЕНЬ НА ОСНОВІ ІМІТАЦІЙНОЇ МОДЕЛІ



ВИРОБЛЕННЯ РІШЕНЬ НА ОСНОВІ ЕКСПЕРТНОЇ МОДЕЛІ



Математичне програмування –

науковий напрямок, присвячений розробці та дослідженню чисельних методів розв’язання екстремальних (оптимізаційних) задач.

«В мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-либо максимума или минимума»

Леонард Эйлер (1707-1783).
Гражданин Швейцарии,
автор 800 научных работ.
Академик Петербургской АН (1731-1741).
Академик Берлинской АН (1741-1766).

Метою викладання дисципліни є формування теоретичної бази знань та практичних навичок застосування методів математичного програмування для розв’язання задач прийняття проектних та управлінських рішень в реальних економічних, організаційних і виробничих системах.

Студент повинен знати:

- теоретичні основи математичного програмування;
- принципи побудови математичних моделей задач прийняття проектних та управлінських рішень;
- основні методи і алгоритми лінійного, нелінійного, цілочисельного, дискретного, динамічного програмування;

Студент повинен вміти:

- будувати математичні моделі задач прийняття проектних та управлінських рішень;
- визначати, до якого класу задач математичного програмування належить формалізована функціональна задача;
- вибирати для її розв’язання відповідний метод і алгоритм оптимізації;
- розробляти схеми алгоритмів розв’язання задач оптимізації;
- застосовувати існуючі уніфіковані програмні засоби розв’язання оптимізаційних задач;
- аналізувати та інтерпретувати результати розв’язання функціональних задач.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кутковецький В.Я. Дослідження операцій // Навчальний посібник для студентів ВНЗ. – Київ: Професіонал, 2004. – 349 с.
2. Ларіонов Ю.І., Марченко Л.С., Хажмурадов М.А. Дослідження операцій // Навчальний посібник. – Харків: Інжек, 2005. – 288 с.
3. Охріменко М.Г., Дзюбан І.Ю. Дослідження операцій // Навчальний посібник. – Київ: Центр навчальної літератури, 2006. – 183 с.
4. Ржавський С.В., Александрова В.М. Дослідження операцій // Підручник. – Київ: Академвидав, 2006. – 560 с.
5. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій. – Київ: ВІПОЛ. – 2000. – 688 с.
6. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука. – 1980. – 520 с.
7. Исследование операций: В 2-х томах./Под ред. Дж. Моудера, С.Элмаграба. – М.: Мир. – 1981. т.1- 712 с., т.2. – 677 с.
8. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. – М: Мир. – 1985. – 512 с.
9. Таха Х. Введение в исследование операций: - в 2-х томах.М.: Мир. –1985. – Т.1 – 479 с. - Т.2- 496 с.
10. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир. – 1975. – 536с.
11. Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Наука. – 1980. – 208 с.

Тема 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ

1.1 Області застосування методів оптимізації

1.2 Загальна постановка ЗМП

Критеріальна (цільова) функція:

$$f(x) \to opt\ (\min, \max) \quad (1)$$

Система обмежень:

$$h_j(x) = 0,\ j = \overline{1, m} \quad (2)$$

$$g_j(x) \ge 0,\ j = \overline{m+1, p} \quad (3)$$

Умови:

, $x \in E^n$ $\quad x = (x_i; i = \overline{1, n})$

Приклад побудови математичної моделі ЗПР (1)

Вхідні дані:

m – кількість підприємств $(i=\overline{1,m})$;

n – кількість видів виробів $(j=\overline{1,n})$;

r – кількість типів ресурсів $(k=\overline{1,r})$;

p_j – план виробництва виробів j-го виду;

a_{jk} – норматив витрат ресурсів k-го типу на одиницю виробів j-го виду;

b_{ik} – об’єм ресурсів k-го типу на i-му підприємстві;

c_{ij} – витрати на випуск одиниці виробів j-го виду на i-му підприємстві.

Приклад побудови математичної моделі ЗПР (2)

Необхідно: так розподілити планове завдання між підприємствами, щоб сумарні витрати на випуск виробів були мінімальні.

Шукані змінні: x_{ij} – план випуску виробів j-го виду на i-му підприємстві; $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$.

Модель:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\,x_{ij}\to\min\,;$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=p_j\,;\quad j=\overline{1,n}\,;$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{jk}\,x_{ij}\le b_{ik}\,;\quad i=\overline{1,m}\,;\quad k=\overline{1,r}\,;$$

$$x_{ij}\ge 0\,;\quad i=\overline{1,m}\,;\quad j=\overline{1,n}\,.$$

1.3 Класифікація ЗМП

1.4 Терміни та визначення

1.4.1 Допустимість

1.4.2 Область допустимих розв’язків (ОДР)

1.4.3 Оптимальність

1.4.4 Унімодальні та мультимодальні функції

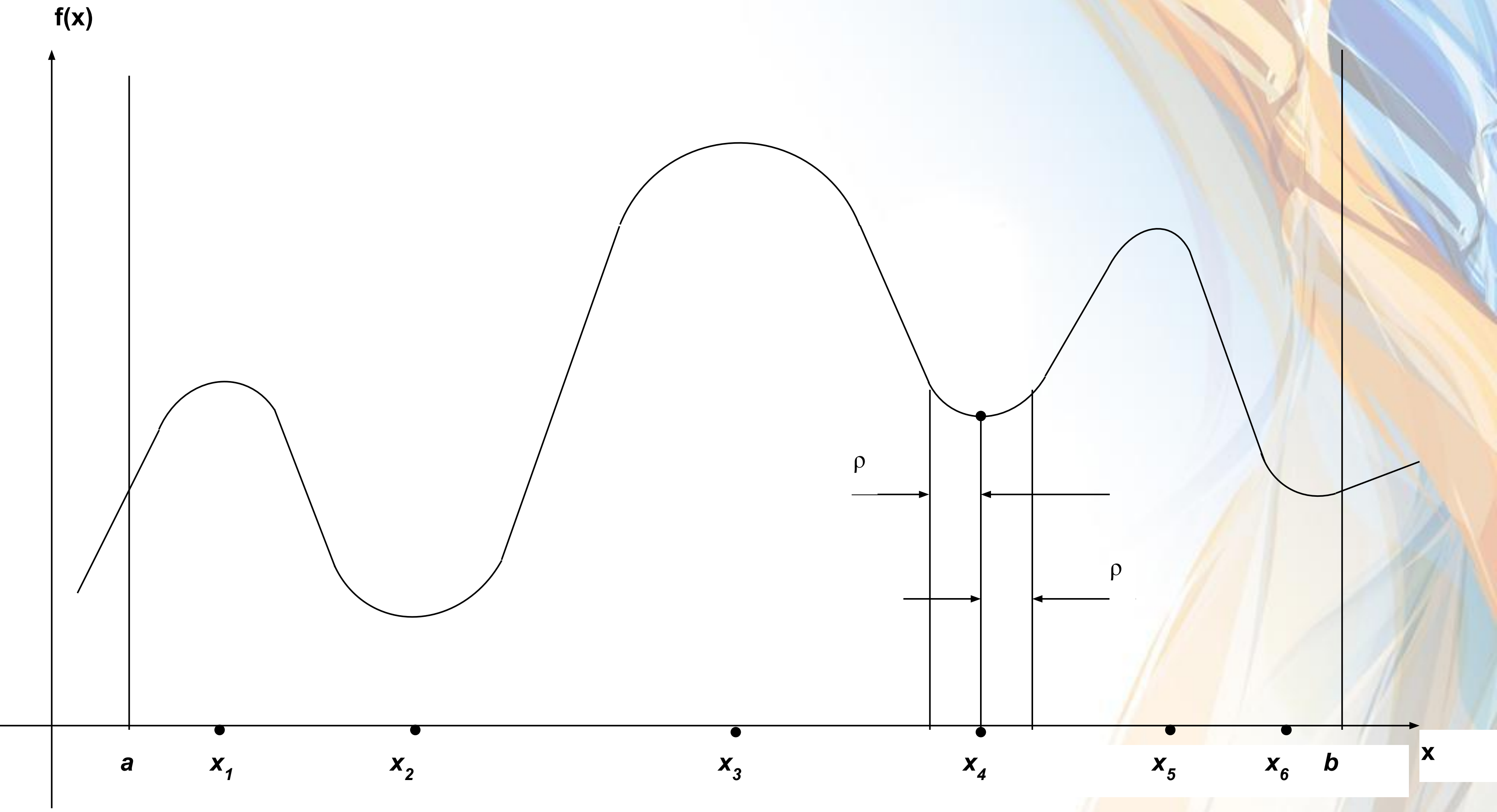


Рис. 1.2

1.4.5 Глобальний мінімум x^*:

$$f(x^*) = f_{\min} = \min\{f(x); x \in R\};$$

$$x^* = \arg\min_{x \in R} f(x).$$

1.4.6 Локальний мінімум x^*:

$$f'(x^*) = f'_{\min} = \min\{f(x); x \in R_0\};$$

$$x^* = \arg\min_{x \in R_0} f(x),$$

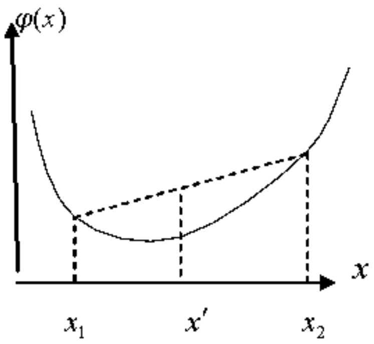
$$R_0 = \{x \in R : \left|x^* - x\right| \le \rho\}.$$

1.4.7 Стаціонарні точки

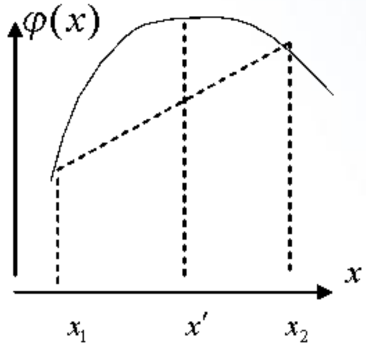
1.4.8 Наближений оптимальний розв'язок x^*:

$$\left|f(x^*) - f_{\min}\right| \le \varepsilon.$$

1.4.9 Опуклість та увігнутість



Опукла функція



Увігнута функція

Функція $\varphi(x)$ опукла в області R, якщо:

$$\varphi[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] \le \alpha\varphi(x_1) + (1-\alpha)\varphi(x_2);$$

$$x_1 \in R;\ x_2 \in R;\ 0 \le \alpha \le 1.$$

Функція $\varphi(x)$ увігнута в області R, якщо:

$$\varphi[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] \ge \alpha\varphi(x_1) + (1-\alpha)\varphi(x_2);$$

$$x_1 \in R;\ x_2 \in R;\ 0 \le \alpha \le 1.$$

Строго опуклі та строго увігнуті функції.

Приклад

Визначити, опукла чи увігнута функція
$\varphi(x) = 2x^2 - 5x + 7$

при $x_1 = 0$; $x_2 = 3$; $\alpha = 0{,}3$:

$$\varphi(0{,}7 \times 3) = \varphi(2{,}1) = 5{,}31$$
$$0{,}3\varphi(0) + 0{,}7\varphi(3) = 2{,}1 + 0{,}7 \times 10 = 9{,}1$$
$$\varphi(0{,}7 \times 3) \le 0{,}3\varphi(0) + 0{,}7\varphi(3)$$

Висновок: функція $\varphi(x) = 2x^2 - 5x + 7$ опукла.

Множина Q, $Q \subset E^n$, опукла, якщо для будь-якої пари $x^{(1)} \in Q$ та $x^{(2)} \in Q$

$$\left[\forall x' \in (x^{(1)}, x^{(2)})\right](x' \in Q);$$

$$x' = \alpha x^{(1)} + (1-\alpha)x^{(2)};\ 0 \le \alpha \le 1.$$

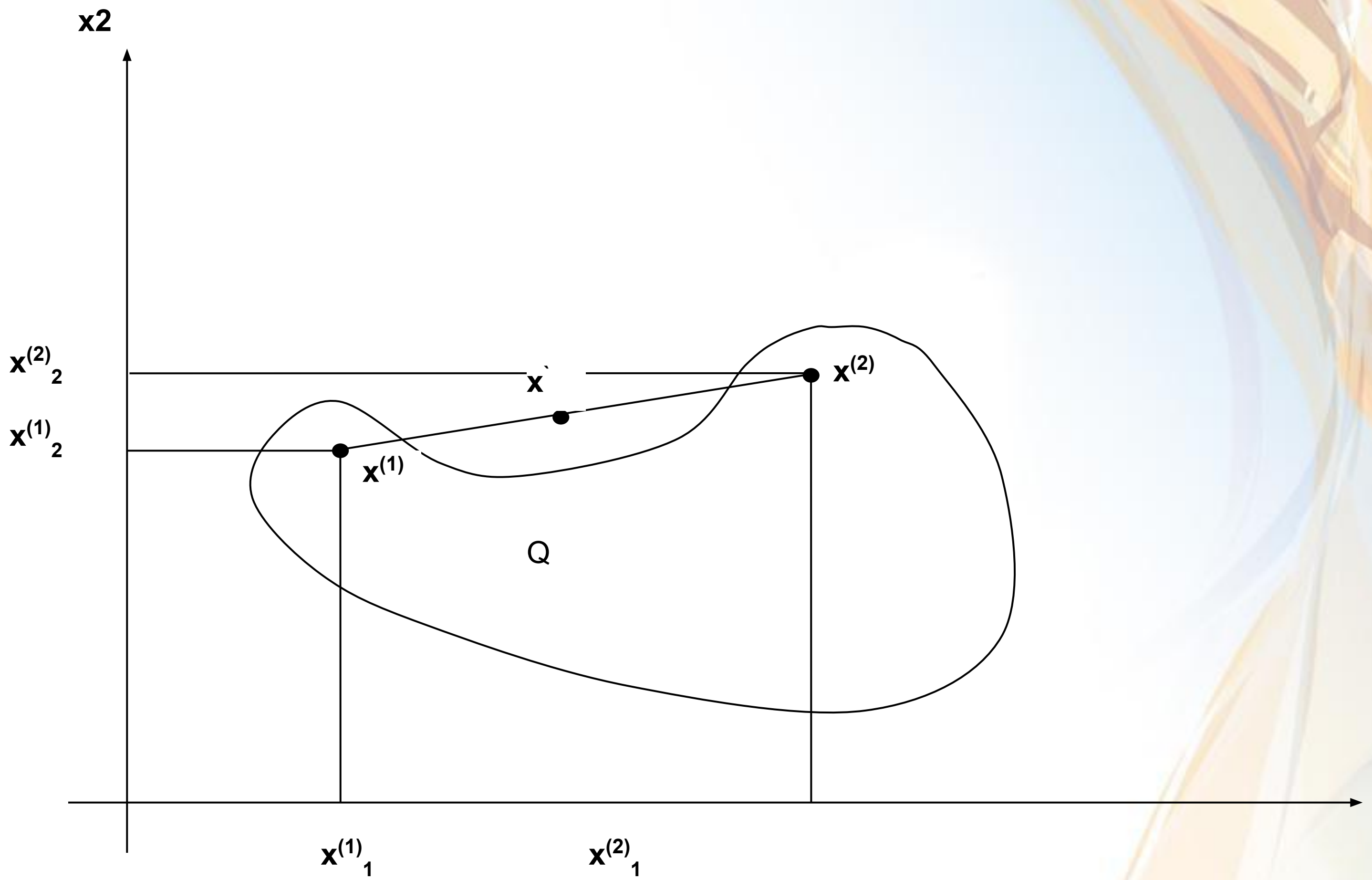


Рис. 1.4

Область допустимих рішень ЗМП з обмеженнями-нерівностями опукла, якщо:

$$(\forall\ j=\overline{1,m})\left\{\left[g_j(x)\le 0\right]\&\left[g_j(x)-\textit{опукла}\right]\vee\left[g_j(x)\ge 0\right]\&\left[g_j(x)-\textit{увігнута}\right]\right\}$$

1.4.10 Градієнт функції $f(x)$ в точці $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in E^n$:

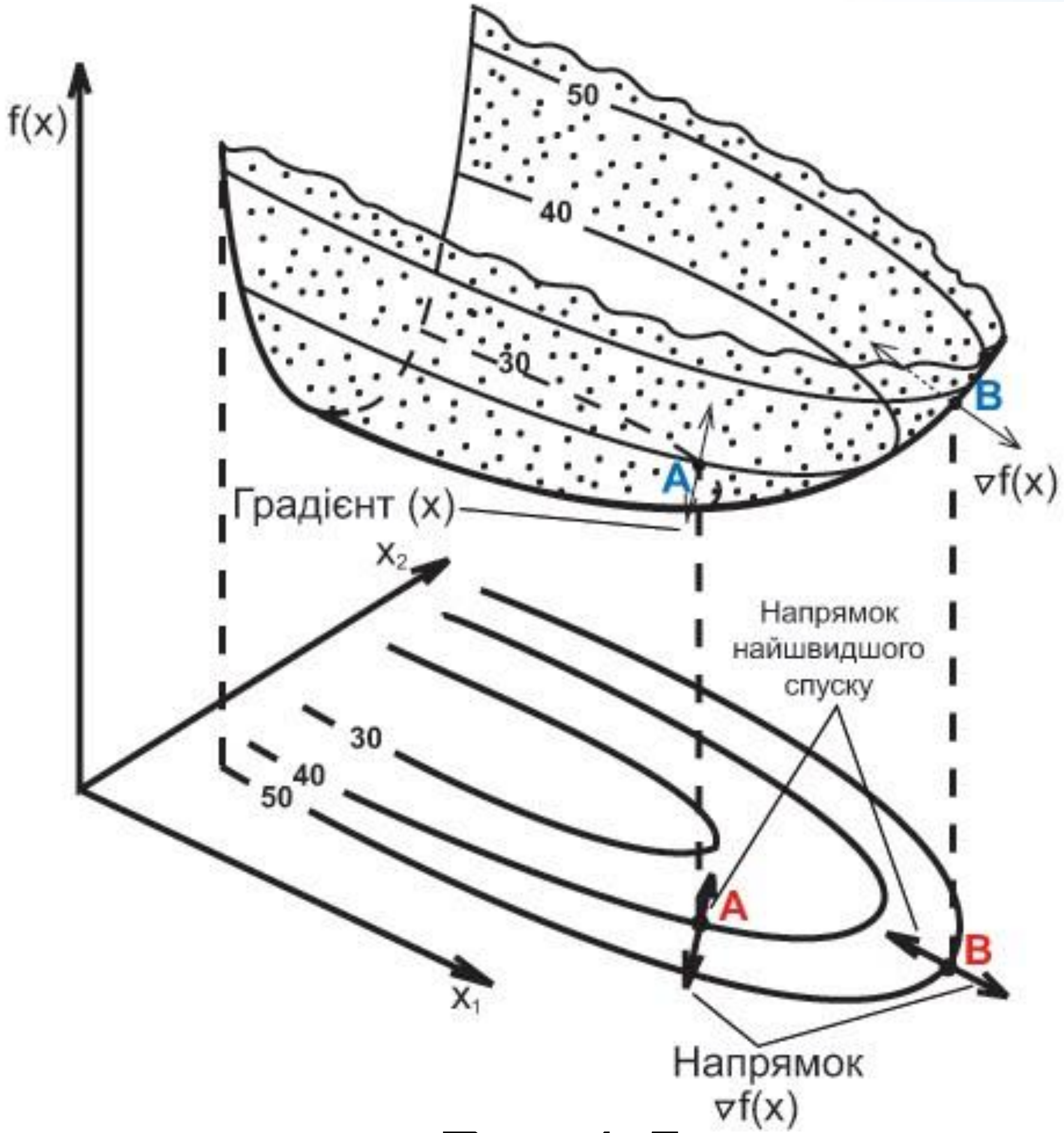
$$\nabla f(x^{(k)}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_2} \\ . \\ . \\ \dfrac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Приклад

$$f(x) = -2x_1^2 + 3x_3^2 - 4x_2 x_3 + 5x_1 - 6x_2\ ; \quad x^{(k)} = (2,\ 0,\ -1)\ .$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = -4x_1 + 5\ ; \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = -4x_2 - 6\ ; \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_3} = 6x_3 - 4x_2\ .$$

$$\nabla f(x^{(k)}) = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ -6 \end{bmatrix}.$$



f(x)
50
40
30
A
B
∇f(x)
Градієнт (x)
x_2
Напрямок
найшвидшого
спуску
30
40
50
A
B
x_1
Напрямок
∇f(x)

Рис.1.5

1.4.11 Апроксимація функції $f(x)$ в точці $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}) \in E^n$:

- лінійна:

$$f(x) \approx f(x^{(k)}) + \nabla^T f(x^{(k)}) \times (x - x^{(k)});$$

- квадратична:

$$f(x) \approx f(x^{(k)}) + \nabla^T f(x^{(k)}) \times (x - x^{(k)}) + \frac{1}{2}(x - x^{(k)})^T \times H(x^{(k)}) \times (x - x^{(k)}).$$

Матриця Гессе для функції $f(x)$ в точці $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) \in E^n$:

$$H(x^{(k)}) = \nabla^2 f(x^{(k)}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x^{(k)})}{\partial x_1^2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 f(x^{(k)})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial^2 f(x^{(k)})}{\partial x_n \partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial^2 f(x^{(k)})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Приклад

$$f(x) = -2x_1^2 x_2 + 3x_2^2 x_3 - 4x_1 x_2 x_3 + 5x_1 x_2^2 - 6x_1 + 7x_3; \; x^{(k)} = (2, 0, -1).$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = -4x_1 x_2 - 4x_2 x_3 + 5x_2^2 - 6;$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = -2x_1^2 + 6x_2 x_3 - 4x_1 x_3 + 10x_1 x_2;$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_3} = 3x_2^2 - 4x_1 x_2 + 7.$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} = -4x_2; \quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} = -4x_1 - 4x_3 + 10x_2; \quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_3} = -4x_2;$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} = -4x_1 - 4x_3 + 10x_2; \quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} = 6x_3 + 10x_1; \quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_3} = 6x_2 - 4x_1;$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_3 \partial x_1} = -4x_2; \quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_3 \partial x_2} = 6x_2 - 4x_1; \quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_3^2} = 0.$$

1.5 Необхідні та достатні умови оптимальності розв'язку ЗМП

$$f(x) \to \min;\ x \in E^n.$$

x^* – оптимальний розв'язок задачі, якщо:

1) $f(x)$ диференціюєма в x^*;

2) $\nabla f(x^*) = 0$;

3) $\nabla^2 f(x^*) > 0$.

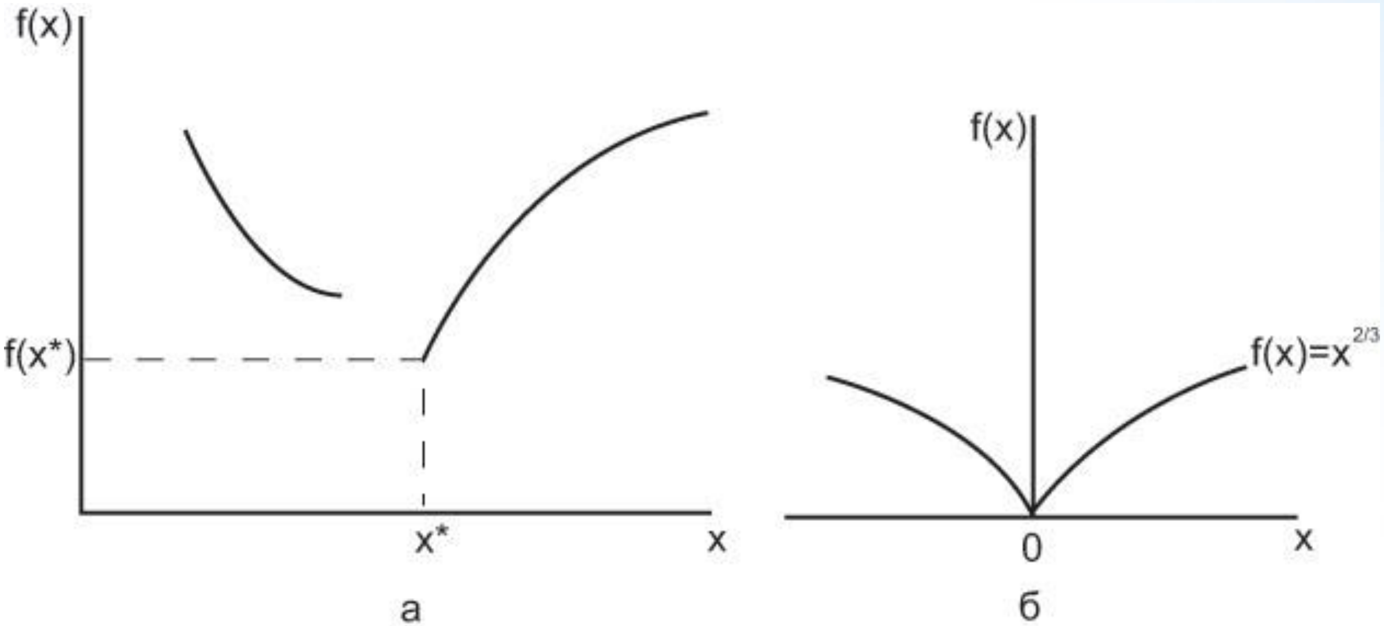


Рис.1.6

Тема 2. ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

2.1 Канонічна форма ЗЛП

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i\,; \quad i = \overline{1,m}\,;$$

$$x_j \geq 0\,; \quad j = \overline{1,n}\,.$$

2.2 Основні поняття та визначення

Допустимі розв'язки ЗЛП.
Оптимальні розв'язки ЗЛП.
Варіанти:
m=n
m<n
m>n
Сумісність системи обмежень.
Ранг матриці коефіцієнтів r_A.
Ранг розширеної матриці r_B.
Ранг системи обмежень r_C.

Приклад

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$r_A = r_B = r_C = 3.$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -4 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$$r_A = 1; \quad r_B = 2; \quad r_A \neq r_B.$$

Лінійно незалежні обмеження

Приклад

$$\begin{aligned} x_1 \quad + x_2 \quad + x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 \quad - x_2 \quad + x_3 + x_4 &= -1 \\ 3x_1 \quad - x_2 \quad + 3x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$r_A = r_B = r_C = 2$$

Базисні та вільні змінні:

$$x_1 = g_1'(x_{m+1}, \ldots, x_n)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_m = g_m'(x_{m+1}, \ldots, x_n)$$

$$n > m\,;\; r_A = r_B = r_C = m\,.$$

Приклад

$$2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1$$

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2$$

$$x_1 = 3 + x_3$$

$$x_2 = 5 + 3x_3 - x_4$$

$$n = 4\,; \quad r_A = r_B = r_C = 2\,.$$

2.3 Геометрична інтерпретація ЗЛП

Приклад

$$f(x) = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 + x_6 - 2x_7 \rightarrow \min$$

$$\begin{aligned}
&x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\
&2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -5 \\
&x_1 + x_2 - x_5 = -4 \\
&x_2 + x_6 = 5 \\
&2x_1 - 2x_2 - x_6 + 2x_7 = 7
\end{aligned}$$

$$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1,7}.$$

$$r_A = r_B = r_C = m = 5; \qquad n - m = 2.$$

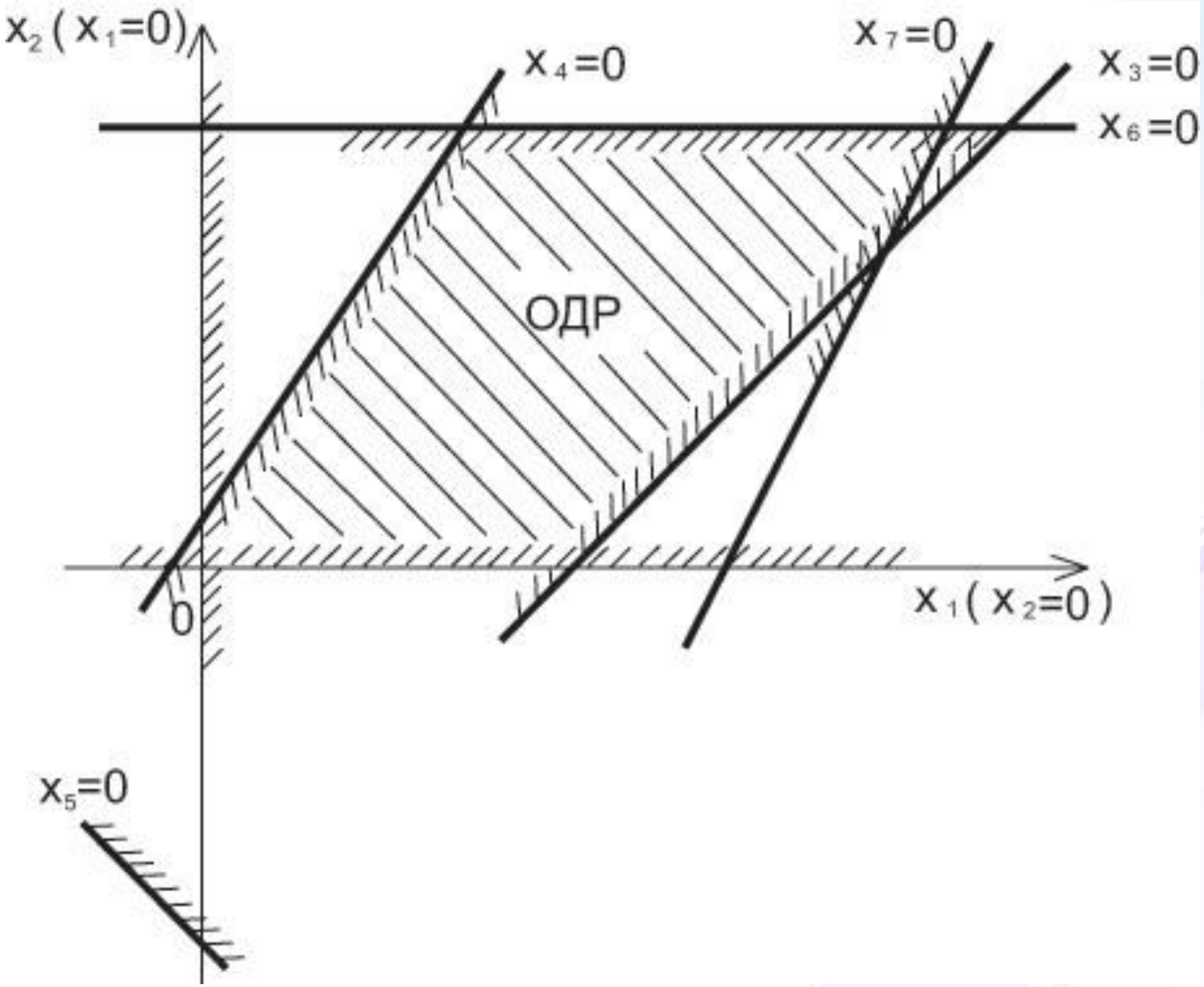
Вільні змінні: x_1 та x_2.

Базисні змінні: $x_3, \ldots, x_7$.

$$
\begin{aligned}
x_3 &= -x_1 + x_2 + 4 \\
x_4 &= 3x_1 - 2x_2 + 1 \\
x_5 &= x_1 + x_2 + 4 \\
x_6 &= -x_2 + 5 \\
x_7 &= -x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 6
\end{aligned}
$$

Область допустимих рішень:

Рис. 1.7



ЗНАХОДЖЕННЯ ТОЧКИ ОПТИМАЛЬНОГО РІШЕННЯ

$$f(x) = -5x_1 - 2x_2 - 12$$
$$f'(x) = -5x_1 - 2x_2$$

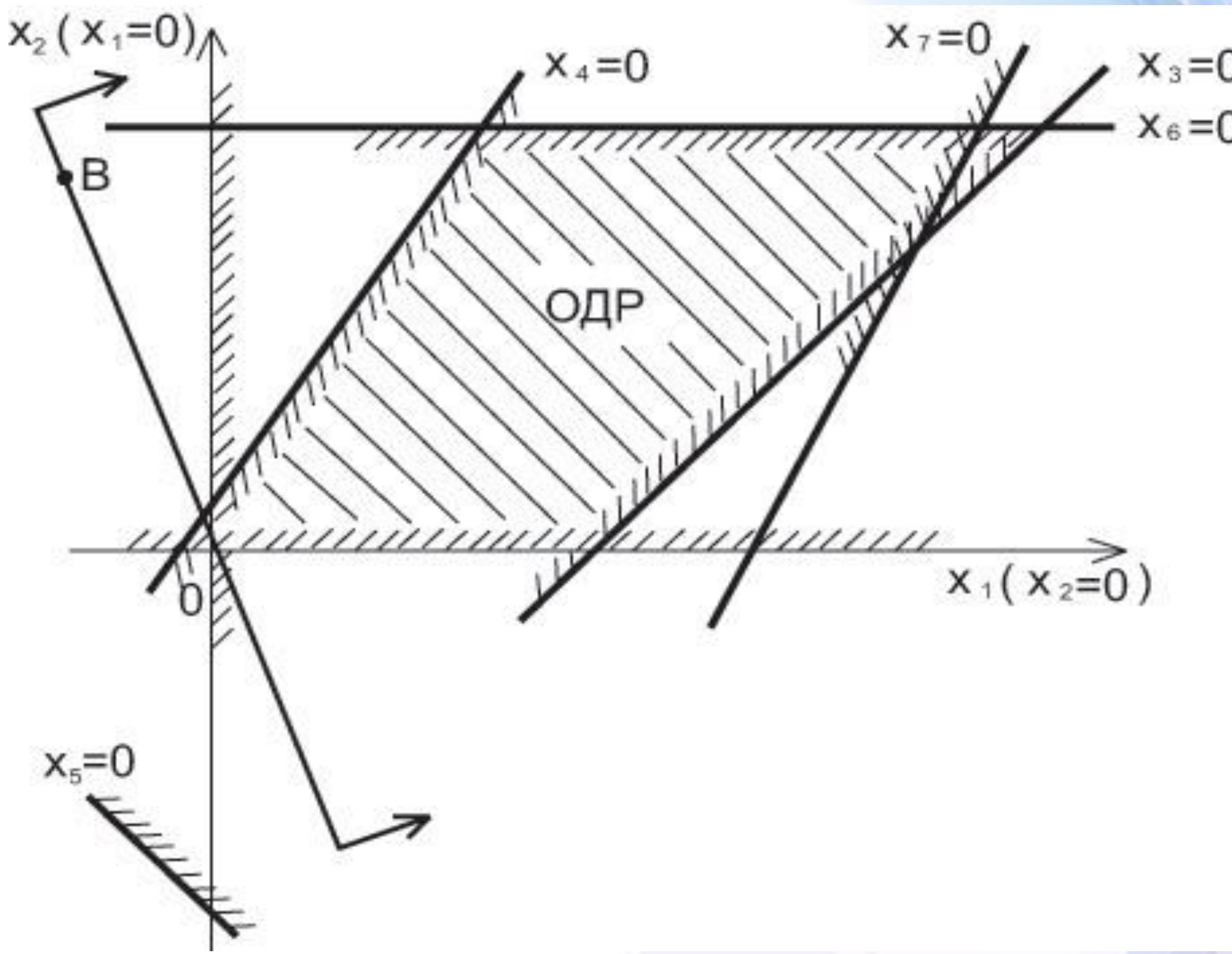
Рівняння основної прямої:

$$f'(x) = -5x_1 - 2x_2 = 0.$$

Переміщення основної прямої:

$$f'(x) = -5x_1 - 2x_2 = C \neq 0.$$

Рис. 1.8



Оптимальне рішення:

$$x_1^* = 8{,}5\,;\quad x_2^* = 5\,;\quad x_3^* = 0{,}5\,;\quad x_4^* = 16{,}5\,;$$

$$x_5^* = 17{,}5\,;\quad x_6^* = x_7^* = 0\,;$$

$$f^* = -64{,}5\,.$$

Висновки:

1. Область допустимих рішень ЗЛП – опуклий багатогранник.

   (Опорні точки. Опорні рішення.)
2. У кожній опорній точці $k = n - m$ змінних дорівнює нулю.
3. Оптимальне рішення ЗЛП знаходиться на границі ОДР: у вершині або на грані багатогранника, найбільш віддаленої від початку координат у напрямку спадання значень функції $f(x)$.

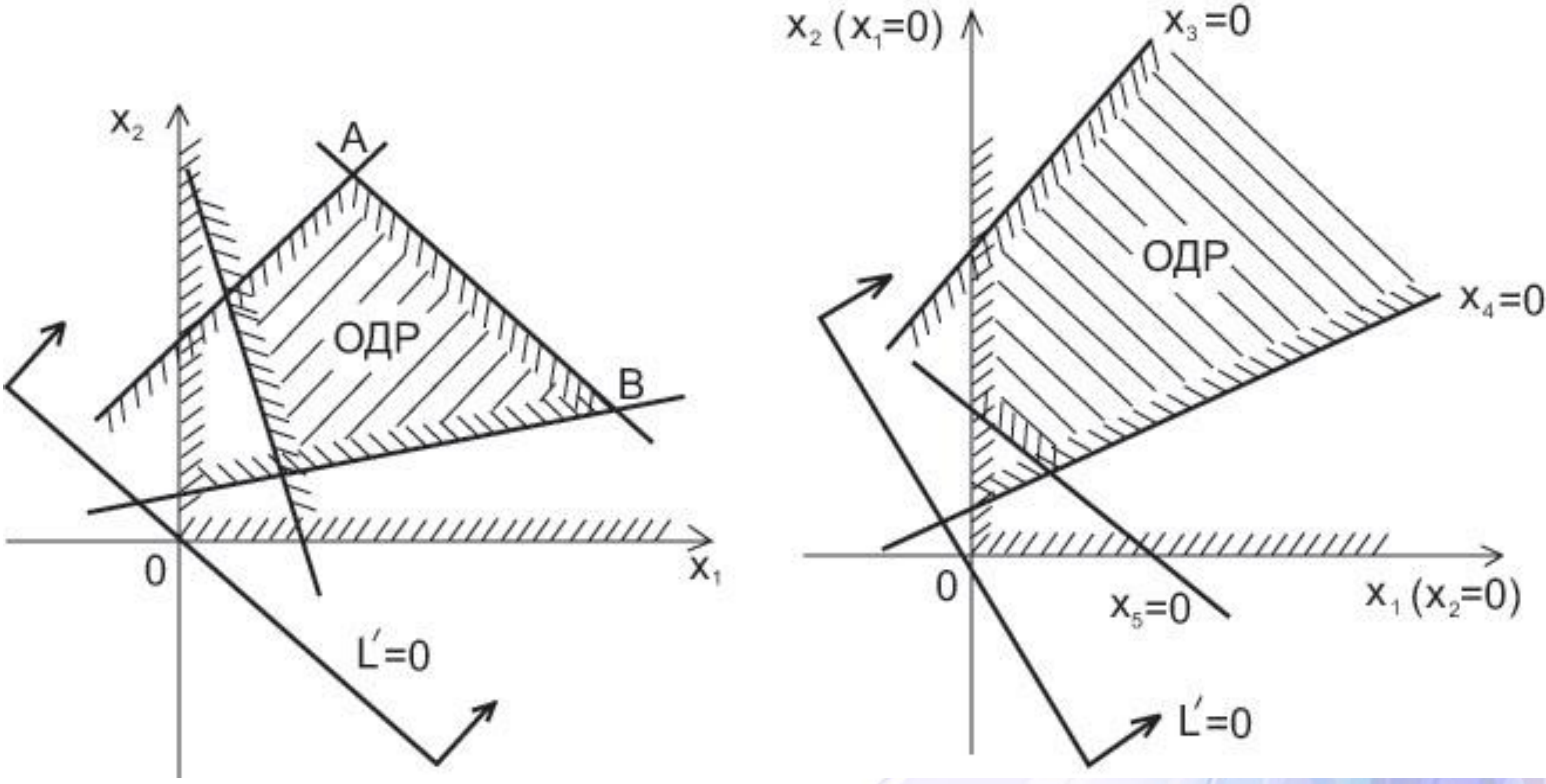


Рис. 1.9

2.4 Ідея симплекс-методу

$$f(x) = \gamma_0 - (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \ldots + \gamma_k x_k) \to \min$$

$$x_{k+1} = \beta_{k+1} - (\alpha_{k+1,1} x_1 + \alpha_{k+1,2} x_2 + \ldots + \alpha_{k+1,k} x_k)$$
$$x_{k+2} = \beta_{k+2} - (\alpha_{k+2,1} x_1 + \alpha_{k+2,2} x_2 + \ldots + \alpha_{k+2,k} x_k)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = \beta_n - (\alpha_{n,1} x_1 + \alpha_{n,2} x_2 + \ldots + \alpha_{n,k} x_k)\,.$$

$\tilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n):$ $\quad x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0\,;$ $\quad x_{k+1} = \beta_{k+1}\,;$ $x_{k+2} = \beta_{k+2}\,; \ldots;\ \ x_n = \beta_n\,.$

$(\forall i = \overline{k+1, n})(\beta_i \geq 0) \to \tilde{x}$ – опорне рішення.

$(\exists i : k+1 \leq i \leq n)(\beta_i < 0) \to \tilde{x}$ – недопустиме рішення.

Нехай $\beta_{i'} < 0$; $k + 1 \le i' \le n$.

Припустимо, $(\exists\, j^* : 1 \le j^* \le k)(\alpha_{i',j^*} < 0)$.

Тоді $(x_{j^*} \uparrow) \Rightarrow (x_{i'} \uparrow)$.

$$I_{j^*}^{(\pm)} = \{ i : (k+1 \le i \le n) \,\&\, [(\alpha_{i,j^*} < 0) \,\&\, (\beta_i < 0) \vee (\alpha_{i,j^*} > 0) \,\&\, (\beta_i >$$

Границя збільшення x_{j^*}:

$$0 = \beta_i - \alpha_{i,j^*} x_{j^*}^{\max}(i),$$

звідки

$$x_{j^*}^{\max}(i) = \frac{\beta_i}{\alpha_{i,j^*}}; \quad i \in I_{j^*}^{(\pm)}.$$

Вибір x_{i^*}:

$$\frac{\beta_{i^*}}{\alpha_{i^* j^*}} = \min\left\{ \frac{\beta_i}{\alpha_{ij^*}}; i \in I_{j^*}^{(\pm)} \right\}.$$

Заміна базисних змінних: $x_{i^*} \Leftrightarrow x_{j^*}$.

$$(\forall i = \overline{k+1,n})(\beta_i \geq 0) \,\&\, (\forall j = \overline{1,k})(\gamma_j \leq 0) \rightarrow \hat{x} \text{ – }$$

оптимальне рішення.

$$f_{opt} = \gamma_0 .$$

Нехай $(\exists j^* : 1 \leq j^* \leq k)(\gamma_{j^*} > 0)$.

Тоді

$$(x_{j^*} \uparrow) \Rightarrow [f(x) \downarrow].$$

$$I_{j^*}^{(+)} = \left\{ i : (k+1 \leq i \leq n) \,\&\, (\alpha_{i,j^*} > 0) \right\}.$$

$$\left(\neg \exists i : k+1 \leq i \leq n \right) (\alpha_{i,j^*} > 0) \rightarrow [f(x) \rightarrow -\infty]$$

Границя збільшення x_{j^*}:

$$0 = \beta_i - \alpha_{i,j^*} x_{j^*}^{\max}(i),$$

звідки

$$x_{j^*}^{\max}(i) = \frac{\beta_i}{\alpha_{i,j^*}}; \quad i \in I_{j^*}^{(+)}.$$

Вибір x_{i^*}:

$$\frac{\beta_{i^*}}{\alpha_{i^* j^*}} = \min\left\{\frac{\beta_i}{\alpha_{ij^*}}; i \in I_{j^*}^{(+)}\right\}.$$

Заміна базисних змінних: $x_{i^*} \Leftrightarrow x_{j^*}$.

2.5 Табличний алгоритм заміни базисних змінних

$$f(x) = \gamma_0 - (\gamma_1 x_1 + \ldots + \gamma_j x_j + \ldots + \gamma_k x_k) \to \min$$

$$x_{k+1} = \beta_{k+1} - (\alpha_{k+1,1} x_1 + \ldots + \alpha_{k+1,j} x_j + \ldots + \alpha_{k+1,k} x_k)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_i = \beta_i - (\alpha_{i,1} x_1 + \ldots + \alpha_{i,j} x_j + \ldots + \alpha_{i,k} x_k)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = \beta_n - (\alpha_{n,1} x_1 + \alpha_{n,2} x_2 + \ldots + \alpha_{n,k} x_k);$$

$$i = \overline{k+1, n}; \quad j = \overline{1, k}.$$

Заміна базисних змінних: $x_{i^*} \Leftrightarrow x_{j^*}$;

$$k + 1 \le i^* \le n; \quad 1 \le j^* \le k.$$

Дозволяючий рядок
Дозволяючий стовпчик
Дозволяючий елемент

	γ_0, β_i	x_1	$\ldots$	x_{j^*}	$\ldots$	x_k
$f(x)$	γ_0	γ_1		γ_{i^*}		γ_k
x_{k+1}	β_{k+1}	$\alpha_{k+1,1}$	$\ldots$	α_{k+1,j^*}	$\ldots$	$\alpha_{k+1,k}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_{i^*}	β_{i^*}	$\alpha_{i^*,1}$	$\ldots$	α_{i^*,j^*}	$\ldots$	$\alpha_{i^*,k}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_n	β_n	$\alpha_{n,1}$	$\ldots$	α_{n,j^*}	$\ldots$	$\alpha_{n,k}$

Приклад

$$f(x) = \gamma_0 - (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3) \to \min$$

$$x_4 = \beta_4 - (\alpha_{41} x_1 + \alpha_{42} x_2 + \alpha_{43} x_3)$$

$$x_5 = \beta_5 - (\alpha_{51} x_1 + \alpha_{52} x_2 + \alpha_{53} x_3)$$

$$x_6 = \beta_6 - (\alpha_{61} x_1 + \alpha_{62} x_2 + \alpha_{63} x_3)$$

$$x_j \geq 0\,;\; j = \overline{1,6}$$

$$x_2 \Leftrightarrow x_5$$

$$x_2 = \frac{\beta_5}{\alpha_{52}} - \left(\frac{\alpha_{51}}{\alpha_{52}} x_1 + \frac{1}{\alpha_{52}} x_5 + \frac{\alpha_{53}}{\alpha_{52}} x_3 \right)$$

$$x_4 = \left(\beta_4 - \frac{\alpha_{42}\beta_5}{\alpha_{52}} \right) - \left[\left(\alpha_{41} - \frac{\alpha_{42}\alpha_{51}}{\alpha_{52}} \right) x_1 - \left(\frac{\alpha_{42}}{\alpha_{52}} \right) x_5 + \left(\alpha_{43} - \frac{\alpha_{42}\alpha_{53}}{\alpha_{52}} \right) x_3 \right]$$

$$x_6 = \left(\beta_6 - \frac{\alpha_{62}\beta_5}{\alpha_{52}} \right) - \left[\left(\alpha_{61} - \frac{\alpha_{62}\alpha_{51}}{\alpha_{52}} \right) x_1 - \left(\frac{\alpha_{62}}{\alpha_{52}} \right) x_5 + \left(\alpha_{63} - \frac{\alpha_{62}\alpha_{53}}{\alpha_{52}} \right) x_3 \right]$$

$$f(x) = \left(\gamma_0 - \frac{\gamma_2\beta_5}{\alpha_{52}} \right) - \left[\left(\gamma_1 - \frac{\gamma_2\alpha_{51}}{\alpha_{52}} \right) x_1 - \left(\frac{\gamma_2}{\alpha_{52}} \right) x_5 + \left(\gamma_3 - \frac{\gamma_2\alpha_{53}}{\alpha_{52}} \right) x_3 \right]$$

Правила перетворення:

1) $\alpha_{i^*,j^*}^{H} = \dfrac{1}{\alpha_{i^*,j^*}^{C}};$

2) $\alpha_{i^*,j}^{H} = \dfrac{\alpha_{i^*,j}^{C}}{\alpha_{i^*,j^*}^{C}}; \quad j \in \{1, ..., k\} \setminus \{j^*\}; \quad \beta_{i^*}^{H} = \dfrac{\beta_{i^*}^{C}}{\alpha_{i^*,j^*}^{C}};$

3) $\alpha_{i,j^*}^{H} = -\dfrac{\alpha_{i,j^*}^{C}}{\alpha_{i^*,j^*}^{C}}; \quad i \in \{k+1, ..., n\} \setminus \{i^*\}; \quad \gamma_{j^*}^{H} = -\dfrac{\gamma_{j^*}^{C}}{\alpha_{i^*,j^*}^{C}};$

4) $\alpha_{i,j}^{H} = \alpha_{i,j}^{C} - \dfrac{\alpha_{i^*,j}^{C} \times \alpha_{i,j^*}^{C}}{\alpha_{i^*,j^*}^{C}}; \quad i \in \{k+1, ..., n\} \setminus \{i^*\}; \quad j \in \{1, ..., k\} \setminus \{j^*\};$

$$\beta_{i}^{H} = \beta_{i}^{C} - \frac{\beta_{i^*}^{C} \times \alpha_{i,j^*}^{C}}{\alpha_{i^*,j^*}^{C}}; \quad i \in \{k+1, ..., n\} \setminus \{i^*\};$$

$$\gamma_{0}^{H} = \gamma_{0}^{C} - \frac{\gamma_{j^*}^{C} \times \beta_{i^*}^{C}}{\alpha_{i^*,j^*}^{C}}; \quad \gamma_{j}^{H} = \gamma_{j}^{C} - \frac{\gamma_{j^*}^{C} \times \alpha_{i^*,j}^{C}}{\alpha_{i^*,j^*}^{C}}; \quad j \in \{1, ..., k\} \setminus \{j^*\}.$$

	γ_0, β_i	x_1	…	x_{j^*}	…	x_k
$f(x)$	$\gamma_0 - \dfrac{\beta_{i^*} \times \gamma_{j^*}}{\alpha_{i^*,j^*}}$	$\gamma_1 - \dfrac{\alpha_{i^*,1} \times \gamma_{j^*}}{\alpha_{i^*,j^*}}$		$-\dfrac{\gamma_{j^*}}{\alpha_{i^*,j^*}}$		$\gamma_k - \dfrac{\alpha_{i^*,k} \times \gamma_{j^*}}{\alpha_{i^*,j^*}}$
x_{k+1}	$\beta_{k+1} - \dfrac{\alpha_{k+1,j^*} \times \beta_{i^*}}{\alpha_{i^*,j^*}}$	$\alpha_{k+1,1} - \dfrac{\alpha_{i^*,1} \times \alpha_{k+1,j^*}}{\alpha_{i^*,j^*}}$	…	$-\dfrac{\alpha_{k+1,j^*}}{\alpha_{i^*,j^*}}$	…	$\alpha_{k+1,k} - \dfrac{\alpha_{i^*,k} \times \alpha_{k+1,j^*}}{\alpha_{i^*,j^*}}$
…	…	…	…	…	…	…
x_{i^*}	$\dfrac{\beta_{i^*}}{\alpha_{i^*,j^*}}$	$\dfrac{\alpha_{i^*,1}}{\alpha_{i^*,j^*}}$	…	$\dfrac{1}{\alpha_{i^*,j^*}}$	…	$\dfrac{\alpha_{i^*,k}}{\alpha_{i^*,j^*}}$
…	…	…	…	…	…	…
x_n	$\beta_n - \dfrac{\alpha_{n,j^*} \times \beta_{i^*}}{\alpha_{i^*,j^*}}$	$\alpha_{n,1} - \dfrac{\alpha_{i^*,1} \times \alpha_{n,j^*}}{\alpha_{i^*,j^*}}$	…	$-\dfrac{\alpha_{n,j^*}}{\alpha_{i^*,j^*}}$	…	$\alpha_{n,k} - \dfrac{\alpha_{i^*,k} \times \alpha_{n,j^*}}{\alpha_{i^*,j^*}}$

2.6 Знаходження опорного рішення

$$f(x) = \gamma_0 - (\gamma_1 x_1 + \ldots + \gamma_j x_j + \ldots + \gamma_k x_k) \to \min$$

$$x_{k+1} = \beta_{k+1} - (\alpha_{k+1,1} x_1 + \ldots + \alpha_{k+1,j} x_j + \ldots + \alpha_{k+1,k} x_k)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_i = \beta_i - (\alpha_{i,1} x_1 + \ldots + \alpha_{i,j} x_j + \ldots + \alpha_{i,k} x_k)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = \beta_n - (\alpha_{n,1} x_1 + \alpha_{n,2} x_2 + \ldots + \alpha_{n,k} x_k);$$

$$i = \overline{k+1, n}; \quad j = \overline{1, k}.$$

Рішення $\overset{\square}{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0; \;\; x_{k+1} = \beta_{k+1}; \quad x_{k+2} = \beta_{k+2}; \ldots; \quad x_n = \beta_n.$$

Припустимо, $(\exists\, i : k+1 \le i \le n)(\beta_i < 0)$.

ПРАВИЛА ВИБОРУ ДОЗВОЛЯЮЧОГО ЕЛЕМЕНТА

1) Вибирається рядок i' : $\beta_{i'} < 0$; $k+1 \le i' \le n$.

2) В рядку i' вибирається коефіцієнт $\alpha_{i',j^*} < 0$; $1 \le j^* \le k$ (дозволяючий стовпчик).

$$(\forall j = \overline{1,k})(\alpha_{i'j} \ge 0) \to \text{рішень немає.}$$

3) В дозволяючому стовпчику j^* виділяються елементи, які мають однакові знаки зі своїми вільними членами:

$$I_{j^*}^{(\pm)} = \left\{ i : (k+1 \le i \le n) \,\&\, \left[(\alpha_{i,j^*} < 0) \,\&\, (\beta_i < 0) \vee (\alpha_{i,j^*} > 0) \,\&\, (\beta_i > 0) \right] \right\}.$$

4) Обчислюються відношення

$$\frac{\beta_i}{\alpha_{ij^*}}; \quad i \in I_{j^*}^{(\pm)}.$$

5) В якості дозволяючого елемента обирається коефіцієнт $\alpha_{i^* j^*}$:

$$\frac{\beta_{i^*}}{\alpha_{i^* j^*}} = \min\left\{ \frac{\beta_i}{\alpha_{ij^*}}; i \in I_{j^*}^{(\pm)} \right\}.$$

Приклад

$$x_4 = 1 + x_1 + 2x_2 - x_3$$
$$x_5 = -5 + 2x_1 - x_2 + x_3$$
$$x_6 = 2 - x_1 - x_2$$
$$x_7 = 1 + x_2 - x_3$$

$$x_4 = 1 - (-x_1 - 2x_2 + x_3)$$
$$x_5 = -5 - (-2x_1 + x_2 - x_3)$$
$$x_6 = 2 - (x_1 + x_2)$$
$$x_7 = 1 - (-x_2 + x_3)$$

Приклад

		β_i	x_1 (р/ст.)	x_2	x_3	β_i / α_{ij}
	x_4	1	-1	-2	1	
$\rightarrow$	x_5	-5	-2	1	-1	5/2=2,5
р/стр.	x_6	2	1	1	0	2/1=2
	x_7	1	0	-1	1	

Заміна базиса: $x_1 \Leftrightarrow x_6$.

		β_i	x_6	x_2	x_3 (р/ст.)	β_i / α_{ij}
	x_4	3	1	-3	1	3/1=3
$\rightarrow$ р/стр.	x_5	-1	2	3	-1	-1/-1=1
	x_1	2	1	1	0	
	x_7	1	0	-1	1	1/1=1

Заміна базиса: $x_3 \Leftrightarrow x_5$.

	β_i	x_6	x_2	x_5
x_4	2	3	2	1
x_3	1	-2	-3	-1
x_1	2	1	1	0
x_7	0	2	2	1

Опорне рішення: $x_1 = 2$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$; $x_4 = 2$; $x_5 = 0$; $x_6 = 0$; $x_7 = 0$.

2.7 Пошук оптимального рішення

$$f(x) = \gamma_0 - (\gamma_1 x_1 + \ldots + \gamma_j x_j + \ldots + \gamma_k x_k) \to \min$$

$$x_{k+1} = \beta_{k+1} - (\alpha_{k+1,1} x_1 + \ldots + \alpha_{k+1,j} x_j + \ldots + \alpha_{k+1,k} x_k)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_i = \beta_i - (\alpha_{i,1} x_1 + \ldots + \alpha_{i,j} x_j + \ldots + \alpha_{i,k} x_k)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = \beta_n - (\alpha_{n,1} x_1 + \alpha_{n,2} x_2 + \ldots + \alpha_{n,k} x_k);$$

$$i = \overline{k+1, n}; \quad j = \overline{1, k}.$$

Рішення $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$;

$x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$; $x_{k+1} = \beta_{k+1}$; $x_{k+2} = \beta_{k+2}; \ldots;$ $x_n = \beta_n$;

$$(\forall i = \overline{k+1, n})(\beta_i \geq 0).$$

$(\exists\forall j : 1 \leq j \leq k)(\gamma_j \leq 0) \Rightarrow x$ – оптимальне рішення.

Припустимо, $(\exists j : 1 \leq j \leq k)(\gamma_j > 0)$.

ПРАВИЛА ВИБОРУ ДОЗВОЛЯЮЧОГО ЕЛЕМЕНТА

1) Вибирається дозволяючий стовпчик $j^*: \gamma_{j^*} > 0$.

2) В дозволяючому стовпчику j^* виділяються від'ємні елементи:

$$I_{j^*}^{(+)} = \{i : (k+1 \le i \le n) \,\&\, (\alpha_{ij^*} > 0)\}.$$

$[\forall i : (k+1 \le i \le n)](\alpha_{ij^*} \le 0) \rightarrow$ $f(x)$ необмежена знизу

3) Обчислюються відношення

$$\frac{\beta_i}{\alpha_{ij^*}}; \quad i \in I_{j^*}^{(+)}.$$

4) В якості дозволяючого елементу вибирається коефіцієнт $\alpha_{i^* j^*}$:

$$\frac{\beta_{i^*}}{\alpha_{i^* j^*}} = \min\left\{\frac{\beta_i}{\alpha_{ij^*}}; i \in I_{j^*}^{(+)}\right\}.$$

Приклад

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x_1 - 2x_2 - x_3 \to \min \\
x_4 &= 2 - x_1 - x_2 + 2x_3 \\
x_5 &= 1 - x_1 + x_2 - x_3 \\
x_6 &= 2 - x_2 - x_3 \\
x_i &\ge 0; \quad i = \overline{1,6}\,.
\end{aligned}
$$

Стандартна форма:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 0 - (-x_1 + 2x_2 + x_3) \to \min \\
x_4 &= 2 - (x_1 + x_2 - 2x_3) \\
x_5 &= 1 - (x_1 - x_2 + x_3) \\
x_6 &= 2 - (x_2 + x_3) \\
x_i &\ge 0; \quad i = \overline{1,6}\,.
\end{aligned}
$$

					р/ст.	
		$\gamma_0,\ \beta_i$	x_1	x_2	x_3	β_i / α_{ij}
	$f(x)$	0	-1	2	1	
	x_4	2	1	1	-2	
р/стр.	x_5	1	1	-1	1	1/1=1
	x_6	5	0	1	1	5/1=5

1) Заміна базиса: $x_5 \Leftrightarrow x_3$.

				р/ст.		
		γ_0, β_i	x_1	x_2	x_5	β_i / α_{ij}
	$f(x)$	-1	-2	3	-1	
	x_4	4	3	-1	2	
	x_3	1	1	-1	1	
р/стр.	x_6	4	-1	2	-1	4/2=2

2) Заміна базиса: $x_6 \Leftrightarrow x_2$.

					р/ст.	
		γ_0, β_i	x_1	x_6	x_5	β_i / α_{ij}
	$f(x)$	-7	-1/2	-3/2	1/2	
р/стр.	x_4	6	5/2	1/2	3/2	6/(3/2)=4
	x_3	3	1/2	1/2	1/2	3/(1/2)=6
	x_2	2	-1/2	1/2	-1/2	

3) Заміна базиса: $x_4 \Leftrightarrow x_5$.

	γ_0, β_i	x_1	x_6	x_4
$f(x)$	-9	-4/3	-5/3	-1/3
x_5	4	5/3	1/3	2/3
x_3	1	-1/3	1/3	-1/3
x_2	4	1/3	2/3	1/3

Оптимальний розв’язок:

$x_1 = 0$; $x_2 = 4$; $x_3 = 1$; $x_4 = 0$; $x_5 = 4$; $x_6 = 0$; $f_{opt} = -9$.

Тема 3. Цілочисельне програмування

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min\,;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i\,;\quad i=\overline{1,m}\,;$$

$$x_j \geq 0\,;\quad x_j \text{ – ціле};\quad j=\overline{1,n}\,.$$

3.1 Метод відсікання (відсікаючих площин) Р.Гоморі

Таблична форма:

$$x_i = \beta_i - \sum_{j \in J^C} \alpha_{ij} x_j; \quad i \in I^B.$$

Нехай $x_{i'} = \beta_{i'} \neq ціле$; $i' \in I^B$.

$[\alpha_{ij}]$, $[\beta_i]$ – найбільші цілі:

$$[\alpha_{ij}] \leq \alpha_{ij}; \ [\beta_i] \leq \beta_i.$$

Формування відсікаючого обмеження

$$x_{i'} + \sum_{j \in J^C} \alpha_{i'j} x_j = \beta_{i'} . \qquad (3.1)$$

$$\sum_{j \in J^C} [\alpha_{i'j}] x_j \le \sum_{j \in J^C} \alpha_{i'j} x_j ;$$

$$x_{i'} + \sum_{j \in J^C} [\alpha_{i'j}] x_j \le \beta_{i'}$$

$$x_{i'} + \sum_{j \in J^C} [\alpha_{i'j}] x_j \le [\beta_{i'}] . \qquad (3.2)$$

Після віднімання (3.2) від (3.1):

$$\sum_{j\in J^C} \alpha_{i'j}\, x_j - \sum_{j\in J^C} [\alpha_{i'j}] x_j \geq \beta_{i'} - [\beta_{i'}];$$

$$\sum_{j\in J^C} (\alpha_{i'j} - [\alpha_{i'j}]) x_j \geq \beta_{i'} - [\beta_{i'}].$$

$$\mu_{ij} = \alpha_{ij} - [\alpha_{ij}]; \quad j \in J^C; \quad 0 \leq \mu_{ij} < 1;$$

$$\nu_i = \beta_i - [\beta_i]; \quad 0 < \nu_i < 1.$$

Відсікаюче обмеження:

$$\sum_{j\in J^C} \mu_{i'j} x_j \geq \nu_{i'}.$$

Перетворення в рівняння:

$$\sum_{j \in J^C} \mu_{i'j} x_j - x_{n+1} = \nu_{i'}; \quad x_{n+1} \geq 0;$$

$$x_{n+1} = -\nu_{i'} + \sum_{j \in J^C} \mu_{i'j} x_j . \quad (3.3)$$

Лемма. Якщо відсікання (3.3) додається до симплексної таблиці задачі лінійного програмування, то ніякі цілочисельні допустимі точки не виключаються. Нова таблиця є допустимою, якщо $\beta_{i'}$ – ціле число, та недопустимою в противному випадку.

Приклад

$$f(x) = -7x_1 - 9x_2 \to \min$$

$$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$

$$7x_1 + x_2 + x_4 = 35$$

$$x_j \ge 0\,; \quad x_j - \textit{ціле}; \quad j = \overline{1,\,4}\,.$$

Перетворена система обмежень:

$$x_3 = 6 + x_1 - 3x_2$$

$$x_4 = 35 - 7x_1 - x_2$$

Вихідна симплексна таблиця №1 послабленої задачі:

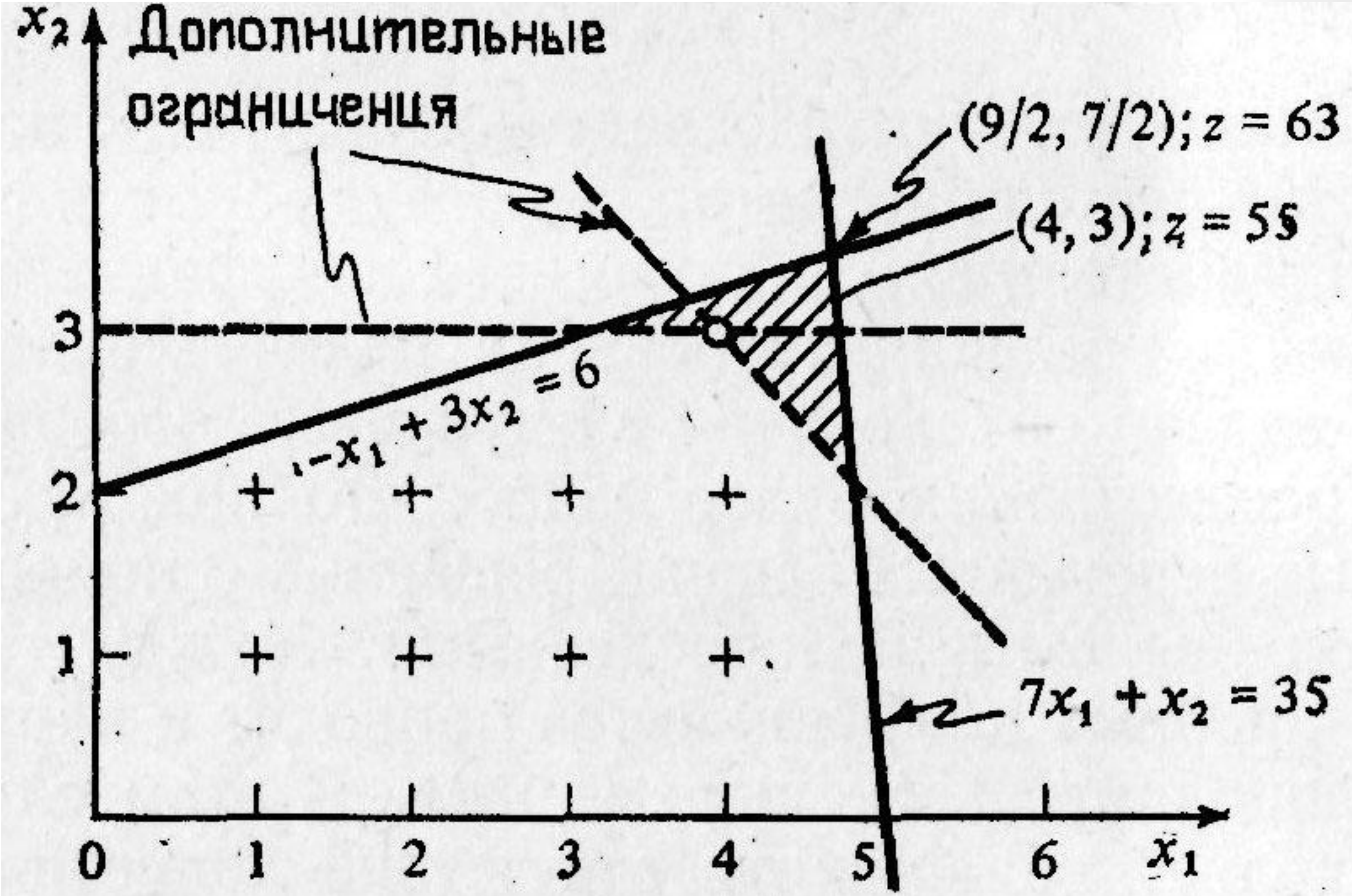
	γ_0, β_i	x_1	x_2
$f(x)$	0	7	9
x_3	6	-1	3
x_4	35	7	1

Кінцева симплексна таблиця №2 послабленої задачі:

	γ_0, β_i	x_4	x_3
$f(x)$	-63	15/11	28/11
x_2	7/2	1/22	7/22
x_1	9/2	3/22	-1/22

Розв’язок послабленої задачі:

$$x_1 = 4.5\,; \quad x_2 = 3.5\,; \quad x_3 = x_4 = 0\,; \quad f_{\min} = -63\,.$$



Дополнительные
ограничения
(9/2, 7/2); z = 63
(4, 3); z = 55
$-x_1 + 3x_2 = 6$
$7x_1 + x_2 = 35$
x_2
x_1
0
1
2
3
4
5
6

$$x_2 = \frac{7}{2} - \left(\frac{1}{22} x_4 + \frac{7}{22} x_3 \right)$$

$$\beta_2 = 3\frac{1}{2}; \quad [\beta_2] = 3; \quad \nu_2 = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_{24} = \frac{1}{22}; \quad [\alpha_{24}] = 0; \quad \mu_{24} = \frac{1}{22}$$

$$\alpha_{23} = \frac{7}{22}; \quad [\alpha_{23}] = 0; \quad \mu_{23} = \frac{7}{22}$$

Рівняння відсікання для x_2:

$$x_5 = -\frac{1}{2} + \frac{7}{22} x_3 + \frac{1}{22} x_4 .$$

$$x_5 = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{22} x_4 - \frac{7}{22} x_3 \right)$$

Початкова симплексна таблиця №3, доповнена відсіканням для x_2:

	γ_0, β_i	x_4	x_3
$f(x)$	-63	15/11	28/11
x_2	7/2	1/22	7/22
x_1	9/2	3/22	-1/22
x_5	-1/2	-1/22	-7/22

Кінцева симплексна таблиця №4, доповнена відсіканням для x_2:

	γ_0, β_i	x_4	x_5
$f(x)$	-59	1	8
x_2	3	0	1
x_1	32/7	1/7	-1/7
x_3	11/7	1/7	-22/7

Розв’язок задачі, доповненої відсіканням для x_2:

$$x_1 = 32/7; \quad x_2 = 3; \quad x_2 = 11/7; \quad x_4 = 0; \quad f_{\min} = -59.$$

$$x_1 = \frac{32}{7} - \left(\frac{1}{7} x_4 - \frac{1}{7} x_5 \right)$$

$$\beta_1 = 4\frac{4}{7}; \quad [\beta_1] = 4; \quad \nu_1 = \frac{4}{7}$$

$$\alpha_{14} = \frac{1}{7}; \quad [\alpha_{14}] = 0; \quad \mu_{14} = \frac{1}{7}$$

$$\alpha_{15} = -\frac{1}{7}; \quad [\alpha_{15}] = -1; \quad \mu_{15} = -\frac{1}{7} - (-1) = \frac{6}{7}$$

Рівняння відсікання для x_1:

$$x_6 = -\frac{4}{7} + \frac{1}{7} x_4 + \frac{6}{7} x_5 .$$

$$x_6 = -\frac{4}{7} - \left(-\frac{1}{7} x_4 - \frac{6}{7} x_5 \right)$$

Початкова симплексна таблиця №5, доповнена відсіканням для x_1:

	γ_0, β_i	x_4	x_5
$f(x)$	-59	1	8
x_2	3	0	1
x_1	32/7	1/7	-1/7
x_3	11/7	1/7	-22/7
x_6	-4/7	-1/7	-6/7

Кінцева симплексна таблиця №6, доповнена відсіканням для x_1:

	γ_0, β_i	x_6	x_5
$f(x)$	-55	7	2
x_2	3	0	1
x_1	4	1	-1
x_3	1	1	-4
x_4	4	-7	6

Розв’язок вихідної (цілочисельної) задачі:

$$x_1 = 4;\quad x_2 = 3;\quad x_3 = 1;\quad x_4 = 4;\quad f_{\min} = -55.$$

3.2 Метод гілок та границь

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min\,; \qquad (3.4)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i\,; \quad i=\overline{1,m}\,; \qquad (3.5)$$

$$0 \le x_j \le d_j\,; \quad x_j \text{ – ціле}; \quad j=\overline{1,n}\,. \qquad (3.6)$$

Кількість планів (варіантів розв’язку задачі) $\vec{x}=(x_j \,|\, j=\overline{1,n})$:

$$|G|=\prod_{j=1}^{n}(d_j+1)\,.$$

Приклад

$$0 \le x_1 \le 3;\ 0 \le x_2 \le 1;\ 0 \le x_3 \le 2.$$

$$|G| = 4 \times 2 \times 3 = 24;$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(x_{i'} = \beta_{i'} \neq \text{ціле}) \Rightarrow \text{розбивання } G:$$

$$G_1 \subset G: \quad x_{i'} \leq [\beta_{i'}];$$

$$G_2 \subset G: \quad x_{i'} \geq [\beta_{i'}] + 1; \quad G_1 \cap G_2 = \varnothing.$$

Додаткові обмеження:

$$\text{для } G_1: \quad x_{n+1} = [\beta_{i'}] - x_{i'}; \quad x_{n+1} \geq 0;$$

$$\text{для } G_2: \quad x_{n+1} = -[\beta_{i'}] - 1 + x_{i'}; \quad x_{n+1} \geq 0.$$

На k -му кроці:

$$G_\mu^{(k)}; \quad \mu = \overline{1, \lambda_k}.$$

$$x_\mu^{(k)} = \arg \min_{x \in G_\mu^{(k)}} f(x);$$

$$\xi(G_\mu^{(k)}) = f(x_\mu^{(k)}); \quad \mu = \overline{1, \lambda_k};$$

$$x^* = (x_j^* \mid j = \overline{1, n}); \quad (\forall j = \overline{1, n})(x_j - \text{ціле}).$$

Алгоритм

1. Перевірка на оптимальність:

$$f(x^*) \le \min\{\xi(G_\mu^{(k)} \,\big|\, \mu = \overline{1, \lambda_k}\}\,.$$

2. Перевірка умови завершення обчислень.

3. Вибір $G_{\mu^*}^{(k)}$:

$$\xi(G_{\mu^*}^{(k)}) = \min\,\{\xi(G_\mu^{(k)}) \,\big|\, \mu = \overline{1, \lambda_k}\}\,.$$

4. Розбиття $G_{\mu^*}^{(k)}$ на $G_{\mu^*,1}^{(k)}$ та $G_{\mu^*,2}^{(k)}$:

$$G_{\mu^*,1}^{(k)}: \quad x_{n+1} = [\beta_{i^*}] - x_{i^*}; \quad x_{n+1} \ge 0\,;$$

$$G_{\mu^*,2}^{(k)}: \quad x_{n+1} = -[\beta_{i^*}] - 1 + x_{i^*}\,; \quad x_{n+1} \ge 0\,.$$

5. Розв’язок послаблених задач ЛП над $G_{\mu^*,1}^{(k)}$ та $G_{\mu^*,2}^{(k)}$

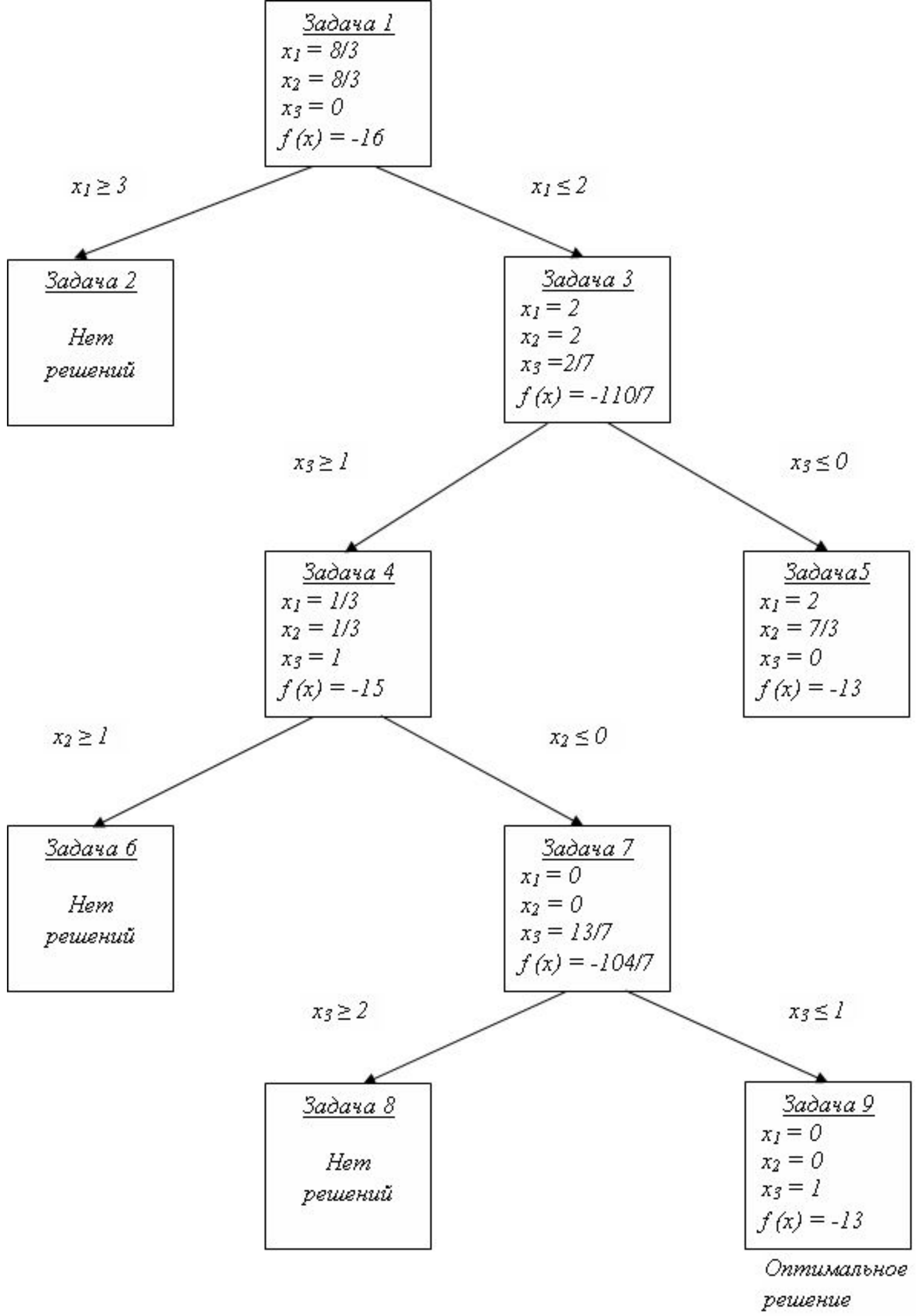
Приклад

$$f(x) = -3x_1 - 3x_2 - 13x_3 \to \min$$

$$x_4 = 8 + 3x_1 - 6x_2 - 7x_3$$

$$x_5 = 8 - 6x_1 + 3x_2 - 7x_3$$

$$0 \le x_j \le 5\,; \quad x_j - ціле\,; \quad j = \overline{1,3}\,; \quad x_4 \ge 0\,; \quad x_5 \ge 0\,.$$


Задача 1
x1 = 8/3
x2 = 8/3
x3 = 0
f (x) = -16
x1 ≥ 3
x1 ≤ 2
Задача 2
Нет решений
Задача 3
x1 = 2
x2 = 2
x3 =2/7
f (x) = -110/7
x3 ≥ 1
x3 ≤ 0
Задача 4
x1 = 1/3
x2 = 1/3
x3 = 1
f (x) = -15
Задача5
x1 = 2
x2 = 7/3
x3 = 0
f (x) = -13
x2 ≥ 1
x2 ≤ 0
Задача 6
Нет решений
Задача 7
x1 = 0
x2 = 0
x3 = 13/7
f (x) = -104/7
x3 ≥ 2
x3 ≤ 1
Задача 8
Нет решений
Задача 9
x1 = 0
x2 = 0
x3 = 1
f (x) = -13
Оптимальное решение

3.3 Комбінаторна оптимізація

$$f(x) = \sum_{i \in I_0} c_i x_i \to \max ; \qquad (3.7)$$

$$\sum_{i \in I_j} a_{ji} x_i \le b_j ; \quad j = \overline{1, n} \ ; \qquad (3.8)$$

$$x = (x_i \mid i = \overline{1, m}) ; \ x_i \in \{0, 1\} ; \quad i = \overline{1, m} .$$

$$G = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m ;$$

$$X_i = \{0, 1\} ; \quad i = \overline{1, m} ; \quad |G| = 2^m .$$

Підмножини варіантів: $G_k;\ k=\overline{1,\lambda}$.

Частковий план підмножини G_k:

$$x^C(k)=(x_i \mid i\in I_k^0 \cup I_k^1)\ ,$$

$$(\forall i\in I_k^0)(x_i=0)\,\&\,(\forall i\in I_k^1)(x_i=1)\,.$$

Доповнюючий план підмножини G_k:

$$x^D(k)=(x_i \mid i\in I_k)\ ,$$

$$(\forall i\in I_k)(x_i\in\{0,1\})\,.$$

Активні обмеження: $J_k\subseteq\{1,\ldots,n\}$.

Модель, приведена у відповідність k-тій підмножині варіантів:

$$f_k(x) = \sum_{i \in I_{0k}} c_i x_i + c_k^1 \to \max ; \tag{3.9}$$

$$\sum_{i \in I_{jk}} a_{ji} x_i \le b_{jk} ; \; j \in J_k ; \tag{3.10}$$

$$x = (x_i \,|\, i \in I_k) ; \; x_i \in \{0, 1\} ; \; i \in I_k .$$

$$I_{0k}^{0} = I_0 \cap I_k^{0}; \quad I_{0k}^{1} = I_0 \cap I_k^{1}; \quad I_{0k} = I_0 \cap I_k;$$

$$I_{jk}^{0} = I_j \cap I_k^{0}; \quad I_{jk}^{1} = I_j \cap I_k^{1}; \quad I_{jk} = I_j \cap I_k; \quad j = \overline{1, n};$$

$$c_k^{1} = \sum_{i \in I_{0k}^{1}} c_i \quad ;$$

$$b_{jk} = b_j - \sum_{i \in I_{jk}^{1}} a_{ij} \quad , \; j \in J_k \, .$$

Підмножини та величини, необхідні для дослідження моделі (3.9)-(3.10):

$$I_{0k}^{3} = \left\{ i \in I_{0k} : c_i > 0 \right\};$$

$$I_{jk}^{2} = \left\{ i \in I_{jk} : a_{ji} < 0 \right\}; \quad I_{jk}^{3} = \left\{ i \in I_{jk} : a_{ji} > 0 \right\};$$

$$I_{jk}^{2}(i') = \left\{ i' \right\} \cup \left\{ i \in I_{jk}^{2} : a_{ji} \le a_{ji'} \right\};$$

$$I_{jk}^{3}(i'') = \left\{ i'' \right\} \cup \left\{ i \in I_{jk}^{3} : a_{ji} \ge a_{ji''} \right\};$$

$$s_{jk}^{(p)} = \sum_{i \in I_{jk}^{p}} a_{ji}; \quad p \in \left\{ 2, 3 \right\}; \; j \in J_k;$$

$$\xi(G_k) = c_k^1 + \sum_{i \in I_{0k}^{3}} c_i; \quad k = \overline{1, \lambda}.$$

Аналіз підмножин варіантів

Твердження 1. Підмножина G_k не містить допустимих планів, якщо для деякого обмеження $j \in J_k$ виконується умова:

$$(I_{jk}^2 = \varnothing) \,\&\, (b_{jk} < 0) \vee (I_{jk}^2 \neq \varnothing) \,\&\, (s_{jk}^{(2)} > b_{jk}).$$

Приклади.

a) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le -1$;

b) $-3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 7x_4 + 4x_5 \le -9$.

Твердження 2. Обмеження $j \in J_k$ не є активним по відношенню до планів підмножини G_k, якщо для нього виконується умова:

$$(I_{jk}^3 = \varnothing) \,\&\, (b_{jk} \geq 0) \vee (I_{jk}^3 \neq \varnothing) \,\&\, (s_{jk}^{(3)} \leq b_{jk}).$$

Приклади.

a) $-x_1 - 2x_2 - 3x_3 \leq 1$;

b) $3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 7x_4 - 4x_5 \leq 9$.

Твердження 3. Якщо $I_{jk}^2 \neq \varnothing \quad (j \in J_k)$ та для деякого $i' \in I_{jk}^2$ виконується умова

$$s_{jk}^{(2)} \leq b_{jk} < s_{jk}^{(2)} - a_{ji'},$$

то з доповнюючих планів підмножини G_k допустимими можуть бути тільки ті, в яких $\left[\forall i \in I_{jk}^2(i')\right]\left[x_i = 1\right]$.

Приклад.

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 4x_5 - 7x_6 \leq -11.$$

$$i' = 4; \quad a_{ji'} = -5; \quad x_4 = x_6 = 1.$$

Твердження 4. Якщо $I_{jk}^3 \neq \varnothing \quad (j \in J_k)$ та для деякого $i'' \in I_{jk}^3$ виконується умова:

$$(I_{jk}^2 = \varnothing) \,\&\, (0 \leq b_{jk} < a_{ji''}) \vee (I_{jk}^2 \neq \varnothing) \,\&\, (s_{jk}^{(2)} \leq b_{jk} < s_{jk}^{(2)} + a_{ji''}),$$

то з доповнюючих планів підмножини G_k допустимими можуть бути лише ті, в яких $[\forall i \in I_{jk}^3(i'')][x_i = 0]$.

Приклади.

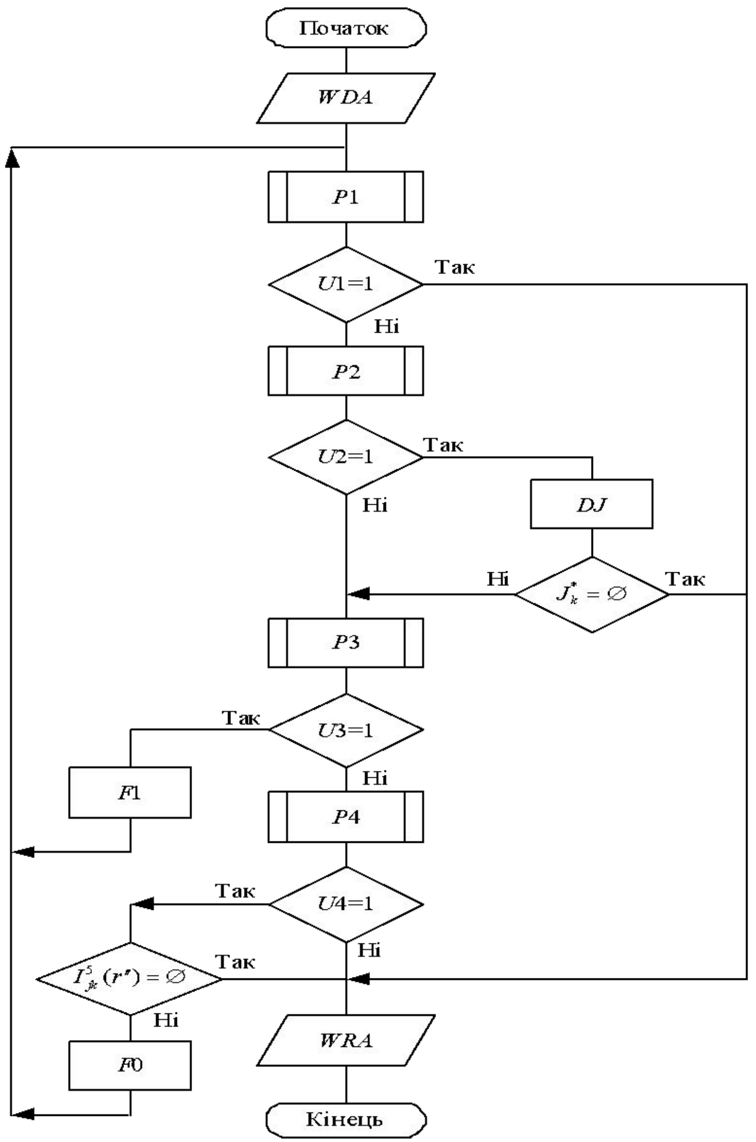
a) $x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 11x_4 + 13x_5 \leq 9$;

$i'' = 4$; $\quad a_{ji''} = 7$; $\quad x_4 = x_5 = 0$;

b) $-x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 - 9x_5 + 13x_6 \leq -9$.

$i'' = 4$; $\quad a_{ji''} = 7$; $\quad x_4 = x_6 = 0$.

Схема алгоритму аналізу підмножини варіантів



ФУНКЦІЇ БЛОКІВ

WDA – ввід вхідних даних;
WRA – вивід результатів аналізу підмножини G_k;
$P1$, $P2$, $P3$, $P4$ – перевірка виконання умов тверджень 1, 2, 3 та 4 відповідно;
$U1$, $U2$, $U3$, $U4$ – фіксація факту виконання $(UN = 1)$ або невиконання $(UN = 0)$ N-го твердження; $N = \overline{1,4}$;
$F1$, $F0$ – привласнення безальтернативним змінним значення 1 та 0 відповідно, перетворення аналізованої системи обмежень;
DJ – видалення номерів обмежень, що втратили властивість активності.

Алгоритм

1. Вибір підмножини варіантів $G_{k^*};\ 1 \le k^* \le \lambda$, яка підлягає розбиттю:

$$\xi(G_{k^*}) = \max\left\{\xi(G_k);\quad k = \overline{1,\lambda}\right\}.$$

2. Вибір незалежної змінної $x_{i^*};\ \ i^* \in I_{k^*}$, значення якої підлягає фіксації:

$$c_{i^*} = \max\{c_i;\quad i \in I_{ok^*}\}.$$

3. Розбиття підмножини варіантів G_{k^*}:

$$(G_{k^*} \mid x_{i^*} = 0) \Rightarrow G^0_{k^*};$$

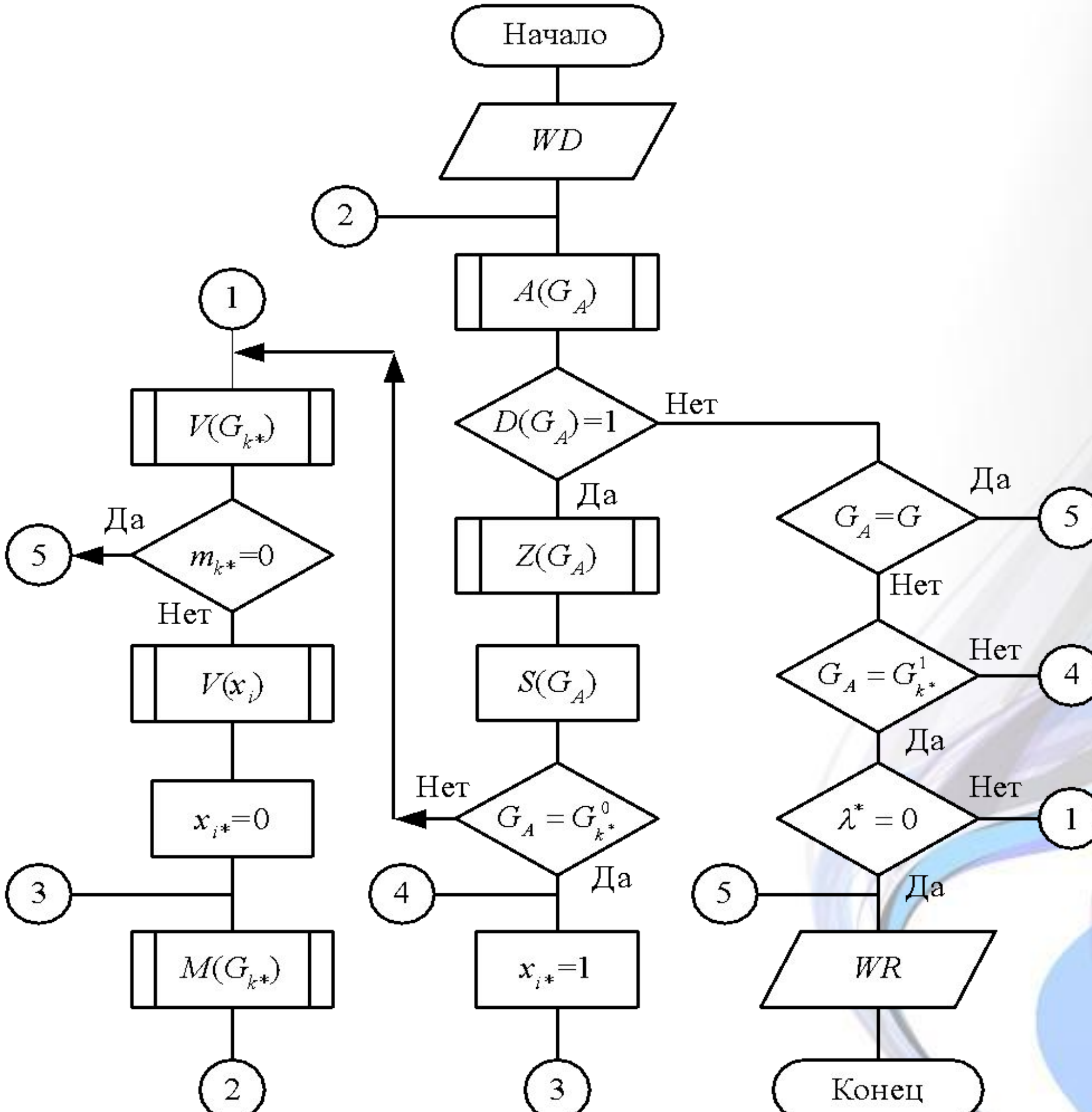
$$(G_{k^*} \mid x_{i^*} = 1) \Rightarrow G^1_{k^*}.$$

4. Аналіз підмножин $G^0_{k^*}$ та $G^1_{k^*}$.

5. Перевірка допустимих планів на оптимальність:

$$\max\left\{f(x);\ x \in X^*\right\} \ge \max\left\{\xi(G_k);\quad k = \overline{1,\lambda^*}\right\};$$

$$x^* = \arg\ \max\left\{f(x);\ x \in X^*\right\}.$$



Начало
WD
2
A(G_A)
D(G_A)=1
Нет
Да
Z(G_A)
S(G_A)
G_A = G^0_{k*}
Нет
Да
4
x_{i*}=1
3
1
V(G_{k*})
m_{k*}=0
Да
5
Нет
V(x_i)
x_{i*}=0
3
M(G_{k*})
2
G_A=G
Да
5
Нет
G_A = G^1_{k*}
Нет
4
Да
λ* = 0
Нет
1
Да
5
WR
Конец

ФУНКЦІЇ БЛОКІВ (1)

WD – ввід вхідних даних;
WR – вивід результатів обчислень;
MDP – фіксація часткових планів та оцінок цільової функції підмножин варіантів;
$A(G_A)$ – аналіз множини варіантів G_A (G, $G^0_{k^*}$ або $G^1_{k^*}$);
$D(G_A)$ – фіксація показника наявності $(D(G_A)=1)$ або відсутності $(D(G_A)=0)$ припустимих планів в підмножині G_A;
$Z(G_A)$ – обчислення оцінки цільової функції на G_A;

ФУНКЦІЇ БЛОКІВ (2)

$S(G_A)$ – занесення оцінки цільової функції та часткового плану даної підмножини варіантів G_A у масив MDP;

$M(G_{k^*})$ – перетворення математичної модель, що відповідає підмножині G_{k^*}, до виду, адекватному підмножині $G_{k^*}^1$;

$V(G_{k^*})$ – вибір підмножини варіантів для подальшого розбиття;

$V(x_{i^*})$ – вибір незалежної змінної x_{i^*}, $i^* \in I_{k^*}$ для привласнення конкретних значень.

Приклад.

$$f(x) = -2x_1 + 5x_2 - 7x_3 + 3x_4 - 4x_5 + x_6 - 6x_7 \to \max$$

$$-2x_1 + 6x_2 - 5x_3 \le 0 \qquad (1)$$

$$-3x_1 + 7x_4 + 5x_5 \le 7 \qquad (2)$$

$$-7x_2 + 8x_5 - 4x_6 \le -3 \qquad (3)$$

$$4x_1 - 2x_2 + x_7 \le 2 \qquad (4)$$

$$2x_2 - 9x_5 - 7x_7 \le -5 \qquad (5)$$

$$x_i \in \{0, 1\}; \quad i = \overline{1, 7}$$

<u>Крок 1.</u>

<u>Розбиття</u> G:

$$G_1 \subset G: \quad x_2 = 0; \quad \xi(G_1) = 4;$$

$$G_2 \subset G: \quad x_2 = 1; \quad \xi(G_2) = 9.$$

Аналіз G_2 :

$$f_2(x) = 5 - 2x_1 - 7x_3 + 3x_4 - 4x_5 + x_6 - 6x_7 \to \max$$

$$-2x_1 - 5x_3 \le -6 \qquad (1)$$

$$-3x_1 + 7x_4 + 5x_5 \le 7 \qquad (2)$$

$$8x_5 - 4x_6 \le 4 \qquad (3)$$

$$4x_1 + x_7 \le 4 \qquad (4)$$

$$-9x_5 - 7x_7 \le -7 \qquad (5)$$

$$x_i \in \{0, 1\}\,; \quad i \in \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$\xi(G_2) = 9$.

З обмеження (1): $x_1 = x_3 = 1$.

Після підстановки $x_1 = x_3 = 1$:

$$f_2(x) = -4 + 3x_4 - 4x_5 + x_6 - 6x_7 \to \max$$

$$7x_4 + 5x_5 \le 10 \qquad (2)$$

$$8x_5 - 4x_6 \le 4 \qquad (3)$$

$$x_7 \le 0 \qquad (4)$$

$$-9x_5 - 7x_7 \le -7 \qquad (5)$$

$$x_i \in \{0, 1\}; \quad i \in \{4, 5, 6, 7\}$$

$\xi(G_2) = 0$.

З обмеження (4): $x_7 = 0$.

Після підстановки $x_7 = 0$:

$$f_2(x) = -4 + 3x_4 - 4x_5 + x_6 \to \max$$

$$7x_4 + 5x_5 \le 10 \qquad (2)$$

$$8x_5 - 4x_6 \le 4 \qquad (3)$$

$$-9x_5 \le -7 \qquad (5)$$

$$x_i \in \{0, 1\}; \quad i \in \{4, 5, 6\}$$

$\xi(G_2) = 0$.

З обмеження (5): $x_5 = 1$.

Після підстановки $x_5 = 1$:

$$f_2(x) = -8 + 3x_4 + x_6 \to \max$$

$$7x_4 \le 5 \qquad (2)$$

$$-4x_6 \le -4 \qquad (3)$$

$$x_i \in \{0, 1\}; \quad i \in \{4, 6\}$$

$\xi(G_2) = -4$.

З обмеження (2): $x_4 = 0$.

Після підстановки $x_4 = 0$:

$$\begin{gathered} f_2(x) = -8 + x_6 \to \max \\ -4x_6 \le -4 \\ x_i \in \{0, 1\}; \quad i \in \{6\} \end{gathered} \tag{3}$$

$\xi(G_2) = -7$.

З обмеження (3): $x_6 = 1$.

Після підстановки $x_6 = 1$:

$x = (1, 1, 1, 0, 1, 1, 0)$; $\quad \xi(G_2) = f(x) = -7$.

<u>Аналіз</u> G_1:

$$f_1(x) = -2x_1 - 7x_3 + 3x_4 - 4x_5 + x_6 - 6x_7 \to \max$$

$$-2x_1 - 5x_3 \le 0 \qquad (1)$$

$$-3x_1 + 7x_4 + 5x_5 \le 7 \qquad (2)$$

$$8x_5 - 4x_6 \le -3 \qquad (3)$$

$$4x_1 + x_7 \le 2 \qquad (4)$$

$$-9x_5 - 7x_7 \le -5 \qquad (5)$$

$$x_i \in \{0, 1\}; \quad i \in \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$\xi(G_2) = 4$.

Обмеження (1) – не активне.
З обмеження (3): $x_6 = 1$.

Після підстановки $x_6 = 1$:

$$f_1(x) = 1 - 2x_1 - 7x_3 + 3x_4 - 4x_5 - 6x_7 \to \max$$

$$-3x_1 + 7x_4 + 5x_5 \le 7 \qquad (2)$$

$$8x_5 \le 1 \qquad (3)$$

$$4x_1 + x_7 \le 2 \qquad (4)$$

$$-9x_5 - 7x_7 \le -5 \qquad (5)$$

$$x_i \in \{0, 1\}; \quad i \in \{1, 3, 4, 5, 7\}$$

$\xi(G_2) = 4$.

З обмеження (3): $x_5 = 0$.

Після підстановки $x_5 = 0$:

$$f_1(x) = 1 - 2x_1 - 7x_3 + 3x_4 - 6x_7 \to \max$$

$$-3x_1 + 7x_4 \le 7 \qquad (2)$$

$$4x_1 + x_7 \le 2 \qquad (4)$$

$$-7x_7 \le -5 \qquad (5)$$

$$x_i \in \{0, 1\}; \quad i \in \{1, 3, 4, 7\}$$

$\xi(G_2) = 4$.

З обмеження (5): $x_7 = 1$.

Після підстановки $x_7 = 1$:

$$f_1(x) = -5 - 2x_1 - 7x_3 + 3x_4 \to \max$$

$$-3x_1 + 7x_4 \le 7 \qquad (2)$$

$$4x_1 \le 1 \qquad (4)$$

$$x_i \in \{0, 1\}; \quad i \in \{1, 3, 4\}$$

$\xi(G_2) = -2$.

З обмеження (4): $x_1 = 0$.

Після підстановки $x_1 = 0$:

$$\begin{gathered} f_1(x) = -5 - 7x_3 + 3x_4 \to \max \\ 7x_4 \le 7 \\ x_i \in \{0, 1\}; \quad i \in \{3, 4\} \end{gathered} \tag{2}$$

$\xi(G_2) = -2$.

Крок 2.

Розбиття G_1:

$$G_3 \subset G_1: \quad x_4 = 0; \quad \xi(G_3) = -5;$$

$$G_4 \subset G_1: \quad x_4 = 1; \quad \xi(G_4) = -2.$$

Аналіз G_4:

$$f_4(x) = -2 - 7x_3 \to \max$$
$$x_i \in \{0, 1\}; \quad i \in \{3\}$$

$\xi(G_2) = -2$.

Крок 3.

Розбиття G_4:

$$G_5 \subset G_4: \quad x_3 = 0; \quad \xi(G_5) = -2;$$

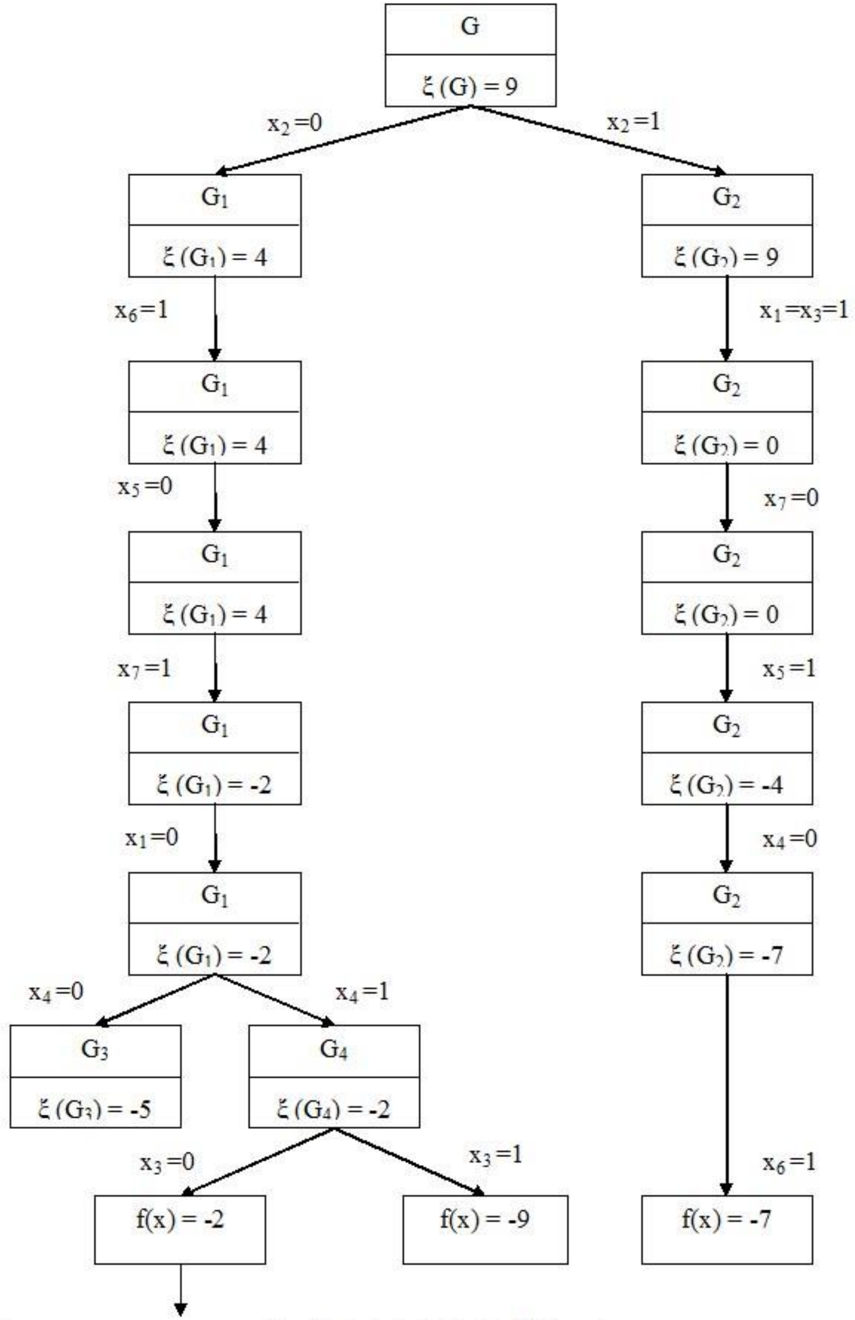
$$G_6 \subset G_4: \quad x_3 = 1; \quad \xi(G_6) = -9.$$

Аналіз G_5:

$$I_5 = \varnothing .$$

Оптимальний розв'язок:

$x = (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1)$; $\xi(G_5) = f_5(x) = -2$.

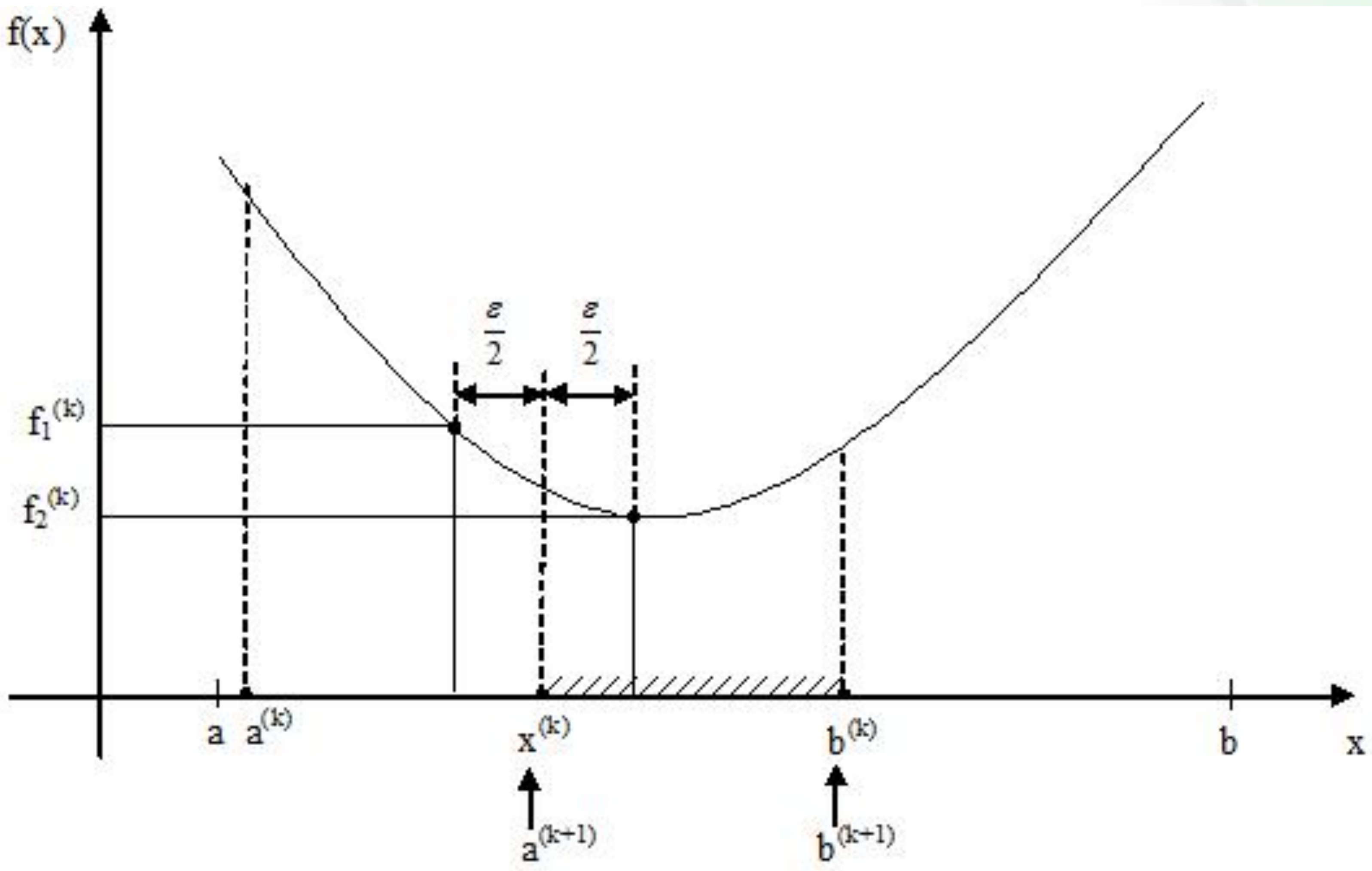


Оптимальное решение $x^* = (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1)$; $f(x^*) = -2$

Тема 4. Методи одномірної оптимізації

$$f(x) \to \min\,; \quad x \in E^1\,; \quad a \le x \le b\,.$$

4.1 Метод дихотомії



Вихідні дані: $f(x)$; (a, b); $\varepsilon \approx 0.01$.

$$a^{(1)} = a; \quad b^{(1)} = b.$$

На k-му кроці:

$$x^{(k)} = \frac{1}{2}\left[a^{(k)} + b^{(k)}\right];$$

$$f_1^{(k)} = f\left[x^{(k)} - \frac{\varepsilon}{2}\right]; \quad f_2^{(k)} = f\left[x^{(k)} + \frac{\varepsilon}{2}\right].$$

Якщо $f_1^{(k)} > f_2^{(k)}$, **то** $a^{(k+1)} = x^{(k)}$; $b^{(k+1)} = b^{(k)}$.

Якщо $f_1^{(k)} < f_2^{(k)}$, **то** $a^{(k+1)} = a^{(k)}$; $b^{(k+1)} = x^{(k)}$.

Критерій закінчення пошуку:

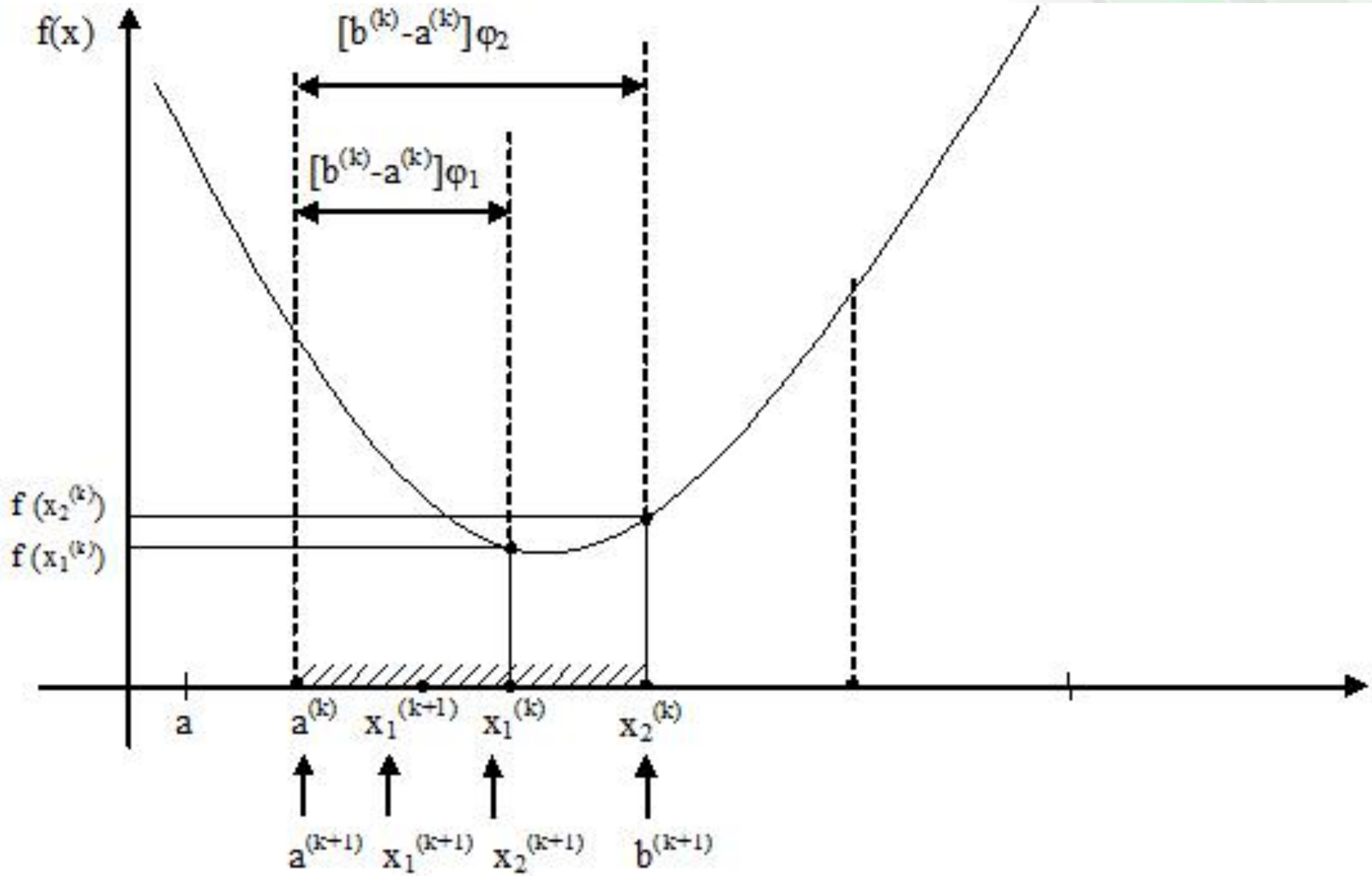
$$\left[b^{(k+1)} - a^{(k+1)}\right] < \varepsilon.$$

$$x^* = \frac{1}{2}\left[a^{(k+1)} + b^{(k+1)}\right]; \quad f_{\min} = f(x^*).$$

4.2 Метод золотого перетину

$$\varphi_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}38\,; \quad \varphi_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}62\,.$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 1\,; \quad \varphi_1 = (\varphi_2)^2\,.$$


f(x)
$[b^{(k)}-a^{(k)}]\varphi_2$
$[b^{(k)}-a^{(k)}]\varphi_1$
$f(x_2^{(k)})$
$f(x_1^{(k)})$
a
$a^{(k)}$
$x_1^{(k+1)}$
$x_1^{(k)}$
$x_2^{(k)}$
$a^{(k+1)}$
$x_1^{(k+1)}$
$x_2^{(k+1)}$
$b^{(k+1)}$

Вихідні дані: $f(x)$; (a,b); $\varepsilon \approx 0.01$.

$$a^{(1)} = a; \quad b^{(1)} = b.$$

На k-му кроці:

$$x_1^{(k)} = a^{(k)} + [b^{(k)} - a^{(k)}] \times \varphi_1;$$

$$x_2^{(k)} = a^{(k)} + [b^{(k)} - a^{(k)}] \times \varphi_2.$$

Якщо $f(x_1^{(k)}) < f(x_2^{(k)})$, то:

$$a^{(k+1)} = a^{(k)}; \quad b^{(k+1)} = x_2^{(k)}; \quad x_1^{(k+1)} = a^{(k+1)} + [b^{(k+1)} - a^{(k+1)}] \times \varphi_1; \quad x_2^{(k+1)} = x_1^{(k)}.$$

Якщо $f(x_1^{(k)}) > f(x_2^{(k)})$, то:

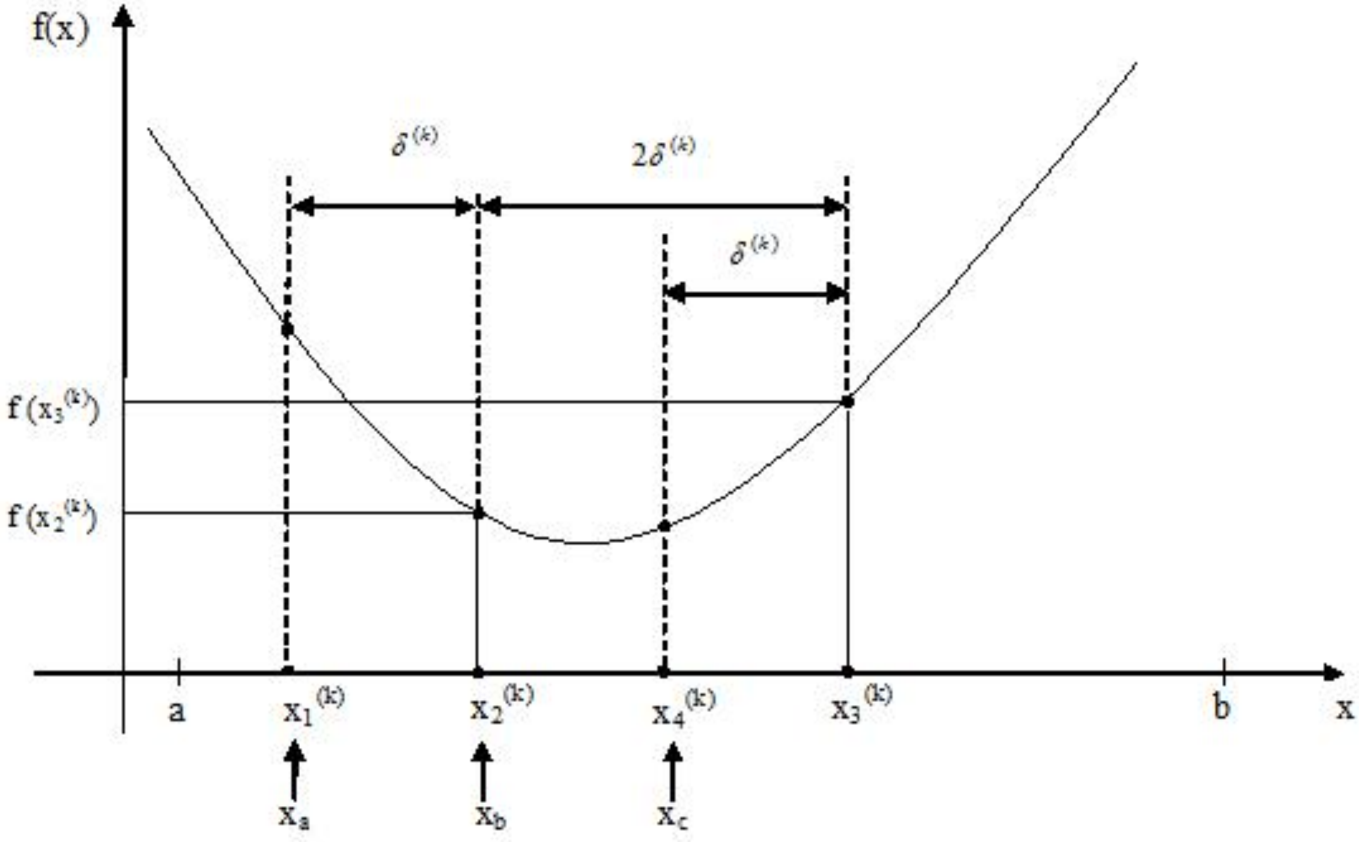
$$a^{(k+1)} = x_1^{(k)}; \quad b^{(k+1)} = b^{(k)}; \quad x_1^{(k+1)} = x_2^{(k)}; \quad x_2^{(k+1)} = a^{(k+1)} + [b^{(k+1)} - a^{(k+1)}] \times \varphi_2.$$

Критерій закінчення пошуку:

$$\left[b^{(k+1)} - a^{(k+1)}\right] < \varepsilon.$$

$$x^* = \frac{1}{2}\left[a^{(k+1)} + b^{(k+1)}\right]; \quad f_{\min} = f(x^*).$$

4.3 Метод однократної інтерполяції (метод ДСК)



Вихідні дані: $f(x)$; (a,b); $x^{(0)} \in (a,b)$; $\delta^{(0)}$; $\gamma \approx 0.001$.

$$x_1^{(k)} = \begin{cases} x^{(0)} & при \quad k = 1 \\ x_{\min}^{(k-1)} & при \quad k > 1 \end{cases};$$

$$f(x_{\min}^{(0)}) = f(x^{(0)});$$

$$\delta^{(k)} = \begin{cases} \delta^{(0)} & при \quad k = 1 \\ \frac{1}{2}\delta^{(k-1)} & при \quad k > 1 \end{cases}.$$

На k-му кроці ($k \geq 1$):

1. $x_2^{(k)} = x_1^{(k)} + \delta^{(k)}$;

   Якщо $f(x_2^{(k)}) \leq f(x_1^{(k)})$, то $\Rightarrow$ пункт 2.

   У противному випадку прийняти $\delta^{(k)} := -\delta^{(k)}$ і повторити пункт 1.

   Якщо при повторному виконанні пункту 1 $f(x_2^{(k)}) > f(x_1^{(k)})$, то прийняти $\delta^{(k+1)} = \frac{1}{2}\delta^{(k)}$ і повторити пункт 1.

2. $x_3^{(k)} = x_2^{(k)} + 2\delta^{(k)}$.

   Якщо $f(x_3^{(k)}) \leq f(x_2^{(k)})$, то прийняти $\delta^{(k)} := 2\delta^{(k)}$ і $\Rightarrow$ пункт 1.

   У противному випадку $\Rightarrow$ пункт 3.

3. $x_4^{(k)} = x_3^{(k)} - \delta^{(k)}$.

   Якщо $f(x_1^{(k)}) \leq f(x_3^{(k)})$, то $\Rightarrow$ пункт 4.

   У противному випадку $\Rightarrow$ пункт 5.

4. $x_a = x_1^{(k)}; \quad x_b = x_2^{(k)}; \quad x_c = x_4^{(k)}$ і $\Rightarrow$ пункт 6.

5. $x_a = x_2^{(k)}; \quad x_b = x_4^{(k)}; \quad x_c = x_3^{(k)}$.

6. $x_{\min}^{(k)} = x_b - \dfrac{S_1^{(k)}}{S_2^{(k)}}$;

$$S_1^{(k)} = \delta^{(k)}[f(x_a) - f(x_c)];$$
$$S_2^{(k)} = 2[f(x_a) - 2f(x_b) + f(x_c)].$$

7. Якщо $x_{\min}^{(k)} < a$, то $x_{opt} = a$ і $\Rightarrow$ кінець обчислень.

Якщо $x_{\min}^{(k)} > b$, то $x_{opt} = b$ і $\Rightarrow$ кінець обчислень.

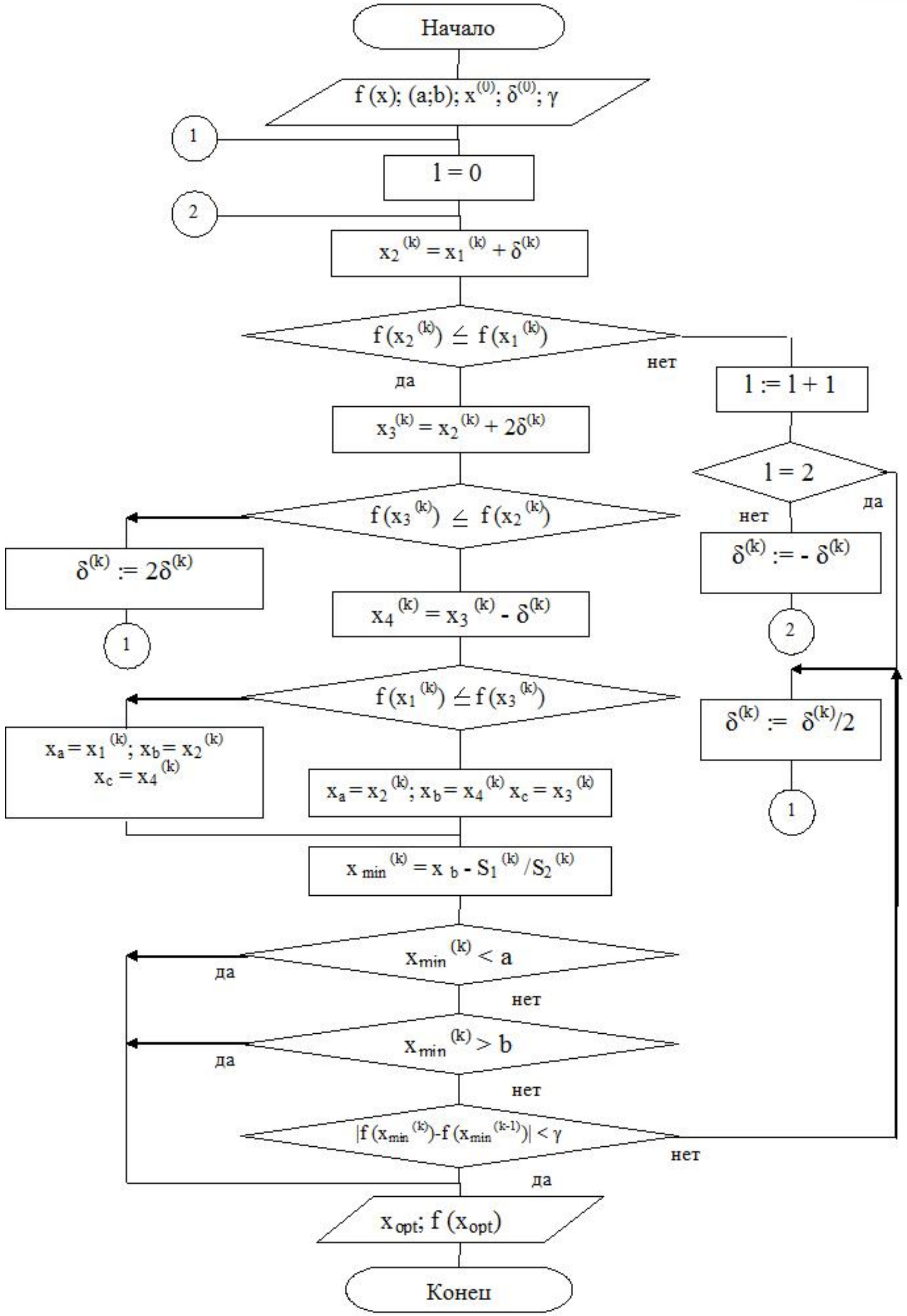
8. Якщо

$$\left| f(x_{\min}^{(k)}) - f(x_{\min}^{(k-1)}) \right| \leq \gamma ,$$

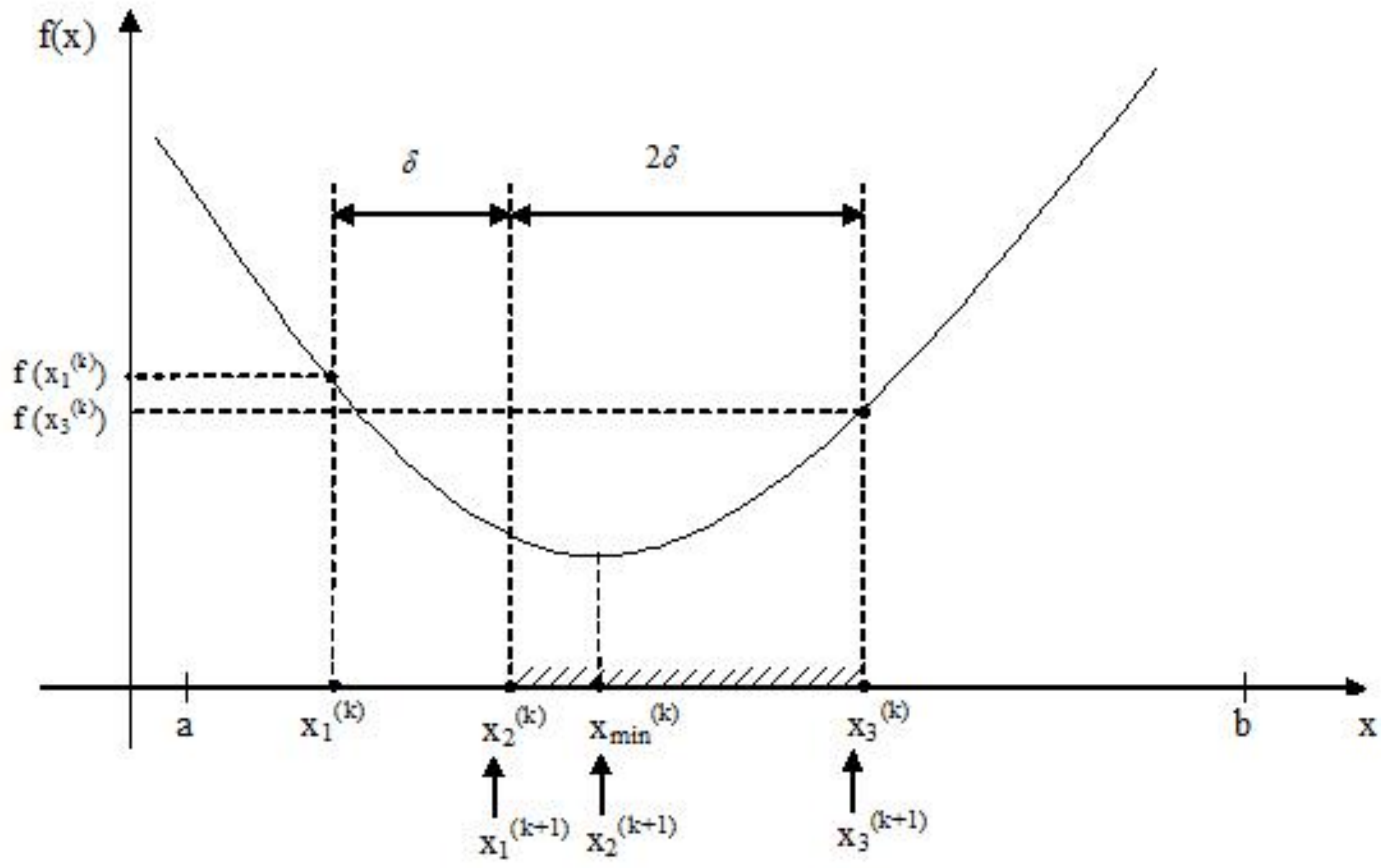
то:

$$x_{opt} \approx x_{\min}^{(k)} ; \quad f_{opt} \approx f(x_{opt}) \quad \text{і} \Rightarrow \text{кінець обчислень.}$$

У противному випадку $\Rightarrow$ $(k+1)$-й крок.


Начало
f (x); (a;b); x(0); δ(0); γ
1
l = 0
2
x2(k) = x1(k) + δ(k)
f (x2(k)) ≤ f (x1(k))
нет
да
l := l + 1
x3(k) = x2(k) + 2δ(k)
l = 2
да
нет
f (x3(k)) ≤ f (x2(k))
δ(k) := 2δ(k)
δ(k) := - δ(k)
x4(k) = x3(k) - δ(k)
1
2
f (x1(k)) ≤ f (x3(k))
δ(k) := δ(k)/2
xa = x1(k); xb = x2(k)
xc = x4(k)
xa = x2(k); xb = x4(k) xc = x3(k)
1
x min(k) = x b - S1(k) /S2(k)
xmin(k) < a
да
нет
xmin(k) > b
да
нет
|f (xmin(k))-f (xmin(k-1))| < γ
нет
да
xopt; f (xopt)
Конец

4.4 Метод багаторазової інтерполяції (метод Пауелла)



Вихідні дані: $f(x)$; (a,b); $x^{(0)} \in (a,b)$; δ; $\gamma \approx 0.001$.

Попередній етап:

$$x_1^{(1)} = x^{(0)};$$
$$x_2^{(1)} = x_1^{(1)} + \delta;$$
$$x_3^{(1)} = \begin{cases} x_1^{(1)} + 2\delta, \ \textit{якщо} \ \ f(x_2^{(1)}) < f(x_1^{(1)}) \\ x_1^{(1)} - \delta \ \ \textit{в противному випадку} \end{cases}.$$

На k -му кроці ($k \geq 1$):

1. $x_{\min}^{(k)} = \dfrac{S_1^{(k)}}{2 \times S_2^{(k)}}$;

$$\begin{aligned} S_1^{(k)} = {} & [(x_1^{(k)})^2 - (x_2^{(k)})^2] f(x_3^{(k)}) + \\ & + [(x_2^{(k)})^2 - (x_3^{(k)})^2] f(x_1^{(k)}) + \\ & + [(x_3^{(k)})^2 - (x_1^{(k)})^2] f(x_2^{(k)}) \,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2^{(k)} = {} & [x_1^{(k)} - x_2^{(k)}] f(x_3^{(k)}) + \\ & + [x_2^{(k)} - x_3^{(k)}] f(x_1^{(k)}) + \\ & + [x_3^{(k)} - x_1^{(k)}] f(x_2^{(k)}) \,. \end{aligned}$$

2. Якщо $x_{\min}^{(k)} < a$, то $x_{opt} = a$ і $\Rightarrow$ кінець обчислень.

Якщо $x_{\min}^{(k)} > b$, то $x_{opt} = b$ і $\Rightarrow$ кінець обчислень.

3. Якщо

$$\left| f(x_{\min}^{(k)}) - f(x_{\min}^{(k-1)}) \right| \le \gamma ,$$

то:

$$x_{opt} \approx x_{\min}^{(k)} ; \quad f_{opt} \approx f(x_{opt}) \quad \text{і} \Rightarrow \text{кінець обчислень.}$$

4. Якщо $f(x_1^{(k)}) \le f(x_3^{(k)})$ і $x_{\min}^{(k)} < x_2^{(k)}$, то прийняти:

$$x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)}; \quad x_2^{(k+1)} = x_{\min}^{(k)}; \quad x_3^{(k+1)} = x_2^{(k)}.$$

Якщо $f(x_1^{(k)}) \le f(x_3^{(k)})$, але $x_{\min}^{(k)} \ge x_2^{(k)}$, то прийняти:

$$x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)}; \quad x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)}; \quad x_3^{(k+1)} = x_{\min}^{(k)}.$$

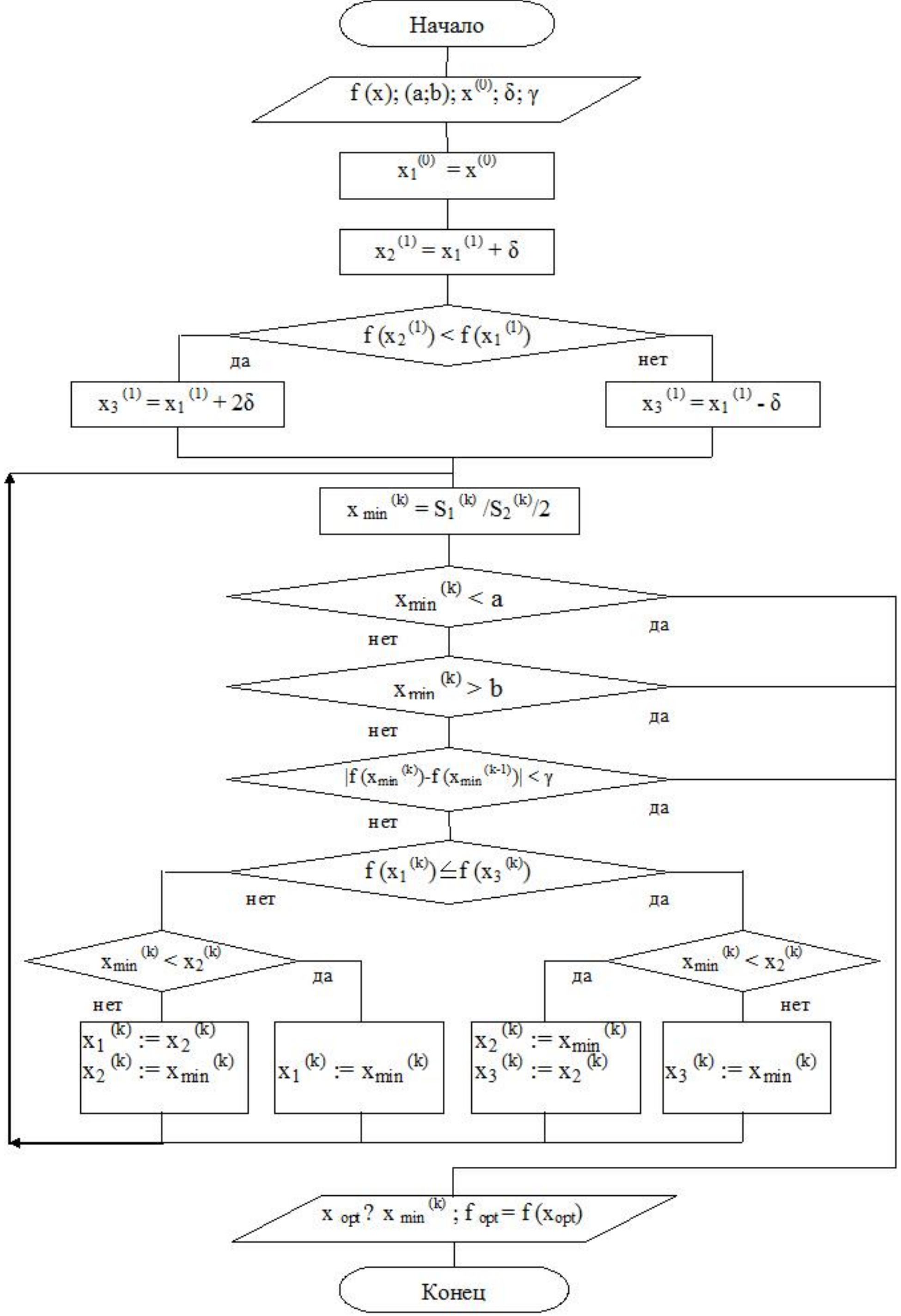
Якщо $f(x_1^{(k)}) > f(x_3^{(k)})$ і $x_{\min}^{(k)} < x_2^{(k)}$, то прийняти:

$$x_1^{(k+1)} = x_{\min}^{(k)}; \quad x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)}; \quad x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)}.$$

Якщо $f(x_1^{(k)}) > f(x_3^{(k)})$, але $x_{\min}^{(k)} \ge x_2^{(k)}$, то прийняти:

$$x_1^{(k+1)} = x_2^{(k)}; \quad x_2^{(k+1)} = x_{\min}^{(k)}; \quad x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)}.$$

$\Rightarrow$ $(k+1)$-й крок.



Начало
f (x); (a;b); x(0); δ; γ
x1(0) = x(0)
x2(1) = x1(1) + δ
f (x2(1)) < f (x1(1))
да
нет
x3(1) = x1(1) + 2δ
x3(1) = x1(1) - δ
x min(k) = S1(k) /S2(k)/2
xmin(k) < a
да
нет
xmin(k) > b
да
нет
|f (xmin(k))-f (xmin(k-1))| < γ
да
нет
f (x1(k))≤f (x3(k))
нет
да
xmin(k) < x2(k)
да
нет
xmin(k) < x2(k)
да
нет
x1(k) := x2(k)
x2(k) := xmin(k)
x1(k) := xmin(k)
x2(k) := xmin(k)
x3(k) := x2(k)
x3(k) := xmin(k)
x opt ? x min(k) ; f opt = f (xopt)
Конец

Тема 5. МЕТОДИ БАГАТОМІРНОЇ БЕЗУМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

$$f(x) \to \min\,; \quad x \in E^n$$

5.1 Градієнтний метод (найшвидшого спуску)

$$x^{(k)} \to x^{(k+1)}$$

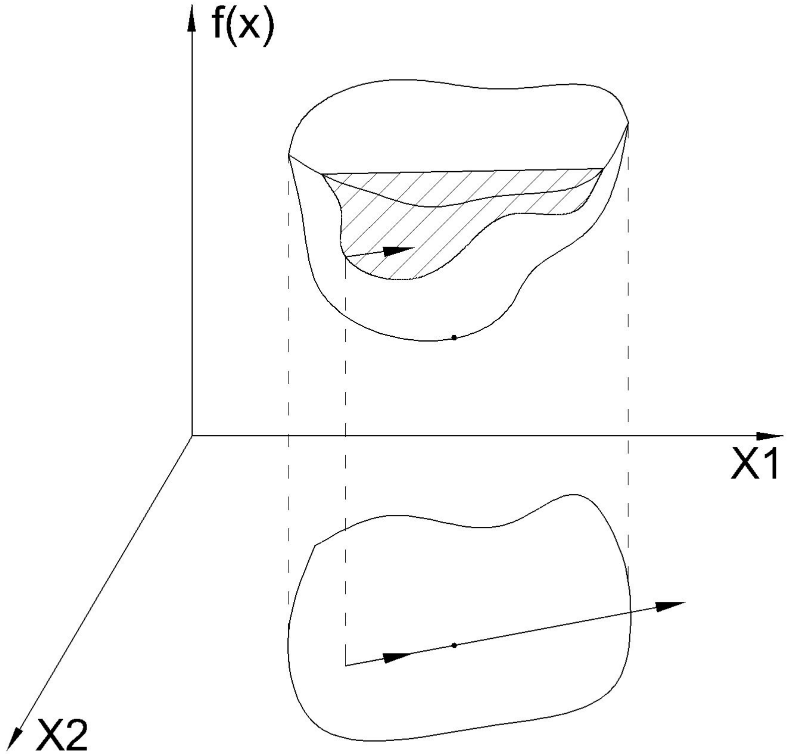
На k-му кроці:

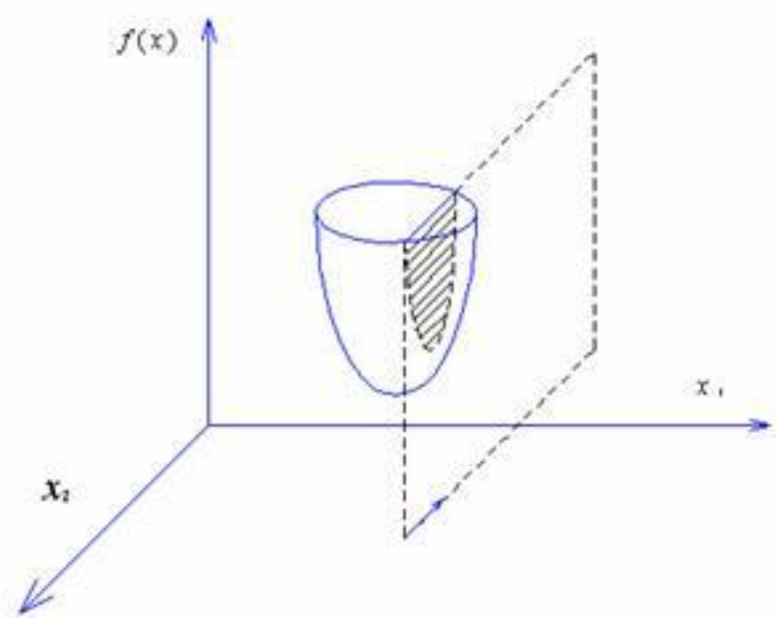
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)};$$

$$\Delta x^{(k)} = \lambda^{(k)} \times e^{(k)};$$

$$e^{(k)} = -\frac{\nabla f(x^{(k)})}{\left\|\nabla f(x^{(k)})\right\|};$$

$$\left\|\nabla f(x^{(k)})\right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f(x^{(k+1)})}{\partial x_i}\right]^2}.$$


f(x)
X1
X2


f(x)
x_2

Вибір довжини кроку:

$$\varphi(\lambda) = f(x^{(k)} + \lambda \times e^{(k)}) \to \min .$$

Завершення процесу:

$$\left| \nabla f(x^{(k+1)}) \right| \leq \gamma .$$

Приклад

$$f(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1 - 5x_2 \to \min$$

$$x^{(k)} = (1,2)$$

$$f(1,2) = 2 + 3 \times 4 - 4 - 5 \times 2 = 2 + 12 - 4 - 10 = 0$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda^{(k)} \times e^{(k)}$$

$$e^{(k)} = -\frac{\nabla f(x^{(k)})}{\left\|\nabla f(x^{(k)})\right\|}$$

$$\left\|\nabla f(x^{(k)})\right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f(x^{(k+1)})}{\partial x_i}\right]^2}$$

$$\nabla f(x^{(k)}) = \begin{bmatrix} 4x_1 - 4 \\ 6x_2 - 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - 4 \\ 12 - 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\left\|\nabla f(x^{(k)})\right\| = \sqrt{0^2 + 7^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$e_1^{(k)} = -\frac{0}{7} = 0 \qquad e_2^{(k)} = -\frac{7}{7} = -1$$

$$x_1^{(k)} = 1 + \lambda \times 0 = 1 \qquad x_2^{(k)} = 2 + \lambda \times (-1) = 2 - \lambda$$

$$\varphi(\lambda) = 2 + 3(2-\lambda)^2 - 4 - 5(2-\lambda) = 3\lambda^2 - 7\lambda \to \min$$

$$\lambda = \frac{7}{6}$$

$$x_1^{(k+1)} = 1 + \lambda \times 0 = 1 \qquad x_2^{(k+1)} = 2 + \lambda \times (-1) = 2 - \frac{7}{6} = \frac{5}{6}$$

$$f(1, \frac{5}{6}) = 2 + 3 \times \left(\frac{25}{36}\right) - 4 - 5 \times \left(\frac{5}{6}\right) = -\frac{147}{36} = -4\frac{1}{12}$$

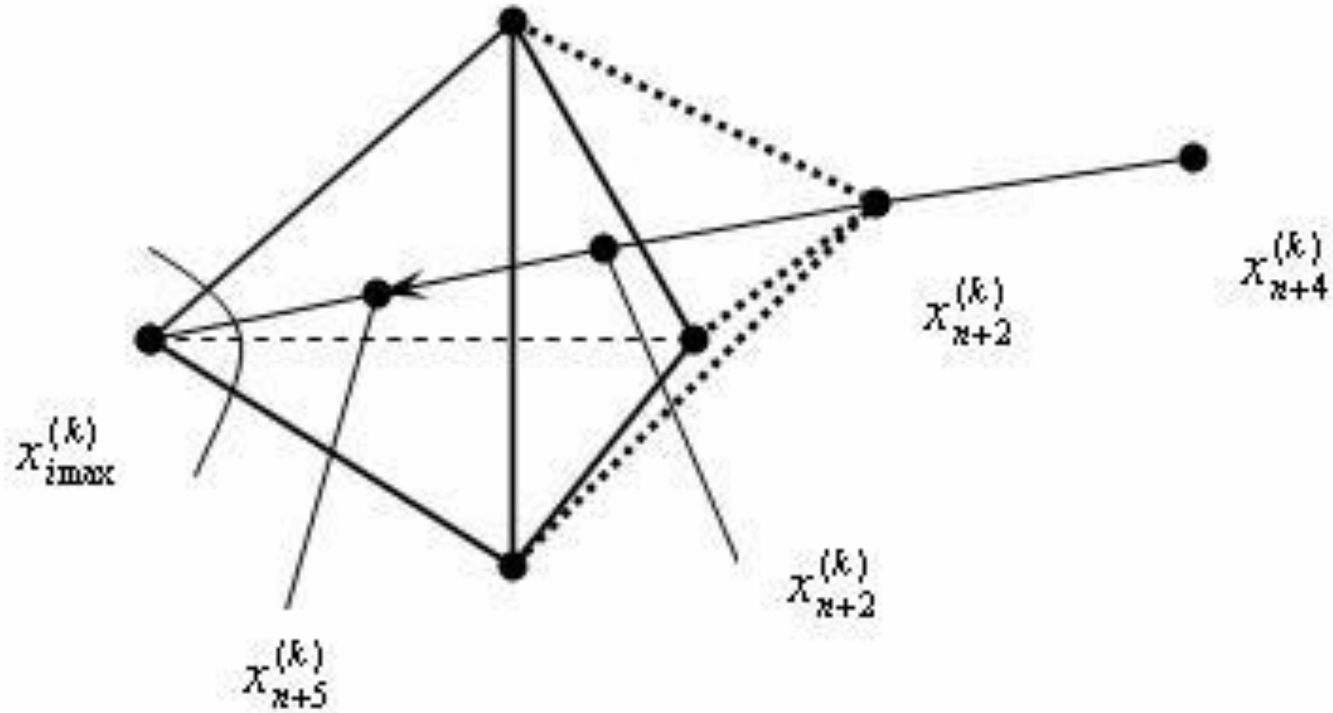
5.2 Метод пошуку по багатограннику, що деформується

Симплекс в E^n.

Вершини симплексу:

$$\{ x_i \mid i = \overline{1, n+1} \};$$

$$x_i = (x_{ij} ;\ j = \overline{1, n}).$$


$x_{imax}^{(k)}$
$x_{n+5}^{(k)}$
$x_{n+2}^{(k)}$
$x_{n+2}^{(k)}$
$x_{n+4}^{(k)}$

Визначення координат вершин симплексу:

$$x_1 = (0, 0, ..., 0)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ d_1 & d_2 & d_2 & ... & d_2 \\ d_2 & d_1 & d_2 & ... & d_2 \\ d_2 & d_2 & d_1 & ... & d_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ d_2 & d_2 & d_2 & d_2 & d_1 \end{bmatrix} \qquad (n+1)\times n$$

$$d_1 = \frac{t}{n\sqrt{2}}(\sqrt{n+1} + n - 1);$$

$$d_2 = \frac{t}{n\sqrt{2}}(\sqrt{n+1} - 1).$$

$$x_{ij} = x_{1j} + \begin{cases} d_1, \text{ якщо } j = i-1 \\ d_2 \text{ в противному випадку} \end{cases}; \quad i = \overline{2, n+1}; \quad j = \overline{1, n}.$$

Позначення

Вершини багатогранника:

$$x_i^{(k)} = (\, x_{ij}^{(k)} \mid j = \overline{1,n}\,)\,; \quad i = \overline{1,n+1}\,; \quad k = 1,2,\ldots$$

Значення цільової функції в вершинах:

$$f(x_i^{(k)})\,; \quad i = \overline{1,n+1}\,.$$

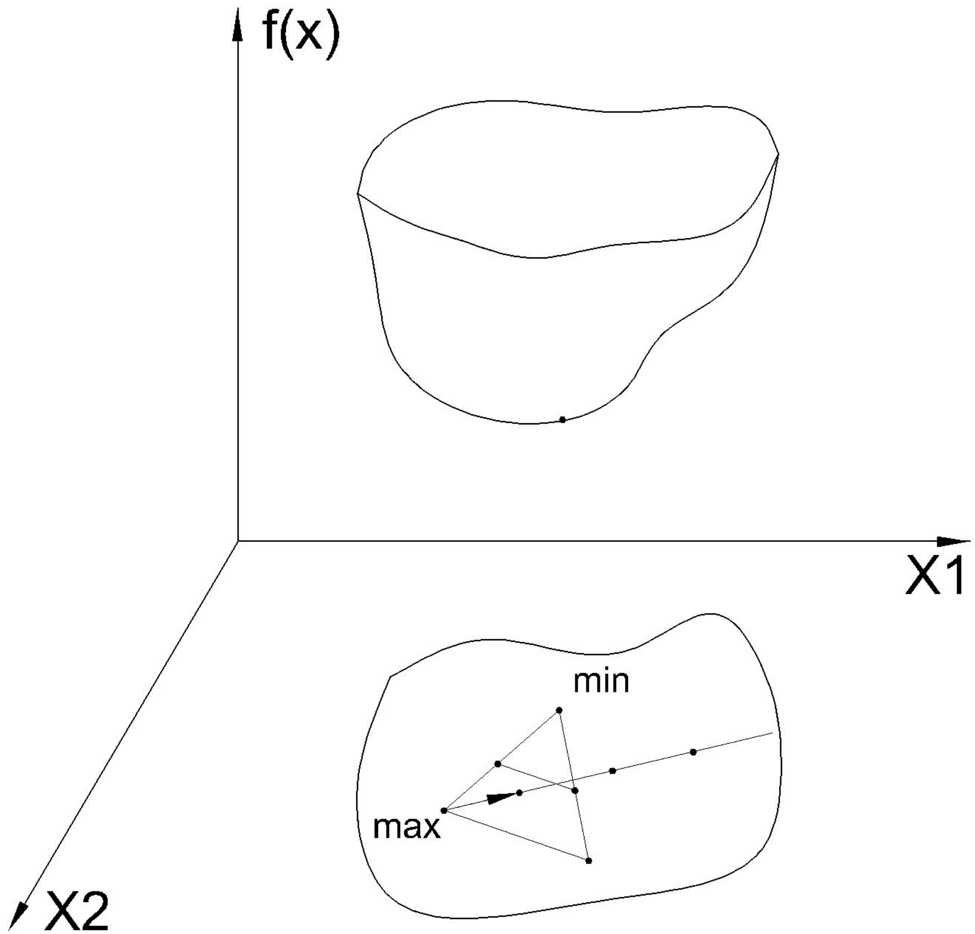
$$x_{i_{\min}}^{(k)} = \arg\min\,\{f(x_i^{(k)});\, i = \overline{1,n+1}\}\,;$$

$$x_{i_{\max}}^{(k)} = \arg\max\,\{f(x_i^{(k)});\, i = \overline{1,n+1}\}\,.$$

$x_{n+2}^{(k)}$ – центр тяжіння вершин багатогранника, за виключенням $x_{i_{\max}}^{(k)}$.

Координаты центра тяжіння:

$$x_{n+2,\,j}^{(k)} = \frac{1}{n}\left[\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_{ij}^{(k)}\right) - x_{i_{\max},\,j}^{(k)}\right]; \quad j = \overline{1,n}\,.$$


f(x)
X1
X2
min
max

Алгоритм

Операції на k -му кроці:

1. Визначення $x_{i_{\min}}^{(k)}$ та $x_{i_{\max}}^{(k)}$.

2. Обчислення координат центра тяжіння $x_{n+2}^{(k)}$.

3. Якщо

$\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}[f(x_i^{(k)})-f(x_{n+2}^{(k)})]^2\right\}^{1/2}\le\varepsilon$, то $\Rightarrow$ кінець обчислень.

3. Відображення:

$$x_{n+3}^{(k)}=x_{n+2}^{(k)}+\alpha(x_{n+2}^{(k)}-x_{i_{\max}}^{(k)});\quad \alpha\approx 1 .$$

Якщо $f(x_{n+3}^{(k)})\le f(x_{i_{\min}}^{(k)})$, то $\Rightarrow$ пункт 4.

В противному випадку $\Rightarrow$ пункт 7.

4. Розтягнення:

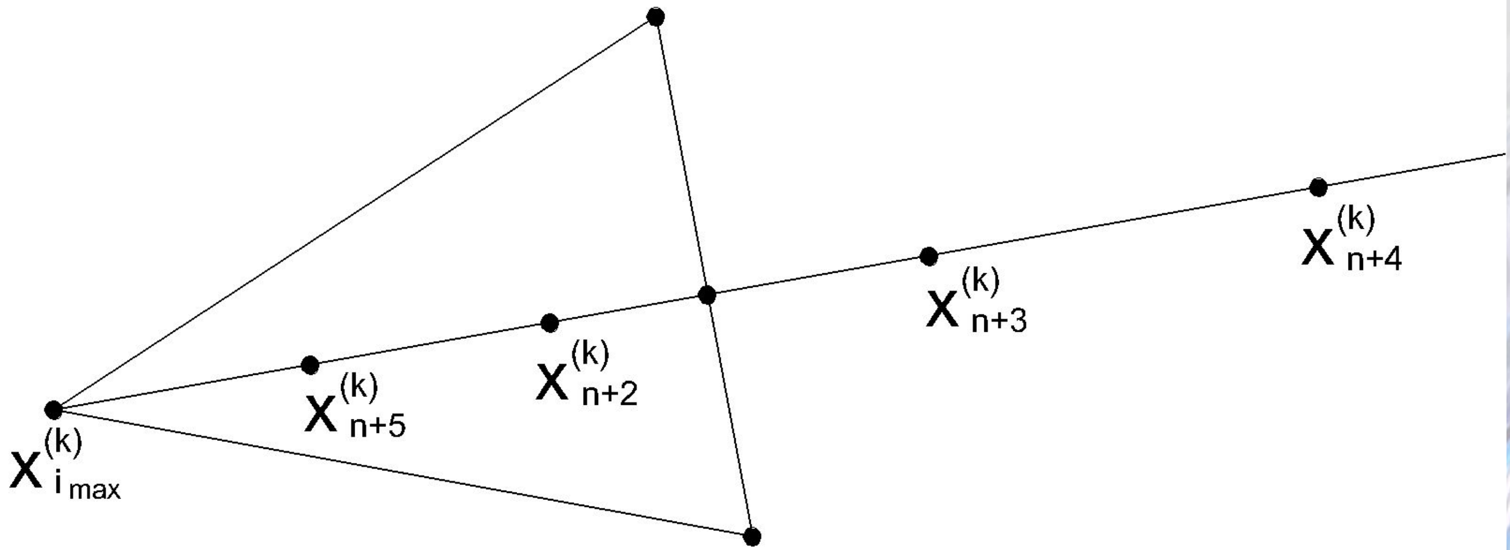
$$x_{n+4}^{(k)}=x_{n+2}^{(k)}+\gamma\left(x_{n+3}^{(k)}-x_{n+2}^{(k)}\right);\quad 2\le\gamma\le 3 .$$

Якщо $f(x_{n+4}^{(k)})\le f(x_{i_{\min}}^{(k)})$, то $\Rightarrow$ пункт 5.

В противному випадку $\Rightarrow$ пункт 6.

5. Заміна вершини $x_{i_{\max}}^{(k)}$ на $x_{n+4}^{(k)}$ та $k:=k+1$

6. Заміна вершини $x_{i_{\max}}^{(k)}$ на $x_{n+3}^{(k)}$ та $k:=k+1$



$X^{(k)}_{n+4}$
$X^{(k)}_{n+3}$
$X^{(k)}_{n+2}$
$X^{(k)}_{n+5}$
$X^{(k)}_{i_{max}}$

7. Якщо

$$f(x_{n+3}^{(k)}) \le f(x_{i_{\max}}^{(k)}),$$

то $\Rightarrow$ пункт 8.

В противному випадку $\Rightarrow$ пункт 10.

8. Стиснення:

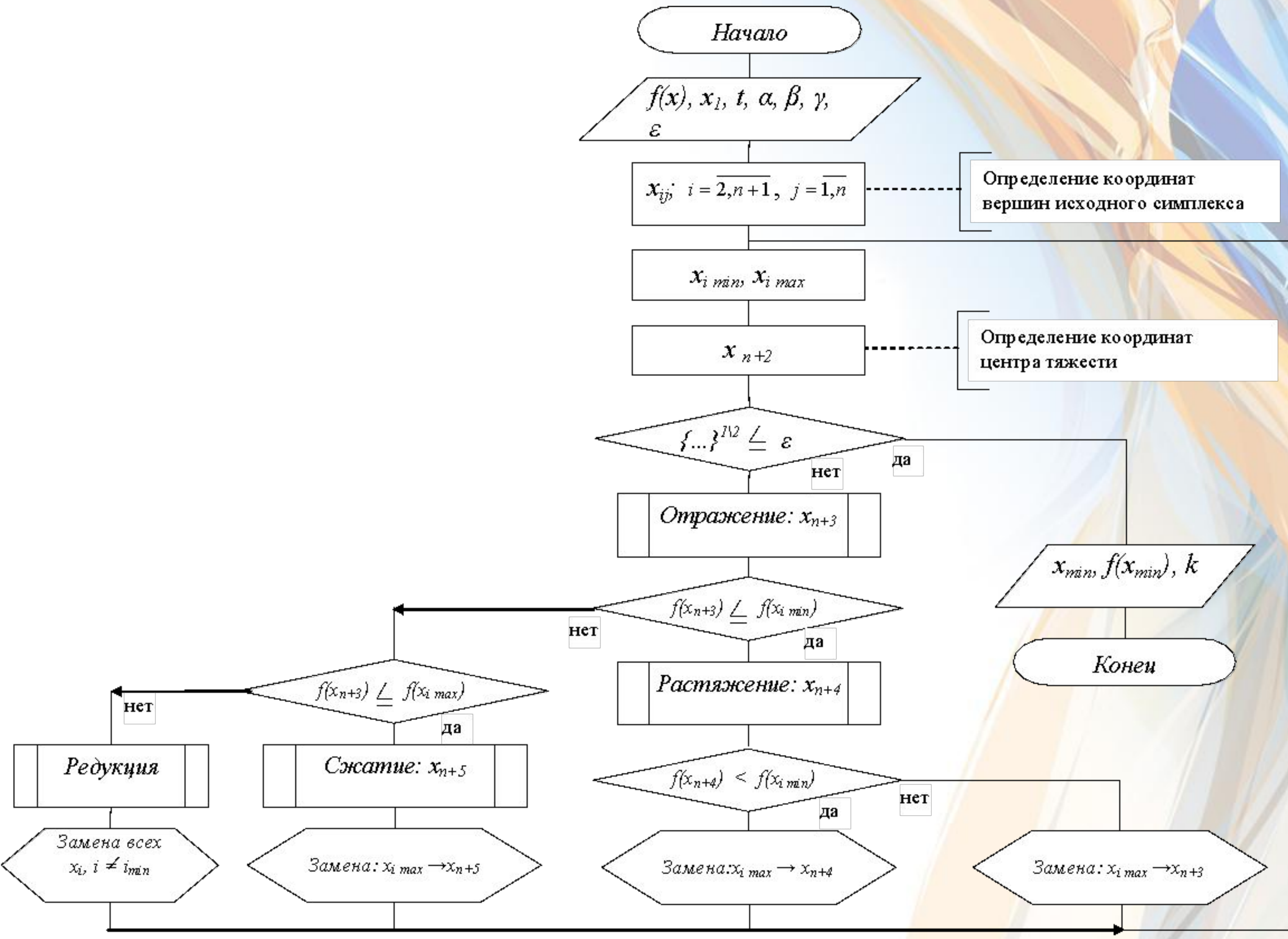
$$x_{n+5}^{(k)} = x_{n+2}^{(k)} + \beta(x_{i_{\max}}^{(k)} - x_{n+2}^{(k)}); \quad 0{,}4 \le \beta \le 0{,}6 .$$

9. Заміна вершини $x_{i_{\max}}^{(k)}$ на $x_{n+5}^{(k)}$ та $k := k + 1$.

10. Редукція:

$$x_i^{(k)} = x_{i_{\min}}^{(k)} + \frac{1}{2}(x_i^{(k)} - x_{i_{\min}}^{(k)}); \quad i \in \{1, \ldots, n+1\} \setminus \{i_{\min}\} .$$

Далі $k := k + 1$.


Начало
f(x), x1, t, α, β, γ, ε
xij; i = 2,n+1, j = 1,n
Определение координат вершин исходного симплекса
xi min, xi max
x n+2
Определение координат центра тяжести
{...}1\2 ≤ ε
да
нет
Отражение: xn+3
xmin, f(xmin), k
Конец
f(xn+3) ≤ f(xi min)
нет
да
Растяжение: xn+4
f(xn+3) ≤ f(xi max)
нет
да
Редукция
Сжатие: xn+5
f(xn+4) < f(xi min)
нет
да
Замена всех xi, i ≠ imin
Замена: xi max → xn+5
Замена: xi max → xn+4
Замена: xi max → xn+3

Тема 6. МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ПРИ НАЯВНОСТІ ОБМЕЖЕНЬ

$$f(x) \to \min$$

$$h_i(x) = 0; \quad i = \overline{1,m};$$

$$g_i(x) \ge 0; \quad i = \overline{m+1,p};$$

$$x \in E^n; \; x = (x_j; \; j = \overline{1,n}).$$

6.1 Метод лінійної апроксимації

$$\widetilde{f}(x^{(k)}) = f(x^{(k)}) + \nabla^T f(x^{(k)}) \times (x - x^{(k)}) \to \min$$

$$\widetilde{h}_i(x^{(k)}) = h_i(x^{(k)}) + \nabla^T h_i(x^{(k)}) \times (x - x^{(k)}) = 0\,; \quad i = \overline{1, m}\,;$$

$$\widetilde{g}_i(x^{(k)}) = g_i(x^{(k)}) + \nabla^T g_i(x^{(k)}) \times (x - x^{(k)}) \geq 0\,; \quad i = \overline{m+1, p}\,;$$

$$x^{(k)} \in E^n\,; \quad x \in E^n\,.$$

$$x^{(1)} \to x^{(2)} \to \ldots \to x^{(k)} \to x^{(k+1)} \ldots \to x_{opt}$$

Умови збіжності:

1) $R \neq \varnothing$;

2) всі функції $f(x)$; $h_i(x)$, $i = \overline{1,m}$; $g_i(x)$, $i = \overline{m+1,p}$ неперервні та диференціюємі;

3) функція $f(x)$ опукла;

4) сума $\sum_{i=1}^{m} h_i^2(x)$ опукла;

5) всі функції $g_i(x)$; $i = \overline{m+1,p}$ увігнуті;

6) множина R замкнена та опукла;

7) всі функції $h_i(x)$, $i = \overline{1,m}$; $g_i(x)$, $i = \overline{m+1,p}$ обмежені:

$$\left|h_i(x)\right| \le \delta; \quad g_i(x) \le \delta, \text{ де } \delta > 0.$$

Перетворення обмежень-нерівностей в рівняння:

$$\tilde{g}_i(x^{(k)}) - u_i^{(k)} = 0\ ; \quad u_i^{(k)} \geq 0\ ; \qquad i = \overline{m+1, p}\ .$$

Наближення точки $x^{(k)}$ до ОДР:

$$\varphi(v^{(k)}) = \sum_{i=1}^{p} v_i^{(k)} \to \min$$

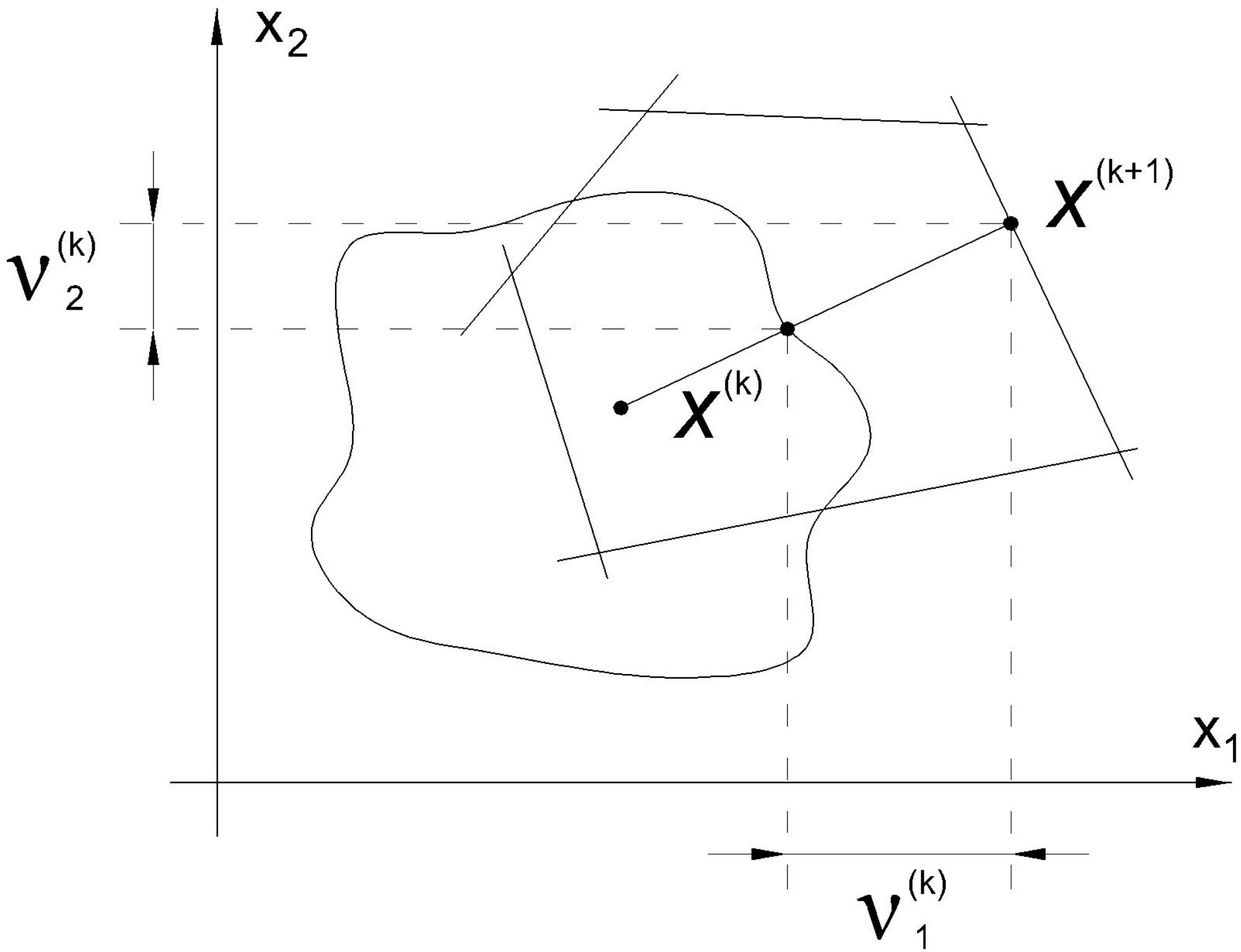
$$\tilde{h}_i(x^{(k)}) + v_i^{(k)} = 0\ ; \qquad i = \overline{1, m}\ ;$$

$$\tilde{g}_i(x^{(k)}) - u_i^{(k)} + v_i^{(k)} = 0\ ; \qquad i = \overline{m+1, p}\ ;$$

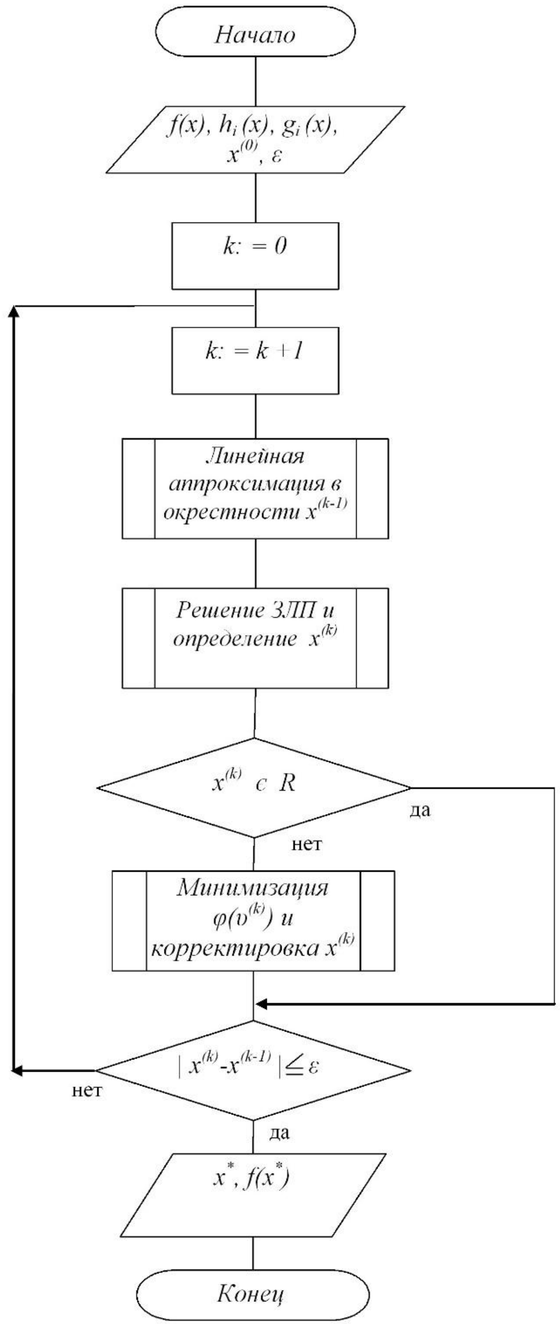
$$v_i^{(k)} \geq 0\ ; \qquad i = \overline{1, p}\ .$$

Ознака завершення обчислень:

$$\left| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right| \leq \varepsilon\ .$$



x_2
x_1
$X^{(k+1)}$
$X^{(k)}$
$\nu_2^{(k)}$
$\nu_1^{(k)}$



Начало
f(x), hᵢ(x), gᵢ(x),
x^(0), ε
k: = 0
k: = k +1
Линейная аппроксимация в окрестности x^(k-1)
Решение ЗЛП и определение x^(k)
x^(k) c R
да
нет
Минимизация φ(υ^(k)) и корректировка x^(k)
| x^(k)-x^(k-1) | ≤ ε
нет
да
x*, f(x*)
Конец

6.2 Метод штрафних функцій

Вихідна модель:

$$f(x) \to \min$$

$$h_i(x) = 0; \quad i = \overline{1,m};$$

$$g_i(x) \geq 0; \quad i = \overline{m+1,p};$$

$$x \in E^n; \; x = (x_j; \, j = \overline{1,n}).$$

Перетворена модель:

$$F(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} w_i H[h_i(x)] + \sum_{i=m+1}^{p} w_i G[g_i(x)] \to \min$$

$$w_i \geq 0; \quad i = \overline{1,p}.$$

Вимоги до функціоналів H:

якщо $h_i(x) \to 0$, то $H[h_i(x)] \to 0$.

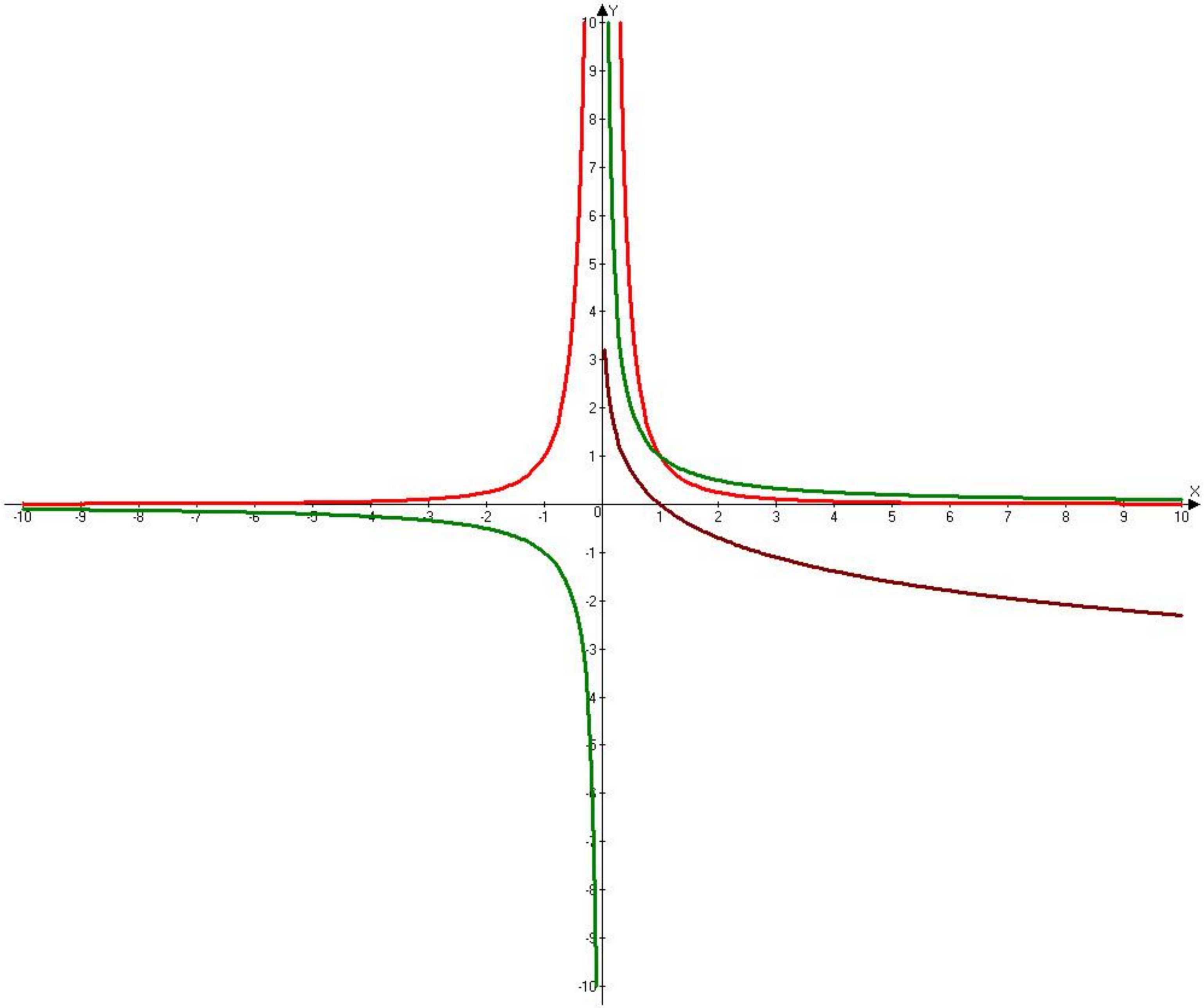
Вимоги до функціоналів G:

якщо $g_i(x) \geq 0$, то $G[g_i(x)] \approx 0$;
якщо $g_i(x) < 0$, то $G[g_i(x)] > 0$;
якщо $g_i(x) \to 0^{(+)}$, то $G[g_i(x)] \to \infty$;
якщо $g_i(x) \to 0^{(-)}$, то $G[g_i(x)] \to 0$.

Приклади

$$H[h_i(x)] = h_i^2(x);$$

$$G[g_i(x)] = \frac{1}{g_i(x)}; \quad G[g_i(x)] = \frac{1}{g_i^2(x)}; \quad G[g_i(x)] = \ln\frac{1}{g_i(x)}.$$


Y
X
0
-10
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

6.3 Метод ковзного допуску

Вихідна модель:

$$f(x) \to \min$$

$$h_l(x) = 0; \quad l = \overline{1,m};$$

$$g_l(x) \geq 0; \quad l = \overline{m+1,p};$$

$$x \in E^n; \quad x = (x_j;\ j = \overline{1,n}).$$

Перетворена модель:

$$f(x) \to \min$$

$$\Phi^{(k)} - T(x) \geq 0;$$

$$x \in E^n; \quad x = (x_j;\ j = \overline{1,n}).$$

$$\Phi^{(0)} = 2(m+1)t\,;$$

$$\Phi^{(k)} = \min\{\Phi^{(k-1)}; \Theta^{(k)}\}; \quad k = 1, 2, 3, \ldots;$$

$$\Theta^{(k)} = \frac{m+1}{r+1}\left\{\sum_{i=1}^{r+1}\sum_{j=1}^{n}[x_{ij}^{(k)} - x_{r+2,j}^{(k)}]^2\right\}^{1/2}; \quad r = n - m\,;$$

$x_i^{(k)}$ и $x_{r+2}^{(k)}$ – вершина та центр тяжіння багатогранника в E^n з $(r+1)$ вершинами;

$$T(x) = +\left[\sum_{l=1}^{m} h_l^2(x) + \sum_{l=m+1}^{p} u_l g_l^2(x)\right]^{1/2};$$

$$u_l = \begin{cases} 0 \;\; при \;\; g_l(x) \geq 0 \\ 1 \;\; при \;\; g_l(x) < 0 \end{cases}.$$

$$\Phi^{(0)} \geq \Phi^{(1)} \geq \ldots \geq \Phi^{(k)} \geq 0;$$

Якщо $x \in R$, то $T(x) = 0$.

Якщо $x \notin R$, то $T(x) > 0$.

Вектор $x_i^{(k)}$ називається:

– допустимим, якщо $T(x^{(k)}) = 0$;

– квазидопустимим, якщо $0 < T(x^{(k)}) \leq \Phi^{(k)}$;

– недопустимим, якщо $T(x^{(k)}) > \Phi^{(k)}$.

СТРАТЕГІЯ МЕТОДУ

$$x^{(0)} \to x^{(1)} \to x^{(2)} \to \ldots \to x^{(k)} \to x^{(k+1)} \ldots \to x_{opt}$$

Із стартової точки $x^{(k)}$ розв'язується основна задача:

$$f(x) \to \min$$

та визначається точка $x^{(k+1)}$.

Якщо $T(x^{(k+1)}) \le \Phi^{(k)}$, то здійснюється переміщення з $x^{(k)}$ в $x^{(k+1)}$.

Якщо $T(x^{(k+1)}) > \Phi^{(k)}$, то замість $x^{(k+1)}$ відшукується інша точка $\bar{x}^{(k+1)}$: допустима або квазидопустима.

Для цього зі стартової точки $x^{(k+1)}$ розв'язується допоміжна задача:

$$T(x) \to \min .$$

Умова завершення допоміжної процедури:

$$T(\bar{x}^{(k+1)}) \le \Phi^{(k)} .$$

Після цього: $x^{(k)} \to \bar{x}^{(k+1)}$.

Нульовий крок пошуку:

1°. В E^n будується симплекс (f-симплекс) з $(r+1)$ вершинами, призначений для мінімізації $f(x)$.

Початкова вершина $x_1^{(0)} = (x_j^{(0)} \mid j = \overline{1,n})$ задається.

Координати інших вершин обчислюються, виходячи з рекомендованої відстані між ними:

$$t = \min\left\{\left[\frac{0,2}{n}\sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j)\right];\ (b_j - a_j),\ \ j = \overline{1,n}\right\},$$

де $a_j \le x_j \le b_j$; $j = \overline{1,n}$.

2°. Визначається вершина

$$x_{i_{\min}}^{(0)} = \arg\min\{f(x_i^{(0)});\ j = \overline{1,n}\}.$$

3°. Якщо

$$\Phi^{(0)} - T(x_{i_{\min}}^{(0)}) \ge 0, \text{ то } \Rightarrow \text{ пункт 4°.}$$

В противному випадку $\Rightarrow$ пункт 6°.

4°. Виконується один цикл безумовної мінімізації $f(x)$ методом пошуку по деформуємому багатограннику.

5°. Виконується заміна:

– або точки $x_{i_{\max}}^{(0)}$ на одну з точок: $x_{r+3}^{(0)}$, $x_{r+4}^{(0)}$ чи $x_{r+4}^{(0)}$;

– або всіх точок, крім $x_{i_{\min}}^{(0)}$ (після операції редукції).

На цьому нульовий крок завершується.

6°. Якщо

$$\Phi^{(0)} - T(x_{i_{\min}}^{(0)}) < 0,$$

то в E^n будується другий симплекс (T-симплекс) з $(n+1)$ вершинами, призначений для мінімізації $T(x)$ в околі $x_{i_{\min}}^{(0)}$.

Початкова вершина $\hat{x}_1^{(0)} = x_{i_{\min}}^{(0)}$.

Координати інших вершин обчислюються, виходячи з рекомендуємої відстані між ними:

$$t = 0{,}05\Phi^{(0)}.$$

7°. Реалізується процедура безумовної мінімізації $T(x)$ в околі $x_{i_{\min}}^{(0)}$ методом пошуку по деформуємому багатограннику.

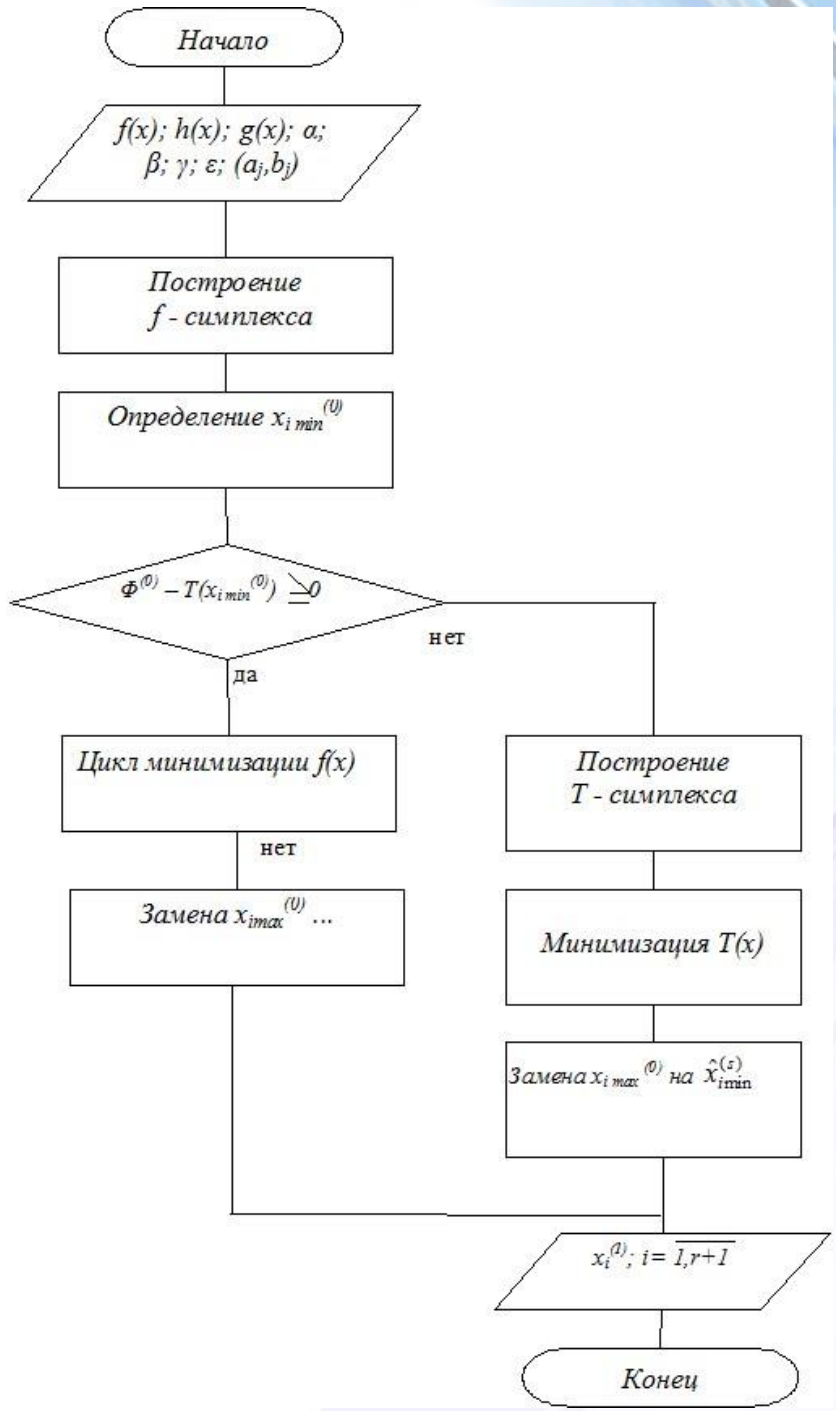
Процедура завершується знаходженням точки $\hat{x}_{i_{\min}}^{(s)}$, яка задовольняє умові допустимості/квазидопустимості:

$$\Phi^{(0)} - T(\hat{x}_{i_{\min}}^{(s)}) \geq 0,$$

де s – кількість реалізованих кроків алгоритму.

8°. Проводиться заміна: точка $\hat{x}_{i_{\min}}^{(s)}$ вводиться у склад вершин f-багатогранника замість вершини $x_{i_{\max}}^{(0)}$.

На цьому нульовий крок завершується.


Начало
$f(x)$; $h(x)$; $g(x)$; α;
β; γ; ε; (a_j,b_j)
Построение
f - симплекса
Определение $x_{i\,min}^{(0)}$
$\Phi^{(0)} - T(x_{i\,min}^{(0)}) \geq 0$
нет
да
Цикл минимизации $f(x)$
Построение
T - симплекса
нет
Замена $x_{imax}^{(0)}$ …
Минимизация $T(x)$
Замена $x_{i\,max}^{(0)}$ на $\hat{x}_{i\min}^{(s)}$
$x_i^{(1)}$; $i = \overline{1,r+1}$
Конец

k-й крок пошуку

1. Проводиться один цикл безумовної мінімізації $f(x)$ з використанням f-багатогранника, побудованого на нульовому кроці.

2. Визначається вершина

$$x_{i_{\min}}^{(k)} = \arg\min\{f(x_i^{(k)});\ j = \overline{1,n}\}.$$

3. Якщо

$$\Phi^{(k)} - T(x_{i_{\min}}^{(k)}) \ge 0, \quad \text{то} \Rightarrow \text{пункт 4.}$$

В противному випадку $\Rightarrow$ пункт 6.

4. Перевіряється умова закінчення пошуку:

$$\Phi^{(k)} \le \varepsilon.$$

Якщо вона виконується, то обчислювальний процес завершується.
В противному випадку $\Rightarrow$ пункт 5.

5. Проводиться заміна:
– або точки $x_{i_{\max}}^{(k)}$ на одну з точок: $x_{r+3}^{(k)}$, $x_{r+4}^{(k)}$ чи $x_{r+4}^{(k)}$;
– або всіх точок, крім $x_{i_{\min}}^{(k)}$ (після операції редукції).

Далі $k := k+1$.

6. Якщо

$$\Phi^{(k)} - T(x_{i_{\min}}^{(k)}) < 0,$$

то в E^n будується новий симплекс (T-симплекс) з $(n+1)$ вершинами, призначений для мінімізації $T(x)$ в околі $x_{i_{\min}}^{(k)}$.

Початкова вершина $\hat{x}_1^{(0)} = x_{i_{\min}}^{(k)}$.

Координати інших вершин обчислюються, виходячи з рекомендованої відстані між ними:

$$t = 0{,}05\,\Phi^{(k)}.$$

7. Реалізується процедура безумовної мінімізації $T(x)$ в околі $x_{i_{\min}}^{(k)}$.

Процедура завершується знаходженням точки $\hat{x}_{i_{\min}}^{(s)}$, яка задовольняє умові допустимості/квазидопустимості:

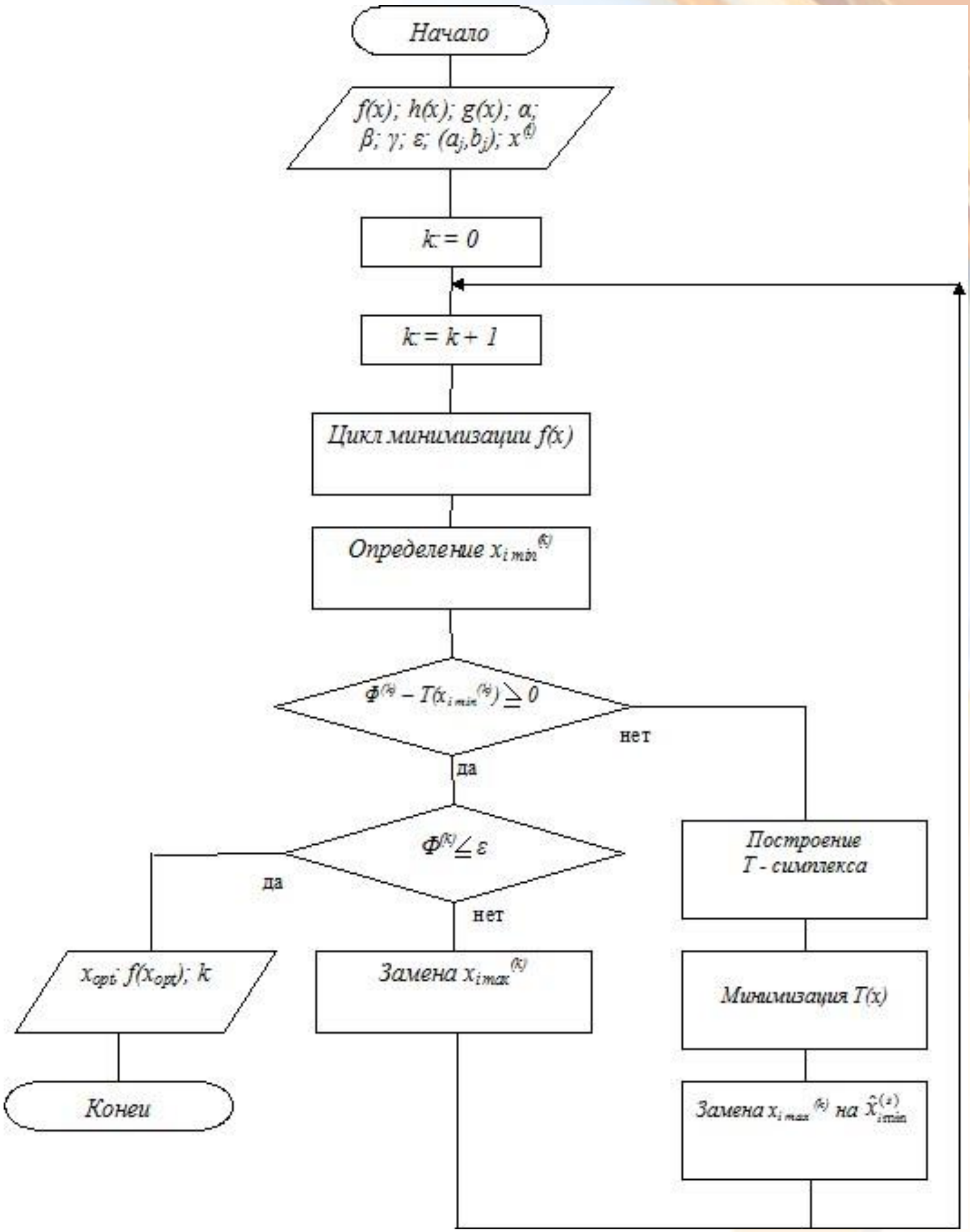
$$\Phi^{(k)} - T(\hat{x}_{i_{\min}}^{(s)}) \geq 0.$$

8. Проводиться заміна: точка $\hat{x}_{i_{\min}}^{(s)}$ вводиться в склад вершин f-багатогранника замість вершини $x_{i_{\max}}^{(k)}$.

Далі $k := k + 1$.

Рекомендовані параметри:

$$\alpha = 1; \quad \beta = 0{,}5; \quad \gamma = 2; \quad \varepsilon = 10^{-5}.$$


Начало
f(x); h(x); g(x); α; β; γ; ε; (a_j,b_j); x^(0)
k:= 0
k:= k + 1
Цикл минимизации f(x)
Определение x_i min^(k)
Ф^(k) – T(x_i min^(k)) ≥ 0
нет
да
Ф^(k) ≤ ε
да
нет
Построение T - симплекса
x_opt; f(x_opt); k
Замена x_i max^(k)
Минимизация T(x)
Замена x_i max^(k) на x̂_i min^(s)
Конец