Університет митної справи та фінансів

Оптимізаційні методи та моделі

доц. Лебідь О.Ю.

Дніпропетровськ
2016

Тема 12: Нелінійні задачі оптимізації. Метод множників Лагранжа

План

1. Умовний та безумовний екстремуми функцій
2. Ідея методу множників Лагранжа
3. Метод множників Лагранжа
4. Приклад
5. Узагальнений метод множників Лагранжа
6. Необхідні умови існування сідлової точки

Методи розв'язання задач нелінійної оптимізації

Методи розв'язування задач нелінійної оптимізації бувають **прямі та непрямі**.

За допомогою прямих методів знаходження оптимальних планів здійснюють у напрямку найшвидшого збільшення (зменшення) значення цільової функції. Типовим представником цієї групи методів є **градієнтні**. Методика застосування непрямих методів передбачає зведення задачі до такої, оптимум якої слід знаходити простішими методами.

Математична постановка задачі нелінійної оптимізації

Найпростішими для розв'язування є задачі нелінійної оптимізації, в яких система обмежень складається лише з рівнянь.

Знайти

$$z = z(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max(\min) \qquad (1)$$

за умов

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i \quad (i = \overline{1,m}), \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n}). \qquad (3)$$

Якщо хоча б одна з функцій ($z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ або $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = \overline{1,m}$) є нелінійною.

Умовний та безумовний екстремуми функцій

У безумовних нелінійних задач оптимізації локальний та глобальний екстремуми визначаються з необхідних та достатніх умов існування екстремуму функції.

Умовний та безумовний екстремуми функцій

Необхідна умова існування локального екстремуму функції двох змінних формулюється: для того, щоб точка (x_1^0, x_2^0) була точкою локального екстремуму, необхідно, щоб функція $f(x_1, x_2)$ була неперервною і диференційовною в околі цієї точки і перші частинні похідні за змінними x_1 та x_2 у цій точці дорівнювали нулю:

$$\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} = 0.$$

Точка (x_1^0, x_2^0) називається **критичною**.

Умовний та безумовний екстремуми функцій

Достатня умова існування локального екстремуму функції двох змінних: для того, щоб критична точка (x_1^0, x_2^0) була точкою локального екстремуму, достатньо, щоб функція $f(x_1, x_2)$ була визначена в околі критичної точки (x_1^0, x_2^0) та мала в цій точці неперервні частинні похідні другого порядку.

Умовний та безумовний екстремуми функцій

Тоді, якщо $\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0,x_2^0)}{\partial x_1^2}\right]\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0,x_2^0)}{\partial x_2^2}\right]-\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0,x_2^0)}{\partial x_1\partial x_2}\right]^2>0$, то в точці (x_1^0,x_2^0) функція $f(x_1,x_2)$ має екстремум, причому, якщо $\frac{\partial^2 f(x_1^0,x_2^0)}{\partial x_1^2}<0$, тоді (x_1^0,x_2^0) – **точка локального максимуму** функції $f(x_1,x_2)$, а якщо $\frac{\partial^2 f(x_1^0,x_2^0)}{\partial x_1^2}>0$, тоді (x_1^0,x_2^0) – **точка локального мінімуму** функції $f(x_1,x_2)$.

Умовний та безумовний екстремуми функцій

У разі, якщо

$$\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1^2}\right]\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2^2}\right]-\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1 \partial x_2}\right]^2 < 0,$$

то в точці (x_1^0, x_2^0) функція $f(x_1, x_2)$ **екстремуму не має**.

Якщо

$$\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1^2}\right]\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2^2}\right]-\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1 \partial x_2}\right]^2 = 0,$$

то питання про існування екстремуму залишається **відкритим**.

Приклад задачі двох змінних умовної нелінійної оптимізації

Знайти

$$\max(\min) f(x_1, x_2) \quad (4)$$

за умови, що

$$q(x_1, x_2) = b \quad (5)$$

Найпростіший спосіб розв'язання задачі такого виду полягає в тому, що спочатку з обмеження (5) знаходять вираз однієї змінної через іншу.

Приклад задачі двох змінних умовної нелінійної оптимізації

Наприклад, визначають x_2 через x_1. Отриманий вираз виду $x_2 = g(x_1)$ підставляють у функцію (4), що після цього стає функцією однієї змінної $f(x_1, g(x_1))$, і далі знаходять її безумовний екстремум.

Якщо деяка точка x_1^* є точкою екстремуму функції $f(x_1, g(x_1))$, то точка $X^*(x_1^*, x_2^* = g(x_1^*))$ є точкою умовного екстремуму функції (4) за умови (5).

Приклад задачі двох змінних умовної нелінійної оптимізації

Однак **не завжди вдається** відшукати аналітичний вираз однієї змінної через іншу в умові (5). Часто це досить важко здійснити або неможливо. Також іноді складно узагальнити даний спосіб для функції *n* змінних, на які накладено *m* обмежень. Тому описана досить проста ідея зведення задачі відшукання умовного екстремуму функції кількох змінних до задачі на безумовний екстремум функції однієї змінної не може бути використана як основа універсального методу розв'язування задач на умовний екстремум.

Ідея методу множників Лагранжа

Ідея методу множників Лагранжа полягає в заміні початкової задачі простішою.

Від початкової задачі пошуку умовного екстремуму переходимо до задачі відшукання безумовного екстремального значення іншої функції. Отже, завдяки такому перетворенню можливе застосування методів класичного знаходження екстремуму функції кількох змінних.

Метод множників Лагранжа

Знайти

$$\max(\min)Z = f(x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n) \qquad (6)$$

за умов:

$$q_i(x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n) = b_i \quad (i = \overline{1,m}), \qquad (7)$$

де функції $f(x_1, \; x_2, \; \ldots, \; x_n)$ і $q_i(x_1, \; x_2, \; \ldots, \; x_n)$ мають бути диференційовними.

Задача (6)-(7) полягає в знаходженні екстремуму функції $f(x)$ за умов виконання обмежень $q_i, \; (i = \overline{1, m})$.

Метод множників Лагранжа

Переходимо до задачі пошуку безумовного екстремуму. Теоретично доведено, що постановки та розв'язання таких задач **еквівалентні**.

Замінюємо цільову функцію (6) на складнішу. Ця функція **називається функцією Лагранжа** і має такий вигляд:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(x_1, x_2, ..., x_n)), \quad (8)$$

де λ_i – деякі невідомі величини, що називаються **множниками Лагранжа**.

Метод множників Лагранжа

Знайдемо частинні похідні і прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 0, & \left(j = \overline{1,n}\right); \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0, & \left(i = \overline{1,m}\right). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_j} = 0 & \left(j = \overline{1,n}\right); \\ b_i - q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, & \left(i = \overline{1,m}\right). \end{cases} \qquad (9)$$

Друга група рівнянь системи (9) забезпечує виконання умов (7) початкової задачі нелінійної оптимізації.

Система (9), як правило, нелінійна.

Метод множників Лагранжа

Розв'язками (9) є $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ і $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_m^*)$ – стаціонарні точки. Оскільки, ці розв'язки отримані з необхідної умови екстремуму, то вони визначають максимум, мінімум задачі (6)-(7) або можуть бути точками перегину (**сідловими точками**).

Для діагностування стаціонарних точок і визначення типу екстремуму необхідно перевірити виконання достатніх умов екстремуму, тобто дослідити в околі стаціонарних точок диференціали другого порядку (якщо для функцій $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, $q_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ існують другі частинні похідні і вони неперервні).

Метод множників Лагранжа

Узагальнення достатньої умови існування локального екстремуму для функції n змінних приводить до такого правила: за функцією Лагранжа виду (8) будується матриця Гессе, що має блочну структуру розмірністю $(m+n)\times(m+n)$:

$$H=\left(\begin{array}{c:c} O & P \\ \hdashline P' & Q \end{array}\right)$$

Метод множників Лагранжа

де O – матриця розмірністю $(m\times m)$, що складається з нульових елементів,

P – матриця розмірністю $(m\times n)$, елементи якої визначаються так: $P=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial q_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial q_1(x)}{\partial x_n} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \dfrac{\partial q_m(x)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial q_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$,

P' – транспонована матриця до P розмірністю $(n\times m)$,

Q – матриця розмірністю $(n\times n)$ виду:

$Q=\left\| \dfrac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_i \partial x_j} \right\|$, де $i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$.

Метод множників Лагранжа

Розглянемо ознаки виду екстремуму розв'язку системи (9). Нехай стаціонарна точка має координати $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ і $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_m^*)$.

1. Точка X^* є точкою максимуму, якщо, починаючи з головного мінору порядку (m+1), наступні (n–m) головних мінорів матриці H утворюють знакозмінний числовий ряд, знак першого члена якого визначається множником $(-1)^{m+1}$.

2. Точка X^* є точкою мінімуму, якщо, починаючи з головного мінору порядку (m+1), знак наступних (n–m) головних мінорів матриці H визначається множником $(-1)^m$.

Приклад

Акціонерне товариство з обмеженою відповідальністю виділило 1200 Га ріллі під основні сільськогосподарські культури – озиму пшеницю і цукрові буряки. У табл. 1 маємо техніко-економічні показники вирощування цих культур:

Показник	Озима пшениця x_1, сотні га	Цукрові буряки x_2, сотні га
Урожайність, т/га	4	35
Ціна, грн/т	800	300
Собівартість, грн/т	$y_1 = 12,5x_1^2 - 200x_1 + 1200$	$y_2 = 12,5x_2^2 - 150x_2 + 650$

Необхідно знайти оптимальні площі посіву озимої пшениці та цукрових буряків.

Приклад

Нехай: x_1 – площа ріллі під озимою пшеницею, сотні Га;

x_2 – площа ріллі під цукровими буряками, сотні Га.

Звернемо увагу на те, що собівартість тонни пшениці та цукрових буряків залежить від відповідної площі посіву.

Приклад

Запишемо економіко-математичну модель цієї задачі.

Критерієм оптимальності візьмемо максимізацію чистого доходу:

$$\max f = 4(800 - 12{,}5x_1^2 + 200x_1 - 1200)x_1 100 +$$
$$+ 35(300 - 12{,}5x_2^2 + 150x_2 - 650)x_2 100 =$$
$$= 400(-12{,}5x_1^3 + 200x_1^2 - 400x_1) + 3500(-12{,}5x_2^3 + 150x_2^2 - 350x_2)$$

за умов:

$$x_1 + x_2 = 12.$$

Приклад

Запишемо функцію Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda_1) = 400(-12{,}5x_1^3 + 200x_1^2 - 400x_1) + 3500(-12{,}5x_2^3 + 150x_2^2 - 350x_2) + \\ + \lambda_1(12 - x_1 - x_2).$$

Візьмемо частинні похідні і прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 400\left(-37{,}5x_1^2 + 400x_1 - 400\right) - \lambda_1 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 3500\left(-37{,}5x_2^2 + 300x_1 - 350\right) - \lambda_1 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 12 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Приклад

З цієї системи рівнянь визначаємо координати сідлових точок. З першого та другого рівняння знаходимо λ_1 і, прирівнюючи вирази, маємо:

$$400(-37{,}5x_1^2 + 400x_1 - 400) = 3500(-37{,}5x_2^2 + 300x_2 - 350) \qquad (10)$$

або, скоротивши на 100 обидві частини і розкривши дужки, отримаємо:

$$150x_1^2 + 1600x_1 - 1600 = 1312{,}5x_2^2 + 10\,500x_2 - 12\,250. \qquad (11)$$

Із останнього рівняння системи маємо: $x_1 = 12 - x_2$.

Приклад

Підставимо вираз для x_1 у рівність (11). Отримаємо:

$$-150(12-x_2)^2+1600(12-x_2)-1600=-1312{,}5x_2^2+10\,500x_2-12\,250$$

або

$$-150\left(144-24x_2+x_2^2\right)+19\,200-1600x_2-1600=$$

$$=-1312{,}5x_2^2+10\,500x_2-12\,250\ ;$$

$$21\,600+3600x_2-150x_2^2+19\,200-1600x_2-1600+$$

$$+1312{,}5x_2^2-10\,500x_2+12\,250=0.$$

Приклад

Отже, $1162x_2^2 - 8500x_2 + 11\,450 = 0$;

$$D = 72\,250\,000 - 53\,219\,600 = 19\,030\,400$$

$$\sqrt{D} \approx 4362 .$$

$$x_2^{(1)} = \frac{8500 + 4362}{2324} \approx 5{,}53 \quad \text{(553 Га);}$$

$$x_2^{(2)} = \frac{8500 - 4362}{2324} \approx 1{,}78 \quad \text{(178 Га).}$$

Відповідно дістаємо:

$$x_1^{(1)} \approx 6{,}47 \quad \text{(647 Га);}$$

$$x_1^{(2)} \approx 10{,}22 \quad \text{(1022 Га).}$$

Приклад

Тобто отримали дві сідлові точки:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 6{,}47; \\ x_2^{(1)} = 5{,}53. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^{(2)} = 10{,}22; \\ x_2^{(2)} = 1{,}78. \end{cases}$$

Перевіримо за допомогою достатньої умови існування екстремуму спочатку сідлову точку $X_1{}^* = (x_1^{(1)}; x_2^{(1)})$.

Матриця Гессе має такий вигляд:

$$H = \left(\begin{array}{c:cc} 0 & 1 & 1 \\ \hdashline 1 & -34100 & 0 \\ 1 & 0 & -401625 \end{array}\right).$$

Приклад

За вищезазначеним правилом визначаємо головні мінори, починаючи з 2-го порядку ($m+1=1+1=2$):

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -34100 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -34100 & 0 \\ 1 & 0 & -401625 \end{vmatrix} = 435725.$$

Отже, головні мінори утворюють знакозмінний ряд та, починаючи з головного мінору 2-го порядку, наступний мінор визначається знаком $(-1)^{m+1} = (-1)^2$, тобто $X_1^* = (x_1^{(1)}; x_2^{(1)})$ є точкою максимуму.

Приклад

Обчислимо значення цільової функції в цій точці:

$$f(x_1 = 6{,}47;\, x_2 = 5{,}53) = 4(800 - 532{,}26 + 1294 - 1200)647 +$$
$$+ 35(300 - 382{,}26 + 829{,}5 - 650)553 = 4625863.$$

Аналогічні обчислення для точки $X_1^* = (x_1^{(2)} = 10{,}22;\, x_2^{(2)} = 1{,}78)$ показують, що вона не є екстремальною.

Отже, цільова функція набуде максимального значення, якщо озима пшениця вирощуватиметься на площі 647 Га, а цукрові буряки – на площі 553 Га.

Узагальнений метод множників Лагранжа

Розглянемо таку задачу в загальному вигляді:

$$\max(\min) F = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$\begin{cases} q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i \ (i = 1,2,\ldots,k); \\ q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i \ (i = k+1,\ldots,l); \\ q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge b_i \ (i = l+1,2,\ldots,m), \end{cases}$$

причому всі функції, що входять у задачу, мають бути диференційовними хоча б один раз.

Узагальнений метод множників Лагранжа

Очевидно, що введення в ліві частини нерівностей системи обмежень задачі додаткових невід'ємних змінних $x_{n+i} \geq 0 \ (i = k+1,...,m)$ перетворює початкову задачу в таку, що містить лише обмеження-рівності, тобто яка за формою та методом розв'язування збігатиметься з задачею (6)-(7).

Необхідні умови існування сідлової точки

Для розроблення методів розв'язування окремих типів задач нелінійного програмування важливе значення має поняття сідлової точки, а також визначення необхідних і достатніх умов існування сідлових точок функції Лагранжа $L(X,\Lambda)$ у ($n+m$)-вимірному просторі змінних $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ за довільних умов, які можуть накладатися на їх знаки.

Необхідні умови існування сідлової точки

Розглянемо нелінійну задачу:

$$\max F = f(x_1, x_1, \ldots, x_n),$$

$$q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i \ (i = \overline{1, m}).$$

Причому на компоненти векторів X, Λ накладено обмеження на знаки. Позначимо множину точок, що задовольняють такі обмеження, через Ω.

Функція Лагранжа для цієї задачі має вигляд:

$$L(X, \Lambda) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)) . \quad (12)$$

Необхідні умови існування сідлової точки

Точка $(X^*, \Lambda^*) = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_m^*)$ називається сідловою точкою функції Лагранжа (12), якщо для всіх $X \in \Omega, \Lambda \in \Omega$ виконується співвідношення:

$$L(X, \Lambda^*) \le L(X^*, \Lambda^*) \le L(X^*, \Lambda). \qquad (13)$$

Для диференційовних функцій $f(X)$ та $q_i(X)$ знайдемо необхідні умови існування сідлової точки.

Сідлова точка $(X^*, \Lambda^*) = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_m^*)$ функції $L(X, \Lambda)$ виду (12) за означенням задовольняє умову:

$$L(X, \Lambda^*) \le L(X^*, \Lambda^*).$$

Необхідні умови існування сідлової точки

Нерівність виконується для всіх точок X, тобто також і для тих, у яких лише одна координата відрізняється від X*. Допустимо, що це x_k, а всі інші збігаються з координатами сідлової точки $x_j = x_j^* \ (j = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n)$.

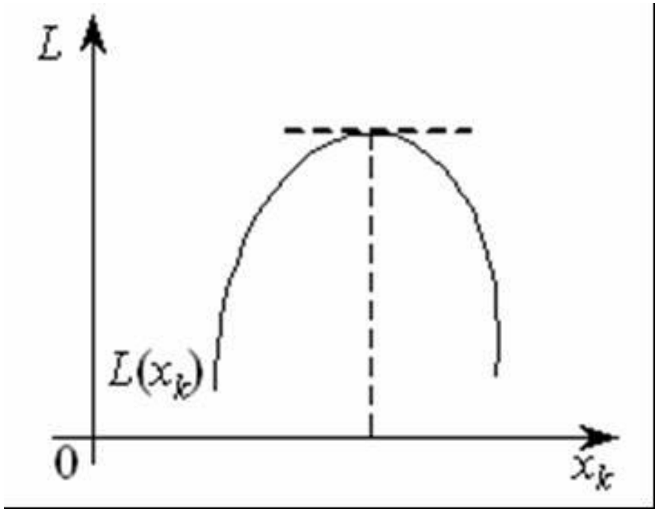
Оскільки права частина нерівності є фіксованою, а в лівій частині змінюється лише одна координата x_k, то приходимо до функції однієї змінної $L(X, \Lambda^*) = L(x_k)$, яку можна зобразити графічно на координатній площині.

Необхідні умови існування сідлової точки

Розглянемо спочатку випадок, коли $x_k \geq 0$, тобто лише частину координатної площини, для якої $x_k \geq 0$.

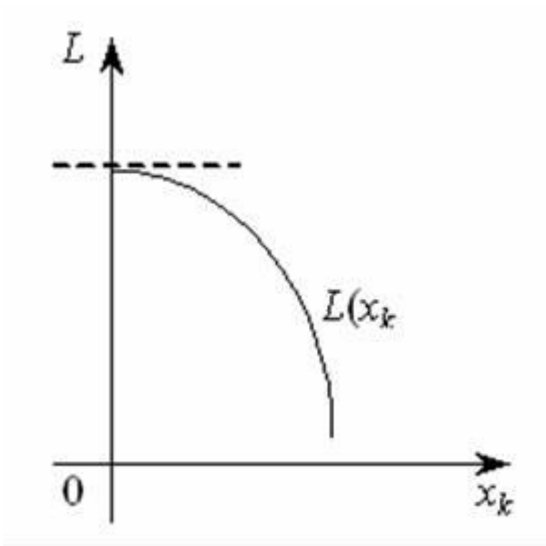
Можливі такі випадки:

1) коли всі $x_j^* > 0$, то максимальне значення функції $L(x_k)$ досягатиметься в точці, для якої $\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_k} = 0$.



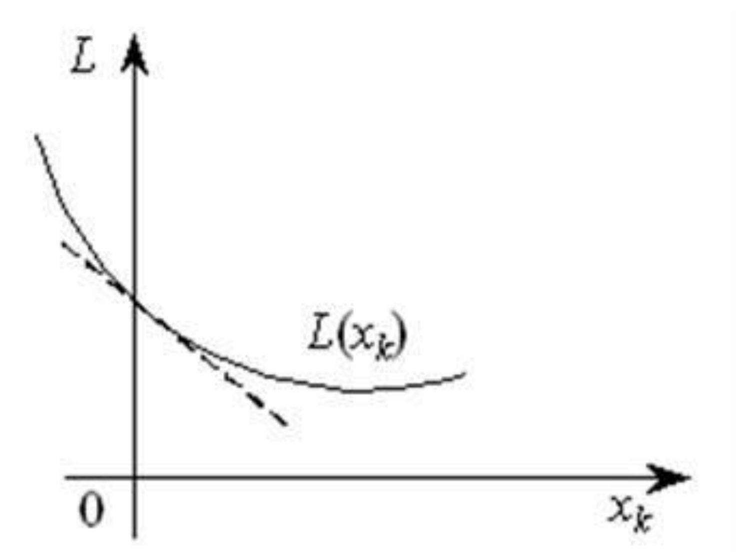
Необхідні умови існування сідлової точки

2) коли максимум функції $L(x_k)$ досягатиметься в точці $x_k = 0$ і розглядувана частинна похідна також дорівнюватиме нулю: $\dfrac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_k} = 0$.



Необхідні умови існування сідлової точки

3) коли точка максимуму функції $L(x_k)$ досягатиметься також у точці $x_k = 0$, а частинна похідна $\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_k} \le 0$.



Необхідні умови існування сідлової точки

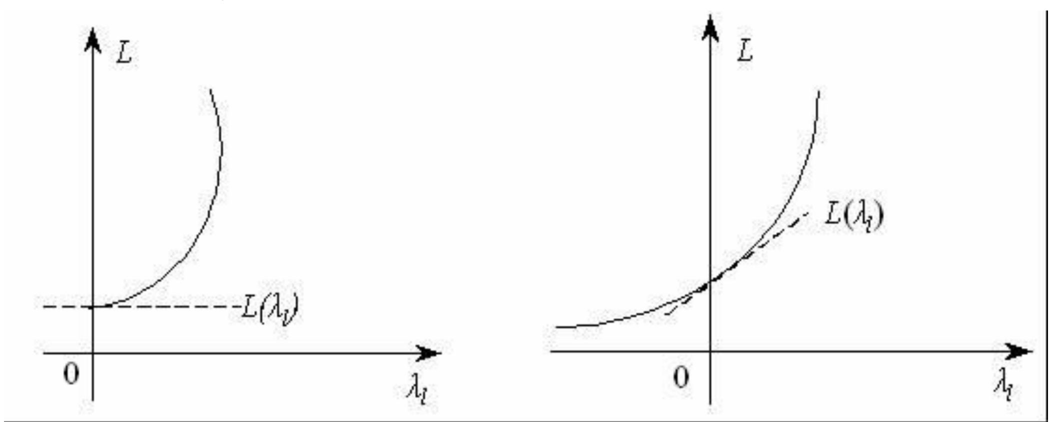
Узагальнюючи всі три ситуації, маємо:

$$\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_j} \le 0 \text{ для } x_j \ge 0 \text{ та } \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_j}(x_j^*) = 0.$$

Розглядаючи другу частину нерівності (13):

$$L(X^*,\Lambda^*) \le L(X^*,\Lambda)$$

аналогічними міркуваннями, що проілюстровані на рис., встановлюються необхідні умови для похідних по λ_l функції Лагранжа в сідловій точці.



Необхідні умови існування сідлової точки

Об'єднуючи всі три випадки для невід'ємних координат, маємо необхідні умови сідлової точки:

$$\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_j} \le 0 \text{ для тих індексів } j\text{, де } x_j \ge 0. \quad (14)$$

Зауважимо, що для $x_k \le 0$ маємо ті самі випадки, які зображено на відповідних рисунках, причому графіки будуть симетрично відображені відносно осі Оу, тобто для недодатних координат необхідна умова має вигляд:

$$\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_j} \ge 0 \text{ для тих індексів } j\text{, де } x_j \le 0. \quad (15)$$

Необхідні умови існування сідлової точки

І нарешті, якщо на знак x_j умови не накладаються, то необхідною умовою є:

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} = 0, \quad x_j \text{ – довільного знака.} \qquad (16)$$

Узагальнення всіх випадків приводить до рівняння:

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} \cdot x_j^* = 0 \; . \qquad (17)$$

Необхідні умови існування сідлової точки

Розглядаючи другу частину нерівності (13), за допомогою аналогічних міркувань встановлюємо необхідні умови для похідних по λ_i функції Лагранжа в сідловій точці:

$$\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \geq 0$$ для тих індексів *i*, де $\lambda_i \geq 0$, (18)

$$\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \leq 0$$ для тих індексів *i*, де $\lambda_i \leq 0$, (19)

$$\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial \lambda_i} = 0$$ для тих *i*, де λ_i має довільний знак. (20)

Необхідні умови існування сідлової точки

Отже, справджується рівняння:

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \cdot \lambda_i^* = 0 . \qquad (21)$$

Сукупність співвідношень (14)-(21) становить необхідні умови, які має задовольняти сідлова точка (X^*, Λ^*) функції Лагранжа для точок, що належать множині Ω. При цьому $L(X^*, \Lambda^*)$ повинна мати частинні похідні по всіх компонентах векторів X, Λ.

Список літератури

Основна:

1. **Зайченко Ю. П.** Дослідження операцій : підручник / Ю. П. Зайченко. – К. : ВІПОЛ, 2000.
2. **Таха Х.** Введение в исследование операций / Х. Таха. – М. : Вильямс, 2001.
3. **Ульянченко О. В.** Дослідження операцій в економіці / О. В. Ульянченко. – Х. : Гриф, 2003.

Додаткова:

1. **Вітлінський В. В.** Математичне програмування / В. В. Вітлінський, С. І. Наконечний, Т. О. Терещенко. – К., 2001.
2. **Кузнецов А. В.** Математическое программирование / А. В. Кузнецов и др. – М.: Высшая школа, 1994.