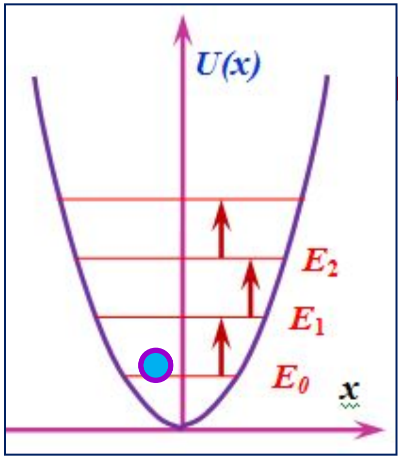
Курс физики для студентов 1-2 курса БГТУ

Кафедра физики БГТУ
доцент Крылов Андрей Борисович

Часть I.
Элементы квантовой механики



Лекция 12 (2 сем).

Элементы квантовой механики

1. Корпускулярно-волновая двойственность свойств частиц вещества. Некоторые свойства волн де Бройля. Вероятностный смысл волн де Бройля.

2. Соотношение неопределенностей Гейзенберга.

3. Волновая функция и уравнение Шредингера.

4. Уравнение Шредингера для свободной частицы.

5. Электрон в потенциальном ящике. Квантование энергии.

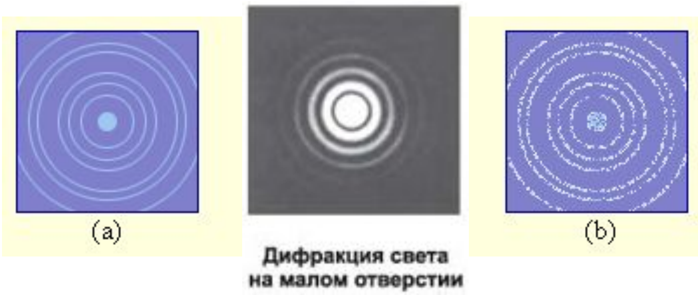
6. Линейный гармонический осциллятор. Нулевая энергия, которая не равна нулю.

7. Прохождение частицы сквозь потенциальный барьер: туннельный эффект.

2017

1. Корпускулярно-волновой дуализм

- В начале XX века стало ясно, что свет обладает двойственной (**дуалистической**) природой:



Картина **дифракции электронов** на поликристаллическом образце при длительной экспозиции (**a**) и при короткой экспозиции (**b**). В случае (**b**) видны точки попадания отдельных электронов на фотопластинку

- При распространении света в пространстве проявляются его волновые свойства (**интерференция**, **дифракция**, **поляризация**),
- **При взаимодействии с веществом** – корпускулярные свойства (фотоэффект, эффект Комптона). Корпускула - частица
- Эта двойственная природа света получила название ***корпускулярно-волнового дуализма***.
- Позже двойственная природа была открыта у электронов и других элементарных частиц.

Классическая физика **не может дать наглядной модели** сочетания волновых и корпускулярных свойств у микрообъектов.
Движением микрообъектов управляют не законы классической механики Ньютона, а **законы квантовой механики**.

+4

Гипотеза де Бройля

- **Квантовые свойства света** все более отчетливо проявляются **с уменьшением длины волны λ**, а **при увеличении длины волны** основную роль играют **волновые свойства**.
  - **Корпускулярные свойства** обусловлены тем, что свет испускается **фотонами**, имеющими:

1) энергию

$$\boxed{E = h\nu}$$

2) импульс

$$\boxed{p = \frac{h}{\lambda}}$$

3) массу

$$\boxed{m = \frac{h\nu}{c^2}}$$

где ***$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с*** – постоянная Планка.

- Луи де Бройль **в 1924 г. высказал гипотезу** о том, что поскольку свет обладает двойственной природой, то и **материальная частица должна обладать волновыми свойствами**.
- Эта идея и получила название **корпускулярно-волнового дуализма** (в узком смысле).
- **Каждой частице**, обладающей импульсом ***p***, должна соответствовать длина волны **λ**, связанная с импульсом ***p*** тем же соотношением, что и для фотона:

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p}}$$

формула де Бройля

1892-1987

Длина волны де Бройля λ

Если частица массой m_0 движется со скоростью $\upsilon << c$, то длина волны де Бройля:

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p}} \rightarrow \boxed{\lambda = \frac{h}{m_0 \upsilon}}$$

- Если частица имеет кинетическую энергию $W_к$, то ее импульс p через энергию выражается как:

$$p = \sqrt{2mW_к} \rightarrow$$

длина волны де Бройля: $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mW_к}}$

- ***Вывод:*** длина волны де Бройля **тем меньше**, чем **больше** масса и скорость частиц.
  - Так, для пылинки массой $m=10^{-3}$ *г*: **$v=1$ м/с, $\lambda \sim 10^{-28}$ м.**
  - При таких условиях волновые свойства проявиться не могут.
- А вот для микрочастиц с массой $m \sim 10^{-27}$ *кг* длина волны де Бройля оказывает **сравнимой с расстоянием между атомами** в твердых телах **$\lambda \sim 10^{-10}$ м**, которое можно измерить современной аппаратурой.
- ***Вывод 2:*** волновые свойства **заметно** проявляются:
  - для микрочастиц, которые обладают **малой массой *m***, или
  - в случае, если длина волны де Бройля **λ становится соизмеримой с размерами** области пространства, в которой может двигаться частица.

2. Принцип неопределенностей Гейзенберга

Гейзенберг Вернер Карл
1901-1976

- Согласно квантовой механике состояние частицы в каждый момент времени **нельзя** характеризовать **точными** значениями ее координаты **и** импульса в этот момент времени.
  - Если в каком-либо состоянии координата известна с неопределенностью ***Δx***, а импульс − с неопределенностью ***δp***, то обе эти величины **одновременно** не могут быть сколь угодно малыми.
  - Они связаны соотношением: $\boxed{\delta x\cdot\delta p\geq h}$ или $\boxed{\delta x\cdot\delta p\geq\hbar}$

где ***h*** − **постоянной Планка**, а − **приведённая постоянной Планка:** $\hbar=\frac{h}{2\pi}=\frac{6{,}63\cdot10^{-24}}{2\pi}\approx1{,}054\,\frac{Дж\cdot с}{рад}$

- Для объема неопределенности в значениях этих величин удовлетворяют условию:

$$\Delta x\cdot\Delta p_x\geq\hbar,\quad \Delta y\cdot\Delta p_y\geq\hbar,\quad \Delta z\cdot\Delta p_z\geq\hbar,\quad \Delta t\cdot\Delta E\geq\hbar.$$

В этих формулах ***Δx, Δy, Δz*** означают интервалы координат, в которых может быть локализована частица, описываемая волной де Бройля; ***Δp_x, Δp_y, Δp_z*** - интервалы, в которых заключены проекции импульса частицы на оси x, y, z соответственно.

Для макроскопических тел приведенную постоянную Планка в формуле можно считать пренебрежимо малой (***ħ → 0***). В этих случаях **значения неопределенности координаты и скорости малы** и можно рассматривать движение тела по траектории в соответствии с законами классической механики.

3. Волновая функция микрочастиц ψ(x, t)

буква ψ читается «**пси**»

- Выше установлено, **что распространение микрочастиц** происходит так, как если бы их движение описывалось **волнами**.
- Известно, что распространение **фотонов** (как распространение **монохроматической плоской световой волны** с циклической частотой **ω** и волновым числом **k**) описывается уравнением синусоидальной волны: $\psi(x, t) = A\cos(\omega t - kx)$

Представим это уравнение для частицы

Выразим циклическую частоту **ω** через энергию частицы E:

$$\omega = \frac{2\pi E}{h}$$

$$\psi(x,t) = A\cos\left[\omega t - kx)\right]$$

Выразим волновое число k через импульс частицы p:

$$k = \frac{2\pi p}{h}$$

$$\psi(x,t) = A\cos\left[\frac{2\pi}{h}(Et - px)\right]$$

Причем, если произвести замену:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

приведенная постоянная Планка

$$\psi(x,t) = A\cos\left[\frac{1}{\hbar}(Et - px)\right]$$

Для частиц эта волновая функция **ψ (x, t)** называется **плоской волной де Бройля**.

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$

Волновая функция микрочастиц $\psi(x, t)$ и ее физический смысл

$$\psi(x,t) = A\cos\left[\frac{1}{\hbar}(Et - px)\right]$$

$$\psi(x,t) = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)}$$

Формула плоской волны де Бройля в обычной форме — в комплексной форме

- **Волны де Бройля** распространяются, интерферируют (складываются) и дифрагируют (отклоняются на препятствиях) по **обычным оптическим законам**.
- Функция ψ используется для того, чтобы **описать распределение вероятности** нахождения частицы **в данный момент времени в некоторой области пространства**.
- Эту функцию называют волновой функцией (**пси-функцией**) и определяют следующим образом: вероятность dp того, что частица находится в элементе объема dV, пропорциональна $|\psi|^2$ и элементу объема dV: $dp = |\psi|^2 dV$
- В этом уравнении волновая функция зависит от координат и времени: $\psi = \psi(x,y,z,t)$
- **Физический смысл** имеет квадрат модуля волновой функции: $|\psi|^2$, которая имеет смысл плотности вероятности:

$$\frac{dp}{dV} = |\psi|^2$$

- т. е. определяет **вероятность пребывания частицы в данной точке** пространства. Другими словами, величина $|\psi|^2$ определяет **интенсивность волн де Бройля**.

Условие нормировки

- Из определения волновой функции следует, что она должна удовлетворять следующему условию, называемому **условием нормировки вероятностей**:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 \, dV = 1$$

где интеграл вычисляется **по всему бесконечному пространству**.

- Это условие означает, что пребывание частицы где-либо в пространстве **есть достоверное событие** и его **вероятность** равна единице.

- Квантовая механика **не позволяет определить точное местоположение** частицы в пространстве или траекторию частицы.
- С помощью волновой функции можно лишь **предсказать**, с какой вероятностью частица может быть обнаружена в различных точках пространства.
- Движение по определенной траектории **несовместимо** с волновыми свойствами.

Временное (нестационарное) уравнение Шредингера

Эрвин Шредингер
1887-1961

- Описания поведения микрочастиц дается в **квантовой механике**.
- Для решения этой задачи в квантовой механике нужно учесть **двойственность свойств частиц**.
  - Основное уравнение квантовой механики должно быть уравнением относительно функции ***ψ(x, y, z)***.
  - Это уравнение должно быть **волновым уравнением**, так как из него должны получить свое объяснение эксперименты по дифракции микрочастиц, указывающие на их волновые свойства.
- Основное уравнение нерелятивистской квантовой механики было найдено **в 1926 г**. **Э. Шредингером** и имеет следующий вид:

$$\boxed{-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U\psi}$$

нестационарное (временное) уравнение Шредингера.

$i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица; m – масса частицы;

$\hbar$ - постоянная Планка, деленная на 2π (приведённая постоянная Планка);

Δ - оператор Лапласа $\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$;

$U = U(x, y, z, t)$ - потенциальная энергия частицы.

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

Стационарное уравнение Шредингера

Эрвин Шредингер

- Вид волновой функции определяется **потенциальной энергией *U***, т. е. природой сил, действующих на частицу.
- Для **стационарного** (**не меняющегося со временем**) силового поля ***U*** **не зависит от времени *t***.
- В этом случае функция ***ψ*** распадается на два множителя, один из которых зависят **только от времени**, второй – **только от координат**:

$$\psi(x, y, z, t) = e^{-(E/\hbar)/t} \cdot \psi(x, y, z)$$

где ***E*** – полная энергия частицы.

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U\psi \quad\longrightarrow\quad \Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0$$

Нестационарное (временное) уравнение Шредингера

Стационарное уравнение Шредингера.

- Волновая функция **ψ(x, y, z)** в соответствии с ее физическим смыслом должна быть **однозначной**, конечной и непрерывной во всей области изменения переменных ***x, y, z***.
- ***Вывод:*** при указанных выше свойствах функции ***ψ(x, y, z)***, значение полной энергии ***E*** может принимать **определенные дискретные значения**.
- Эти значения называются собственными значениями энергии, а соответствующие им решения уравнения - **собственными функциями**.

4. Уравнение Шредингера для свободной частицы

- **При свободном движении частицы** ее потенциальная энергия ***U = 0***, а скорость движения постоянна (**v=const**) . Направим ось **x** вдоль вектора **v**, а при соответствующем выборе начала отсчета потенциальной энергии положим ***U = 0***. Тогда **стационарное** уравнение Шредингера примет вид:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0$$

- Оно имеет решение **в комплексном виде**:

$$\psi = Ae^{\frac{i}{\hbar}\sqrt{2mE}\cdot x} + Be^{-\frac{i}{\hbar}\sqrt{2mE}\cdot x}$$

где ***A*** и ***B*** – некоторые **действительные** постоянные.

- Решение **нестационарного** уравнения Шредингера в этом случае имеет вид:

$$\psi(x,y,z,t) = Ae^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t - \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x\right)} + Be^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t + \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x\right)}$$

- Полученное решение представляет собой **суперпозицию двух плоских монохроматических волн** с циклической частотой **ω**, равной:

$$\omega = \frac{E}{\hbar}$$

- Одна из этих волн распространяется **в положительном** направлении оси ***x*** с амплитудой ***A***, другая – **в противоположном** направлении с амплитудой ***B***.

Вывод: таким образом, **свободной частице** в квантовой механике сопоставляется **плоская монохроматическая волна де Бройля.**

Уравнение Шредингера для свободной частицы

Нестационарное (временное) уравнение Шредингера

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U\psi$$

Стационарное уравнение Шредингера.

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar}\left(E-U\right)\psi = 0$$

Для свободной частицы **решение** уравнения:

$$\psi\left(x,y,z,t\right) = \underbrace{Ae^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t-\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x\right)}}_{\text{распространяется в положительном направлении оси } x} + \underbrace{Be^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t+\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x\right)}}_{\text{распространяется в отрицательном направлении оси } x}$$

плоская монохроматическая волна де Бройля

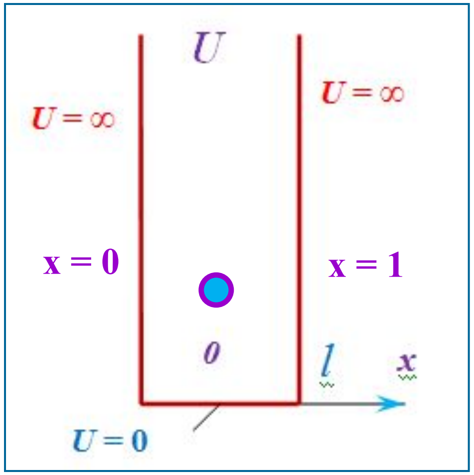
Для свободной частицы **решение** уравнения:

$$\psi = \underbrace{Ae^{\frac{i}{\hbar}\sqrt{2mE}\cdot x}}_{\text{распространяется в положительном направлении оси } x} + \underbrace{Be^{-\frac{i}{\hbar}\sqrt{2mE}\cdot x}}_{\text{распространяется в отрицательном направлении оси } x}$$

плоская монохроматическая волна де Бройля

Вывод: таким образом, **свободной частице** в квантовой механике сопоставляется **плоская монохроматическая волна де Бройля.**

5. Решение стационарного уравнения Шредингера для частицы в бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме



- Рассмотрим движение частицы вдоль направления x, при этом движение ограничено **непроницаемыми** для частицы стенками: $x = 0$ и $x = l$.
- **Потенциальная энергия** U в этом случае равна:

$$U = 0 \quad \text{при} \quad 0 \le x \le l,$$

$$U = \infty \quad \text{при} \quad x < 0 \quad \text{и} \quad x > l.$$

Уравнение Шредингера в таком случае имеет вид:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar}(E - U)\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0$$

Если только вдоль одного направления x

Вероятность обнаружить частицу за пределами ямы равна **нулю**, так как частица **не может обладать бесконечно большой энергией**.

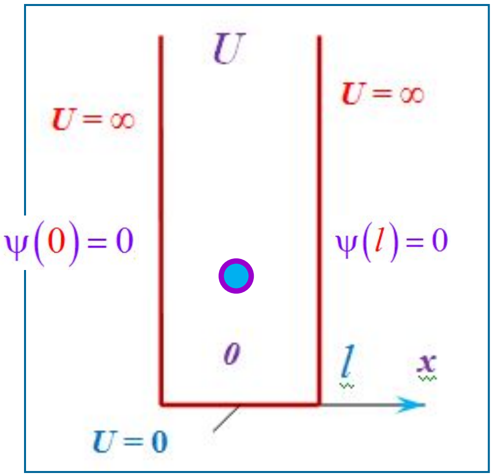
Из условия **непрерывности волновой функции** следует, что она должна быть равна нулю и **на границах ямы**:

$$\psi(0) = 0$$

$$\psi(l) = 0$$

Решение стационарного уравнения Шредингера для частицы в бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме-2

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi=0$$



В области, где ψ не равна тождественна нулю, уравнение Шредингера имеет вид:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\psi=0$$

Обозначим $\frac{2m}{\hbar^2}E=\omega^2$

Тогда $$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\omega^2\psi=0$$

- Решение такого уравнения, как известно, имеет вид:

$$\psi(x) = A\sin(\omega x + \alpha).$$

Зная граничные условия

$$\psi(0)=0$$

$$\psi(l)=0$$

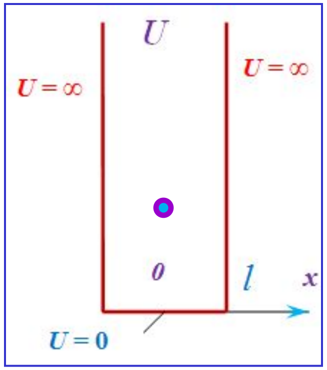
найдем ω и α

- Из условия $\psi(0) = 0$ получаем: $\psi(0) = A\sin\alpha = 0$, откуда следует, что $\alpha = 0$.

- Из условия, что $\psi(l) = A\sin\omega l = 0$ имеем: $\omega l = n\pi$, $(n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$.

Вывод: решение имеет физический смысл **не при всех** значениях энергии E

Квантование энергии



Итак, имеем решение уравнения: $\omega l = \pi n$, $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$. ⇨ $\boxed{\omega = n\pi/l}$

- Из соотношения вытекает, что решение уравнения имеет физический смысл **не при всех значениях** энергии E, а только при значениях, **удовлетворяющих условию**:

$$\omega^2 = \frac{2m}{\hbar}E = \frac{\hbar^2}{l^2}n^2 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Энергия E:

$$\boxed{E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}n^2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

- **Другие значения энергии частицы** кроме E_n **невозможны**: вероятность обнаружить внутри потенциальной ямы частицу с энергией, отличной от E_n, **равна нулю**.
- Физические величины, которые могут принимать лишь определенные дискретные значения, называются **квантованными**.
- **Энергия частицы**, находящейся в потенциальной яме, **квантуется**.
- **Терминология:**
  - квантованные значения E_n называются **уровнями энергии**,
  - числа n, определяющие энергетические уровни электрона, называются **квантовыми числами**.

Уточним формулу для волновой функции ψ

- Раз решение уравнения имеет вид: $\psi(x) = A\sin\omega x$, то уточним значение A.
- Для определения коэффициента A воспользуемся **условием нормировки** волновой функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dV = 1 \Rightarrow$$ которое в данном случае запишется так: $$A^2 \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = 1$$

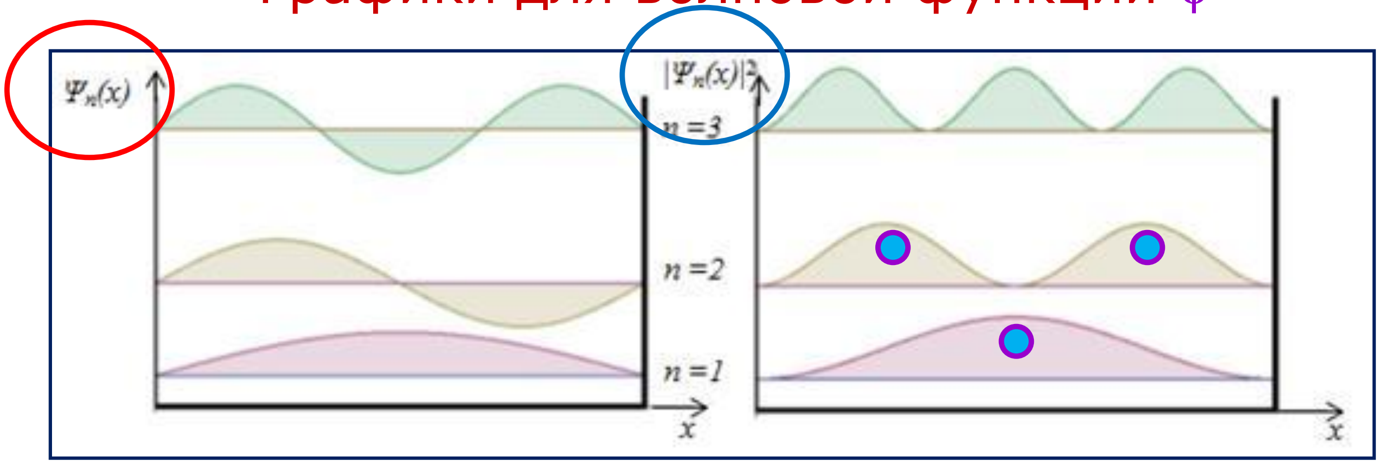
Интеграл $$\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{2} \Rightarrow A^2 \frac{l}{2} = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{l}}$$

- Собственная функция частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме имеет вид:

$$\boxed{\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

- Рассмотрим **графики волновой функции** $\psi(x)$ и **плотности вероятности** $\psi^2(x)$ обнаружения частицы на различных расстояниях от стенки ямы **при разных значениях** n.

Графики для волновой функции ψ



- Графики **волновой функции ψ(x)** и **плотности вероятности ψ^2(x)** обнаружения частицы на различных расстояниях от стенки ямы при разных значениях ***n***.

Плотность вероятности меняется в зависимости от *n*:

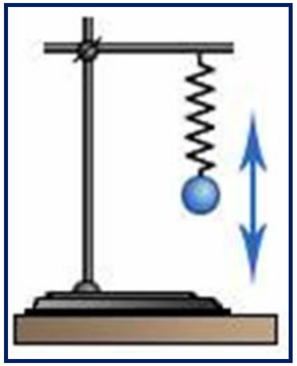
- при ***n = 1*** частица, скорее всего, будет посередине ямы, но не на краях,
- при ***n =* 2** - будет или в левой или в правой половине, но не посередине ямы и не на краях, и т. д. Т.е. **нельзя говорить о траектории движения частицы**.

Энергетический интервал между соседними уровнями энергии:

$$\boxed{\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}(n+1)^2 - \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}n^2 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}(2n+1) \approx \frac{\pi^2\hbar^2}{ml^2}n}$$

- **Например**:
  - для потенциальной ямы с **наноскопическими** размерами, **сопоставимыми с размерами атома** (*l* ~ *10^{-8} м*), **собственные значения энергии** электрона E_n образуют последовательность энергетических уровней, расстояние между которыми $\Delta E = E_{n+1} - E_n \approx 1$ *эВ*.
  - В потенциальной яме **макроскопическими** размеров (*l~1 см*) соседние энергетические уровни отличаются друг от друга на величину $\Delta E \sim 10^{-14}$ *эВ*.

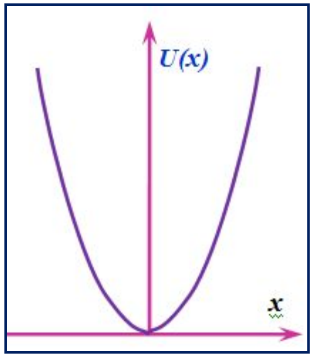
6. Гармонический осциллятор



Линейный гармонический осциллятор - система, совершающая одномерное колебательное движение под действием квазиупругой силы - является **моделью** для изучения колебательного движения.

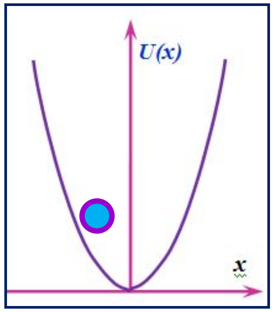
В классической физике - это пружинный, физический и математический маятники.

В квантовой физике - **квантовый (квантово- механический) осциллятор**. Но модель – та же.



- **Классический гармонический осциллятор** представляет собой шарик с массой m, подвешенный на пружине.
- Если мы направим ось x вдоль оси пружины и за начало отсчета примем положение равновесия шарика, то сила F, действующая на шарик, будет связана с координатой x известной формулой $F = -kx$, где k – жесткость пружины.
- **Потенциальная энергия** шарика имеет вид $U = kx^2/2$
- Если такой шарик вывести из состояния равновесия, то он будет совершать гармонические колебания с частотой $\omega = (k/m)^{1/2}$.

- Из формулы $U = (k/2)x^2$ видно, что потенциальная кривая гармонического осциллятора является **параболой**.
- Поэтому **задача о гармоническом осцилляторе** – это задача о поведении частицы **в потенциальной яме параболической формы**.



Квантово- механический осциллятор

- Для решения задачи о квантово- механическом осцилляторе необходимо найти **конечное**, **однозначное**, **непрерывное** и **гладкое решение** уравнения Шредингера при $U = -kx^2/2$:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar}(E-U)\psi = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{kx^2}{2}\right)\psi = 0$$

Если только вдоль одного направления x

Уравнение Шредингера, которое следует решить:

$$\frac{\hbar^2}{m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{k}{2}x^2\psi = E\psi$$

где $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

Приведенная постоянная Планка

- Точное решение уравнения приводит к следующему выражению для спектра возможных значений энергии осциллятора:

$$\boxed{E_n = \frac{h}{2\pi}\left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{k}{m}}} \;\Leftrightarrow\; \boxed{E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

- Отсюда видно, что **наименьшее** значение энергии осциллятора (при $n=0$) не равно нулю:

$$\boxed{E_0 = \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2}\hbar\omega}$$

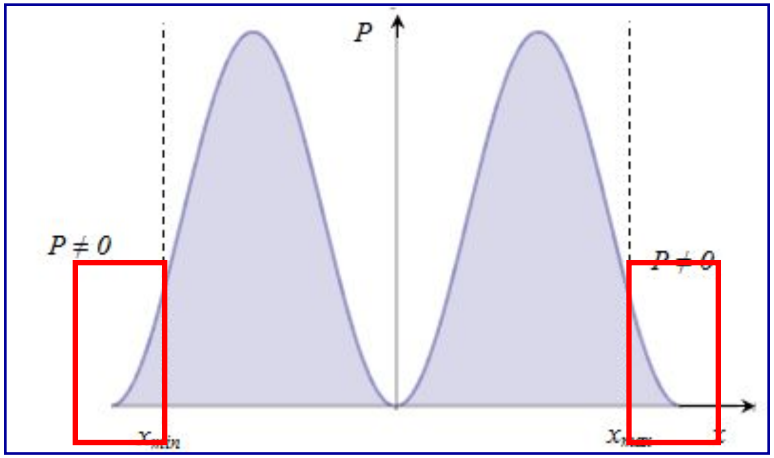
называется «**нулевой энергией**».

Наличие нулевых колебаний означает, что частица не может упасть на дно ямы. **Почему?**

Нулевая энергия

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

- Минимальное значение E_0 (**энергия нулевых колебаний**) является следствием состояния неопределенности так же, как и в случае частицы в “**потенциальной яме**”.
- Наличие нулевых колебаний означает, что частицы **не могут упасть на дно ямы**, т.к. в этом случае был бы **точно** определен ее импульс $p = 0$



$$\delta x \cdot \delta p \geq h$$

принцип (соотношение) неопределенностей

$$\Delta p = 0$$

$$\Delta x = \infty$$

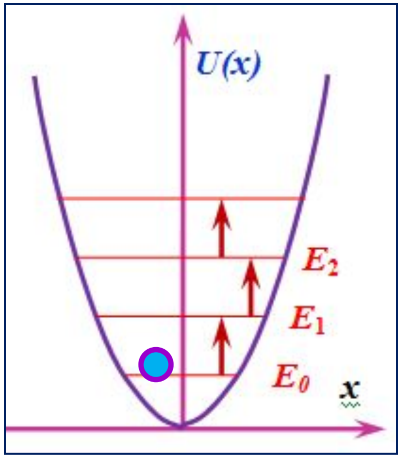
Что не соответствует соотношению неопределенностей Гейзенберга

- Наличие **энергии нулевых колебаний противоречит** классическим представлениям, по которым $E_{min} = 0$.
- Также **противоречит квантование уровней энергии** и их расположение на **равных** расстояниях друг от друга:

$$\Delta E_n = \hbar\omega$$

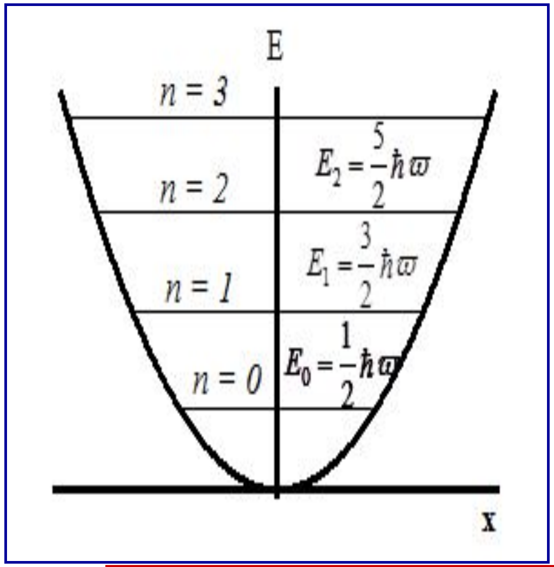
- Также **противоречит** возможность нахождение частицы **вне области потенциальной ямы**: $-x_{min} \leq x \leq x_{max}$

Квантово-механическая частица находится на квантованных уровнях энергии



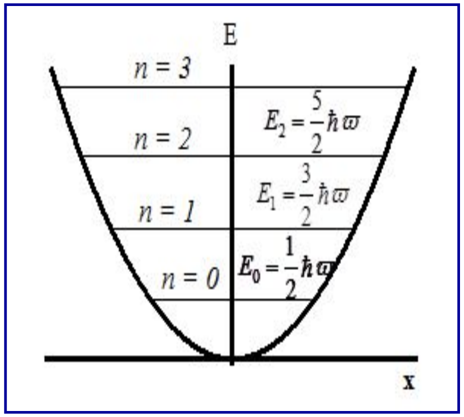
- Квантово- механическая частица не может «лежать» **на дне** параболической потенциальной ямы.
  - точно так же как она **не может лежать на дне** прямоугольной, или какой бы то ни было другой **потенциальной ямы конечной ширины**.
- Энергия осциллятора пропорциональна первой степени ***n***, поэтому энергетические уровни оказываются **равноотстоящими** один от другого (**эквидистантными**).

$$\boxed{E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega} \Rightarrow \boxed{\Delta E_n = \hbar\omega}$$



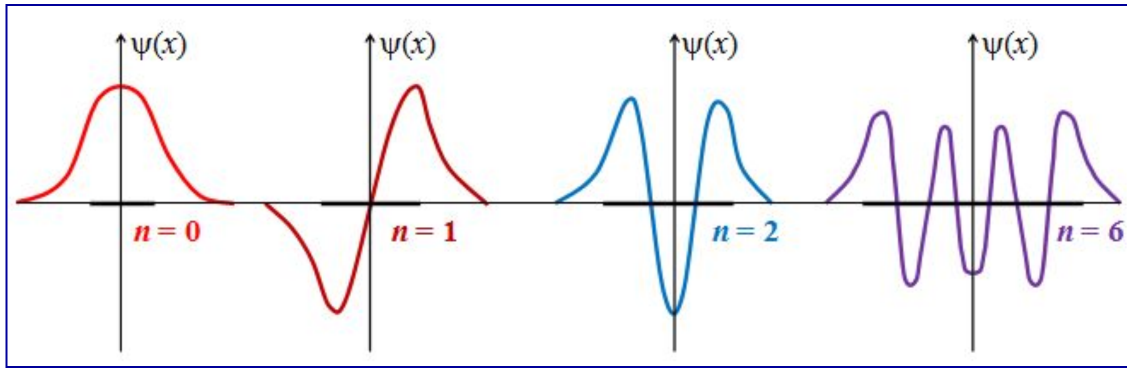
- Изменение (например, **приращение**) энергии осциллятора соответствует переходам между уровнями энергии E_n (указаны стрелками).
- Чтобы осциллятор колебался сильнее, нужно добавить ему энергию, равную **разности энергий соседних уровней**.

Графики распределения плотности вероятности волновой функции квантово-механической частицы

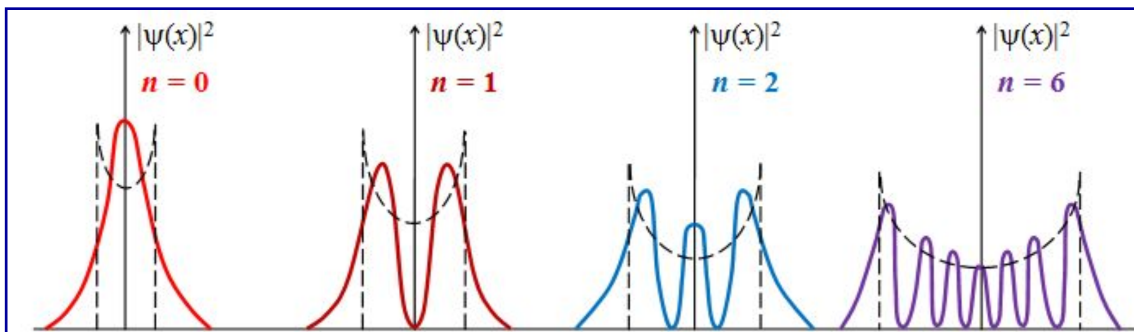


- Графики волновых **ψ**-функций, являющихся решениями уравнения при **n = 0, 1, 2** и **6**;
  - вдоль оси ***x*** **отложены отрезки**, равные удвоенным амплитудам колебаний **классического осциллятора** при ***энергиях***, равных E_n.

Волновые **ψ**-функции

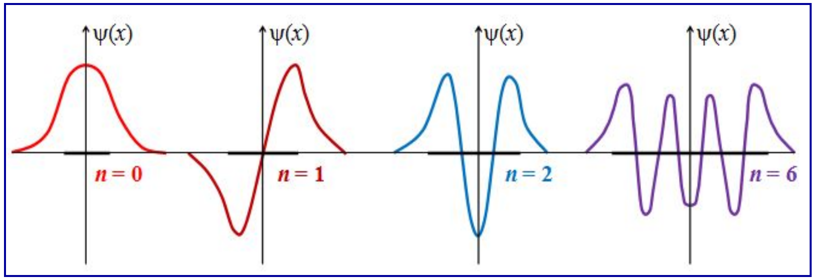


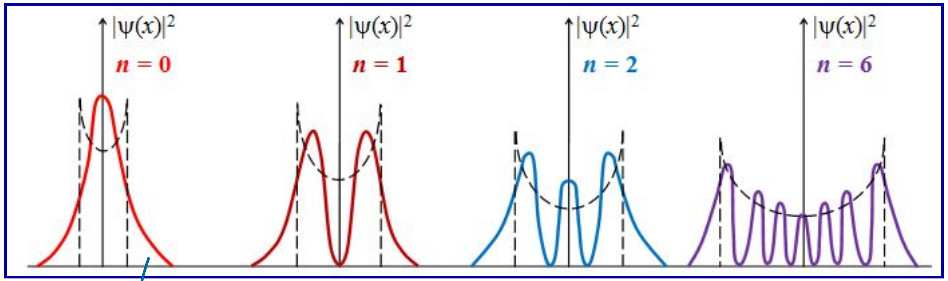
Кривые распределения плотности вероятности $|\psi(x)|^2$



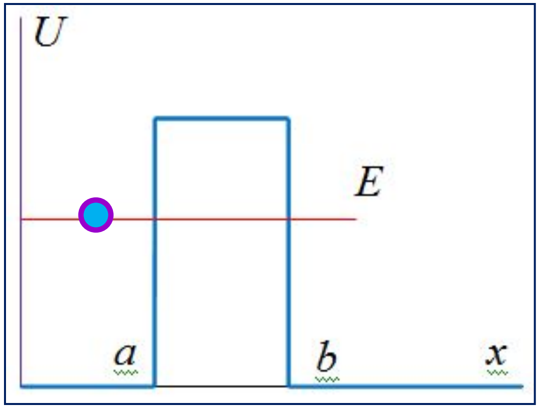
- На нижних рисунках **сплошными кривыми** изображены **кривые распределения плотности вероятности** $|\psi(x)|^2$ для тех же состояний квантового осциллятора, а пунктиром – **плотность вероятности классического осциллятора** в окрестности точки x.

Выводы из графиков



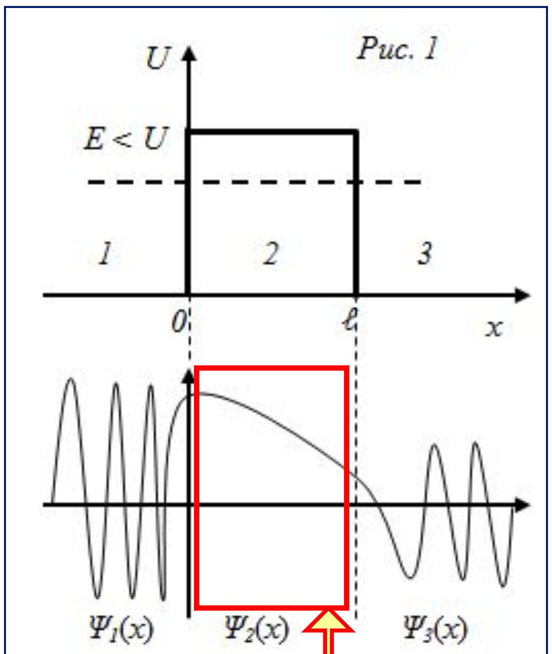


- Видно, что при малых квантовых числах ***n*** **квантово- механический осциллятор** ведет себя **совершенно иначе, чем классический**.
- Вероятность найти **классический осциллятор** всегда является **наибольшей** для точек поворота, так как в этих точках его скорость равна нулю, а **для квантово- механического осциллятора** вероятность оказывается **максимальной в точках**, соответствующих «**пучностям**» ***ψ***-функции.
- Но при больших ***n*** **усредненная** кривая для распределения плотности вероятности квантово-механического осциллятора **хорошо согласуется** с кривой для классического осциллятора.
- Следует отметить еще одну **особенность** квантово- механического осциллятора:
  - квадрат функции $|\psi(x)|^2$ **не равен нулю за точками поворота** (т. е. **вне пределов**, ограничивающих движение классического осциллятора).



7. Туннельный эффект

- Если же высота ямы конечная, то в силу «размытости» волновой функции частицы («выход за границы ямы») **существует не равная нулю вероятность** того, что частица может находиться **за пределами** потенциальной ямы.
- Рассмотрим потенциальную яму, в которой потенциальная энергия отлична от нуля в узком интервале от **a** до **b**.
- Область **a < x < b** называют **потенциальным барьером**.
- **Просачивание частиц** сквозь потенциальный барьер носит название **туннельного эффекта**. Будет наблюдаться затухание колебаний **ψ**-функции.
- **Для описания туннельного эффекта** вводится понятие **прозрачности потенциального барьера D** как **отношение вероятности** нахождения частицы **за барьером к вероятности** нахождения частицы **перед барьером**.
- Вспомним, что вероятность нахождения частицы определяется квадратом волновой функции.
- Поэтому, прозрачность потенциального барьера D равна отношению квадратов соответствующих волновых функций:



Будет наблюдаться затухание колебаний

$$D = \frac{|\psi(b-a)|^2}{|\psi(b)|^2}$$

Туннельный эффект-2

- Решение уравнения Шредингера **для прямоугольного потенциального барьера конечной высоты** U показывает, что прозрачность барьера **шириной** ($b-a$) выражается формулой:

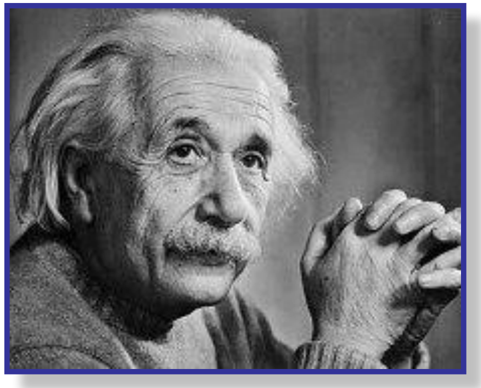
$$D = \frac{|\psi(b-a)|^2}{|\psi(b)|^2} = e^{-\frac{2(b-a)}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}}$$

где m − масса частицы, E − полная энергия частицы

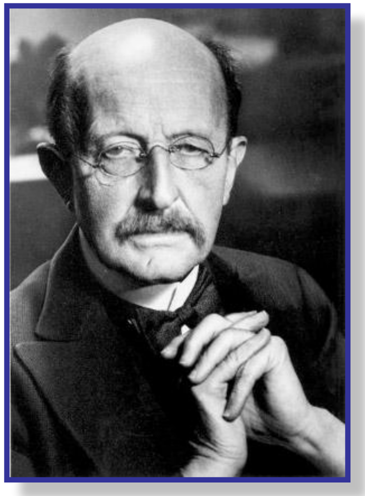
- Туннельный эффект играет **заметную роль в случаях,** когда линейные размеры потенциального барьера **соизмеримы** с атомными размерами, а масса частицы мала.
- **Примером прохождения частиц сквозь потенциальный барьер** является **α-распад радиоактивных ядер**.
- При α-распаде материнское ядро испускает α-частицу, состоящую из двух протонов и двух нейтронов.
  - При больших расстояниях взаимодействие между ядром и α-частицей описывается законом Кулона.
  - На малых расстояниях (порядка размеров ядра) между дочерним ядром и α-частицей начинают сказываться **короткодействующие** силы притяжения – **ядерные силы**.
  - В результате высота потенциального барьера составляет примерно **20 МэВ**, в то время как энергия α-частиц обычно не превышает **7 МэВ**.
- Поэтому, **вероятность прохождения частиц** сквозь барьер очень мала, вследствие чего **периоды полураспада** $T_{1/2}$ радиоактивных ядер, которые обратно пропорциональны **коэффициентам прозрачности** D, **очень велики**.

Часть I.
Элементы квантовой механики

Спасибо за внимание!



Эйнштейн Альберт



Макс Планк

Луи де Бройль

Создатели квантовой механики