

Применение первого начала термодинамики к изопроцессам

Изопроцессом называется процесс, при котором один из параметров системы остается постоянным.

Изохорический процесс: $V = \text{const}$

Из уравнения состояния идеального газа для двух температур T_1 и T_2 следует

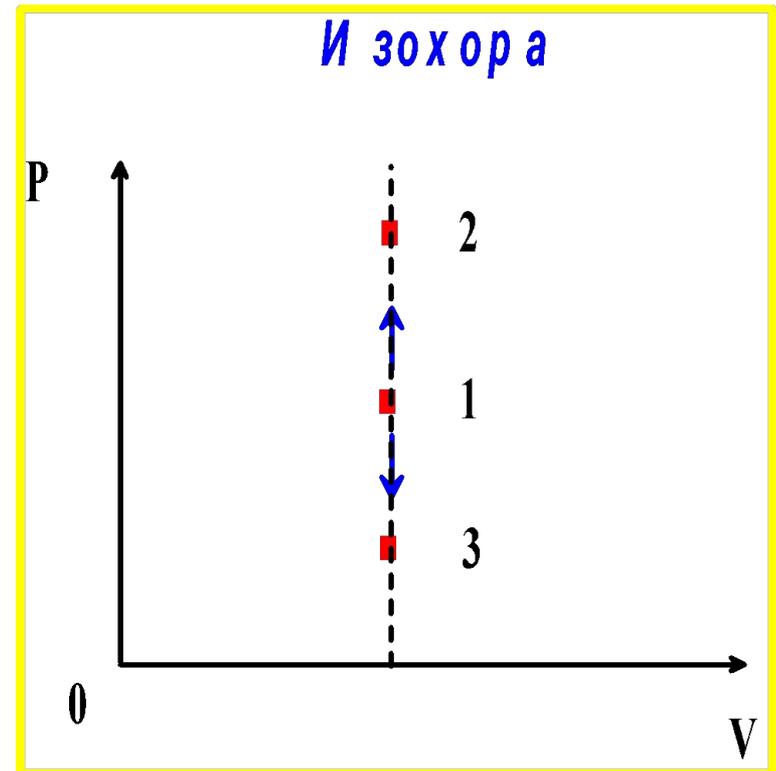
$$p_1 V = \frac{m}{M} R T_1 \quad p_2 V = \frac{m}{M} R T_2$$

откуда

$$p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1}$$

В процессе $1 \rightarrow 2$ происходит нагревание газа

В процессе $1 \rightarrow 3$ происходит охлаждение газа



Пусть начальное состояние газа отвечает состоянию при нормальных условиях $T_0 = 0^\circ\text{C} = 273.15\text{ K}$, $p_0 = 1\text{ атм}$, тогда для произвольной температуры T давление в изохорическом процессе находится из уравнения

$$p = p_0 \frac{T}{T_0}$$

Давление газа пропорционально его температуре - Закон Шарля

Поскольку $d'A = pdV = 0$, то *при изохорическом процессе газ не совершает работу над внешними телами.*

При этом переданная газу теплота равна $d'Q = d'A + dU = dU$

То есть *при изохорическом процессе вся теплота, передаваемая газу, идет на увеличение его внутренней энергии.*

В итоге получаем

$$d'Q = dU = \frac{m}{M} c_V dT$$

Изобарический процесс: $p = \text{const}$

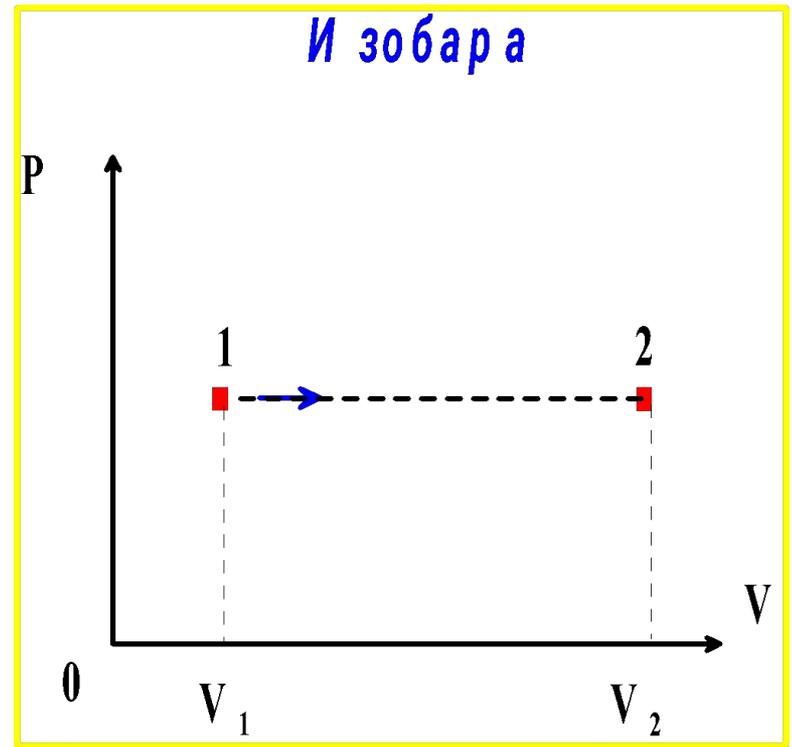
В изобарическом процессе газ совершает работу

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1)$$

Работа равна площади под прямой изобары. Из уравнения состояния идеального газа получаем

$$pV_1 = \frac{m}{M} RT_1 \quad pV_2 = \frac{m}{M} RT_2$$

$$A = p(V_2 - V_1) = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1)$$



Перепишем последнее соотношение в виде

$$R = \frac{A}{\nu(T_2 - T_1)}$$

Это равенство раскрывает **физический смысл газовой постоянной R** - она равна работе **1 моля** идеального газа, совершаемой им при нагревании на **1° K** в условиях изобарного расширения.

Возьмем в качестве начального состояния - состояние идеального газа при нормальных условиях (**T₀, V₀**), тогда объем газа **V** при произвольной температуре **T** в изобарическом процессе равен

$$V = V_0 \frac{T}{T_0}$$

Объем газа при постоянном давлении пропорционален его температуре - **закон Гей-Люссака**.

3) Изотермический процесс: $T = \text{const}$

Из уравнения состояния идеального газа тогда следует

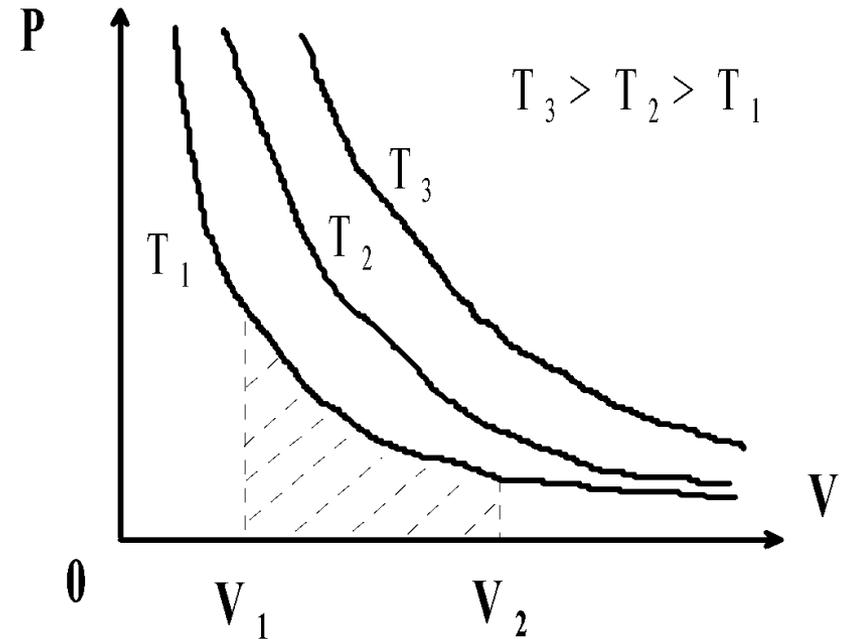
$$pV = \text{const}$$

Закон Бойля-Мариота

Найдем работу газа при изотермическом процессе :

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \nu \frac{RT}{V} dV = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \nu RT \ln \frac{p_1}{p_2}$$

И з о т е р м а



Используя формулу $U = \nu c_v T$, получаем

$$dU = \nu c_v dT = 0$$

Следовательно, *внутренняя энергия газа при изотермическом процессе не меняется* .

Поэтому

$$d'Q = d'A$$

Значит, *при изотермическом процессе вся теплота, сообщаемая газу, идет на совершение им работы над внешними телами*.

Поэтому

$$Q = A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}$$

Чтобы при расширении газа его температура не понижалась, к газу необходимо подводить количество теплоты, равное его работе над внешними телами.

4) Адиабатический процесс : $d'Q = 0$

При адиабатическом процессе **теплообмен** между газом и окружающей средой **отсутствует**. Из первого начала термодинамики получаем

$$d'A = - dU$$

*Поэтому в адиабатическом процессе работа газа над внешними телами совершается **за счет убыли его внутренней энергии**.*

Используя $dU = \nu c_v dT$; $d'A = p dV$

находим $p dV = -\nu c_v dT$

С другой стороны, из уравнения состояния идеального газа следует

$$d(pV) = p dV + V dp = \nu R dT$$

Исключая dT , получаем

$$pdV = -c_v (pdV + vdp)/R$$

Откуда

$$\frac{dp}{p} \mp \left(1 + \frac{R}{c_v}\right) \frac{dV}{V} = - \frac{dV}{V}$$

Интегрируя, находим

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} \mp \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$$
$$\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

Последнюю формулу можно переписать в виде

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma \quad \rightarrow \quad p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$$

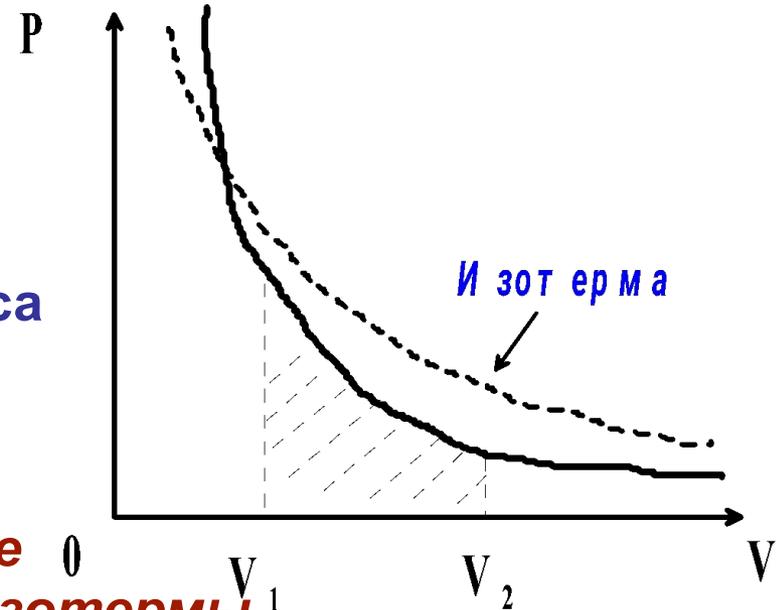
Адиабата

Следовательно

$$pV^\gamma = \text{const}$$

это уравнение адиабатического процесса
- уравнение Пуассона

Так как $\gamma > 1$, то у адиабаты давление
меняется от объема быстрее, чем у изотермы.



Используя уравнение состояния идеального газа, преобразуем уравнение Пуассона к виду

$$pRT = \nu RTV^{\gamma-1} = \text{const}$$

Значит

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}$$

или

$$p^{\frac{1}{1-\gamma}} T = \text{const}$$

При адиабатическом расширении идеальный газ охлаждается, а при сжатии – нагревается.

Найдем *работу газа при адиабатическом процессе.*

Из первого начала термодинамики

$$d'A = -\nu c_V dT$$

после интегрирования, находим

$$A = \nu c_V (T_1 - T_2)$$

Выразим работу газа через давление и объем. Для этого преобразуем формулу к виду

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1}$$

Тогда

$$A = T_1 \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right]$$

Используя

$$c_V = \frac{R}{\gamma - 1} \quad \text{и} \quad p_1 V_1 = \nu R T_1$$

получаем

$$A = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right]$$

11.6 Политропические процессы

Политропический процесс – это процесс в ходе которого теплоемкость газа остается постоянной:

$$c_m = \text{const}$$

где c_m – молярная теплоемкость.

Найдем *уравнение политропы для идеального газа*.

Из первого начала термодинамики следует

$$dQ = dU + p dV = \nu c_m dT$$

откуда получаем $dU = \nu c_v dT$

$$\nu(c_m - c_v) dT = p dV$$

С другой стороны, из уравнения состояния идеального газа

$$d(pV) = d(pV + Vdp) = \nu R dT$$

Поэтому можно записать

$$(c_m - c_V)(pdV + VdP) = pRdV$$

$$(c_m - c_V - R)pdV + (c_m - c_V)Vdp = 0$$

Поскольку $c_P = c_V + R$ то

$$(c_m - c_P)\frac{dV}{V} + (c_m - c_V)\frac{dp}{p} = 0$$

Обозначим $n = \frac{c_m - c_p}{c_m - c_v}$, получим $n \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0$

Интегрируем $n \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right) \rightarrow p_2 V_2^n = p_1 V_1^n$

Следовательно

$$pV^n = \text{const}$$

Это - уравнение политропы, n - показатель политропы.

Все предыдущие процессы являются частными случаями политропического процесса:

$n = 0$	изобара	$c_m = c_p$	
$n = 1$	изотерма	$c_m = \infty$	
$n = \infty$	изохора	$c_m = c_v$	
$n = \gamma$	адиабата	$c_m = 0$	

Поэтому изменение энтропии на конечном участке процесса между состояниями **1** и **2** равно интегралу

$$\Delta S_c = \int_1^2 \frac{d'Q}{T} = \int_1^2 \nu R \frac{dT}{T} + \int_1^2 \frac{dV}{V} =$$

$$= \nu R \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + \nu R \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

Отсюда следует, что

1) при изотермическом процессе ($T_2 = T_1$)

$$\Delta S = R \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

2) при изохорическом процессе ($V_2 = V_1$)

$$\Delta S = \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) \frac{V_2}{V_1}$$

3) при изобарическом процессе ($p_2 = p_1$, $\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$)

$$\Delta S = (C + R) \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) + C \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)$$

Изменение энтропии при плавлении и испарении

Если при плавлении или испарении давление не меняется, то как показывает опыт, в таких процессах у большинства веществ температура тоже остается постоянной. Поэтому изменение *удельной энтропии* (для единицы массы вещества) в ходе плавления равно

$$\Delta S_{пл} = \int_{тв}^{жидк} \frac{d'Q}{T_{пл}} = \frac{1}{T_{пл}} \int_{тв}^{жидк} d'Q = \frac{q_{пл}}{T_{пл}}$$

где $q_{пл}$ – *удельная теплота плавления*.

Аналогично, изменение удельной энтропии в ходе кипения (испарения) равно

$$\Delta s_{\text{кип}} = \int_{\text{жидк}}^{\text{газ}} \frac{d'Q}{T_{\text{кип}}} = \frac{1}{T_{\text{кип}}} \int_{\text{жидк}}^{\text{газ}} d'Q = \frac{q_{\text{кип}}}{T_{\text{кип}}}$$

где $q_{\text{кип}}$ – удельная теплота кипения.

В сосуде под поршнем находится масса $m=1\text{г}$ азота. Какое количество теплоты Q надо затратить, чтобы нагреть азот на $\Delta T=10\text{К}$? На сколько при этом поднимется поршень? Масса поршня $M=1\text{ кг}$, площадь его поперечного сечения $S=10\text{ см}^2$.

Давление под поршнем $p=100\text{ кПа}$.

Согласно первому началу термодинамики

$$Q = \Delta U + A$$

$$\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T$$

$$A = p \Delta V = p \frac{m}{\mu} \Delta T$$

Тогда $Q = \frac{5}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T + p \frac{m}{\mu} \Delta T = 10.39\text{ Дж}$.

При расширении газ совершает работу против сил тяжести и против сил атмосферного давления, тогда

$$A = (Mg + pS) \Delta h = \frac{mR}{\mu} \Delta T \Rightarrow \Delta h = \frac{mR}{\mu (Mg + pS)} \Delta T = 2.7\text{ см}$$