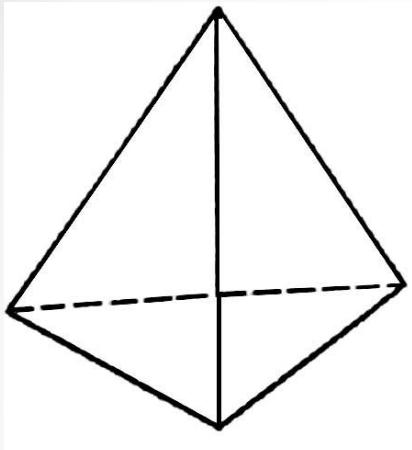
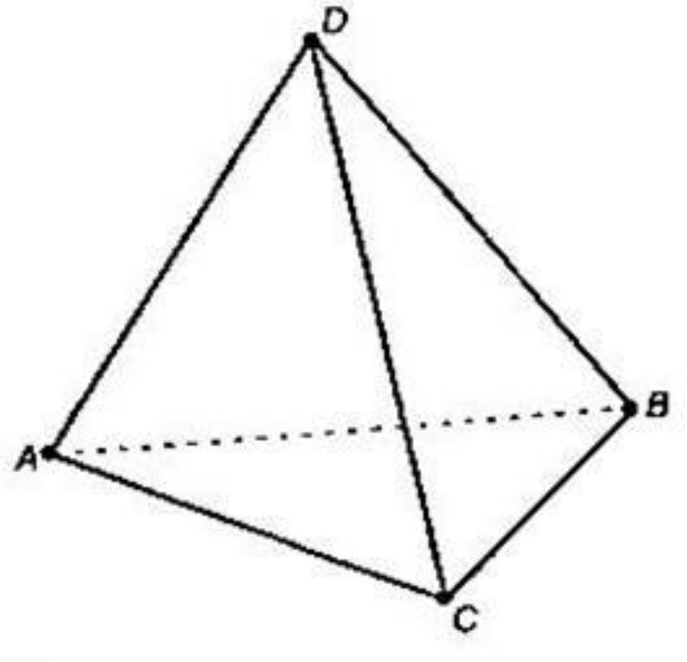


Виды тетраэдров

Составила: Драгунова С.А. учитель математики МБОУ СОШ № 19 г. Заполярный Мурманской области

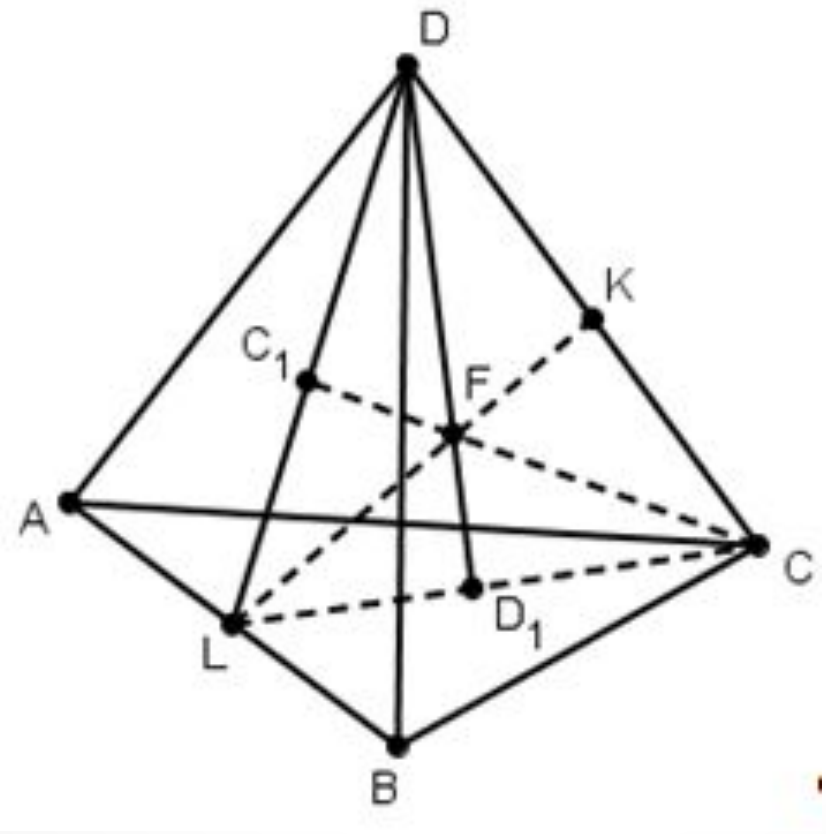
Тетраэдр

Многогранник с четырьмя треугольными гранями, в каждой из вершин которого сходятся по 3 грани. У тетраэдра 4 грани, 4 вершины и 6 рёбер. Два ребра тетраэдра, которые не имеют общих вершин, называются противоположными.



Ортоцентрический тетраэдр

Ортоцентрический тетраэдр — тетраэдр, все высоты которого, опущенные из вершин на противоположные грани, пересекаются в одной точке.

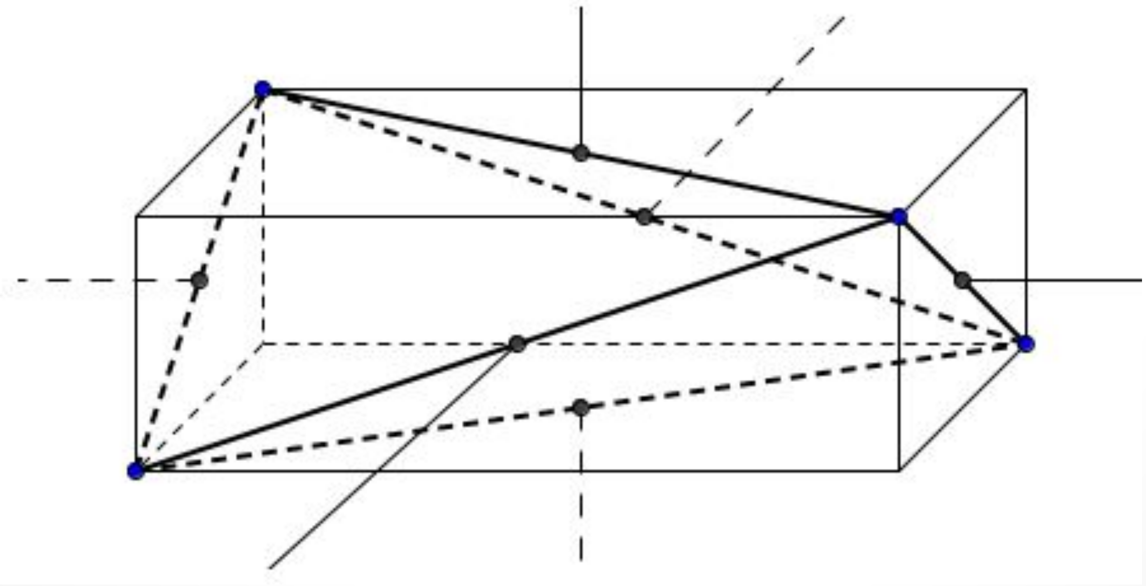


Свойства ортоцентрического тетраэдра

- Высоты тетраэдра пересекаются в одной точке.
- Основания высот тетраэдра являются ортоцентрами граней.
- Каждые два противоположных ребра тетраэдра перпендикулярны.
- Суммы квадратов противоположных ребер тетраэдра равны.
- Отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, равны.
- Произведения косинусов противоположных двугранных углов равны.
- Сумма квадратов площадей граней вчетверо меньше суммы квадратов произведений противоположных ребер.
- У *ортоцентрического тетраэдра* окружности 9 точек (окружности Эйлера) каждой грани принадлежат одной сфере (сфере 24 точек).
- У *ортоцентрического тетраэдра* центры тяжести и точки пересечения высот граней, а также точки, делящие отрезки каждой высоты тетраэдра от вершины до точки пересечения высот в отношении 2:1, лежат на одной сфере (сфере 12 точек).

Каркасный тетраэдр

Каркасным называется тетраэдр, для которого существует сфера, касающаяся всех шести ребер тетраэдра. Не всякий тетраэдр каркасный.



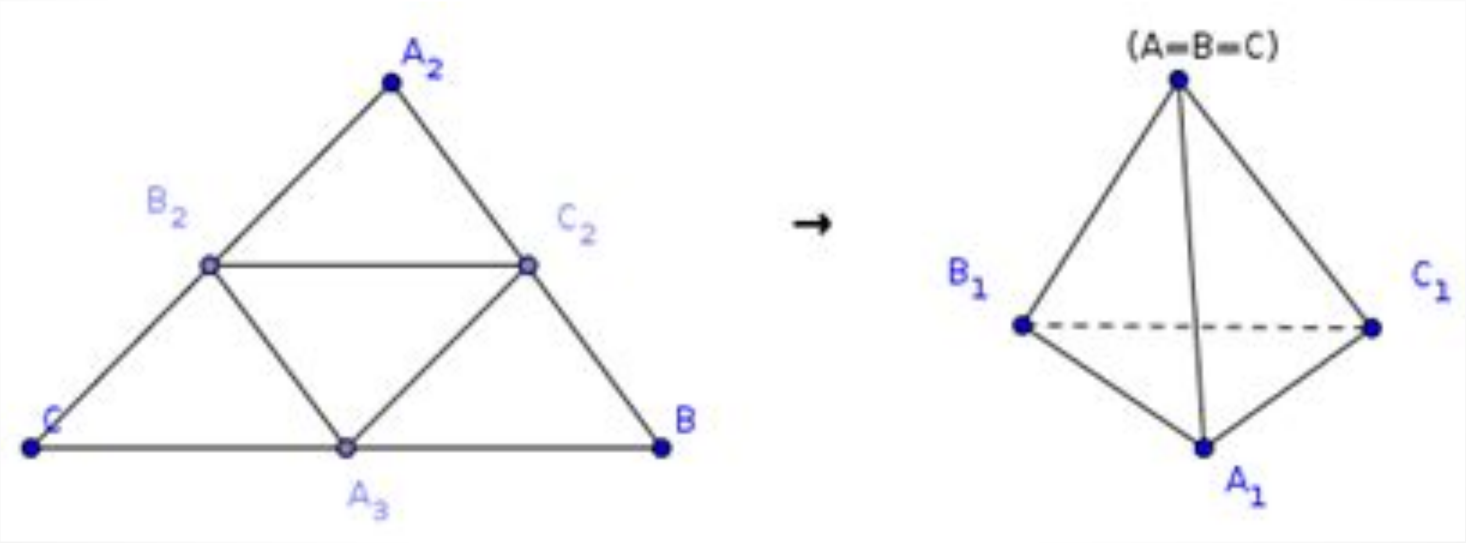
Свойства каркасного тетраэдра

- Существует сфера, касающаяся всех ребер тетраэдра.
- Суммы длин скрещивающихся ребер равны.
- Суммы двугранных углов при противоположных ребрах равны.
- Окружности, вписанные в грани, попарно касаются.
- Все четырехугольники, получающиеся на развертке тетраэдра, — описанные.
- Перпендикуляры, восстановленные к граням из центров вписанных в них окружностей, пересекаются в одной точке.

Равногранный тетраэдр

Равногранным называется тетраэдр, все грани которого равны.

Чтобы представить себе равногранный тетраэдр, возьмем произвольный остроугольный треугольник из бумаги, и будем сгибать его по средним линиям. Тогда три вершины сойдутся в одну точку, а половинки сторон сомкнутся, образуя боковые ребра тетраэдра.



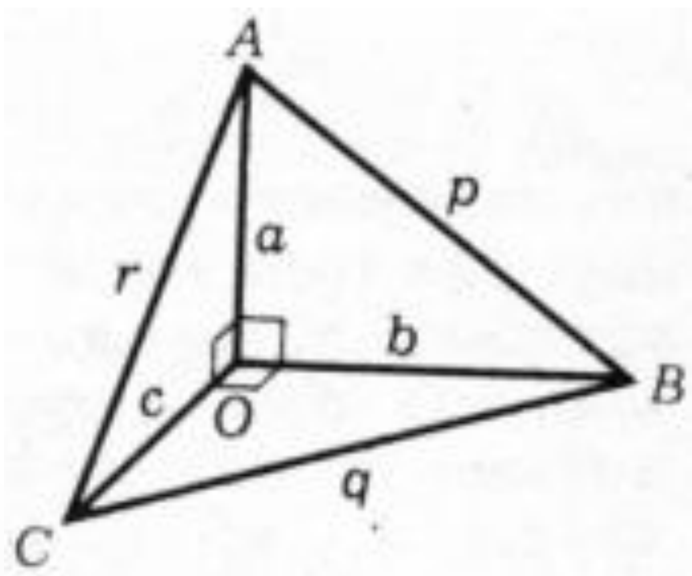
Свойства равногранного тетраэдра

Грани конгруэнтны. Скрещивающиеся ребра попарно равны.
Трехгранные углы равны. Противолежащие двугранные углы равны.
Два плоских угла, опирающихся на одно ребро, равны.
Сумма плоских углов при каждой вершине равна 180°.
Развертка тетраэдра - треугольник или параллелограмм.
Описанный параллелепипед прямоугольный.
Тетраэдр имеет три оси симметрии.
Общие перпендикуляры скрещивающихся ребер попарно перпендикулярны.
Средние линии попарно перпендикулярны.
Периметры , площади, высота граней равны.
Отрезки, соединяющие вершины с центрами тяжести противоположных граней, равны.
Радиусы описанных около граней окружностей равны.
Центр тяжести тетраэдра совпадает с центром описанной сферы.
Центр тяжести совпадает с центром вписанной сферы.
Центр описанной сферы совпадает с центром вписанной.
Вписанная сфера касается граней в центрах описанных около этих граней окружностей.
Сумма всех двугранных углов равна нулю.

Прямоугольный тетраэдр

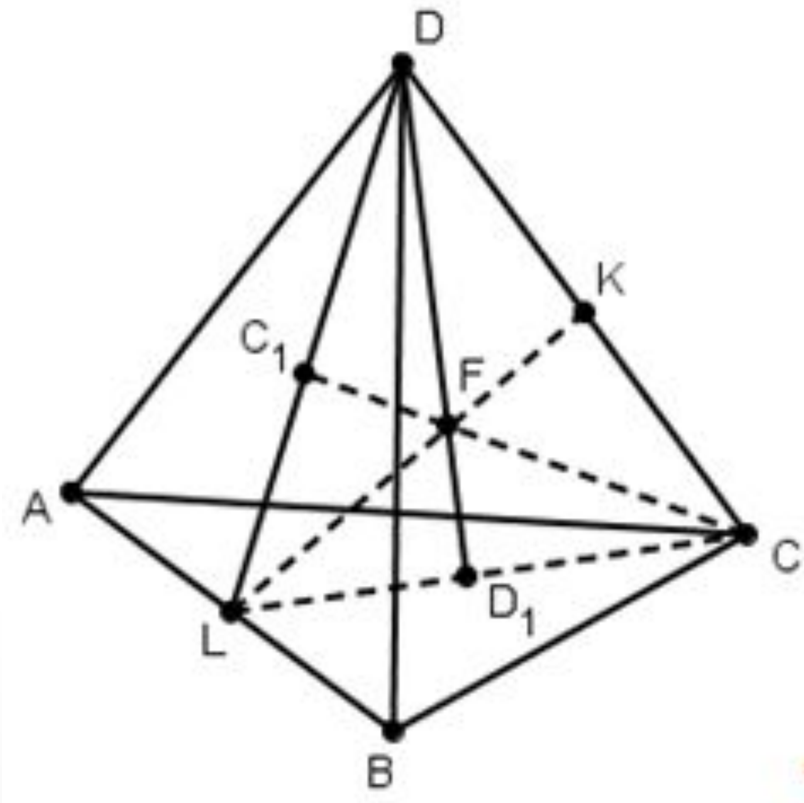
Все ребра, прилежащие к одной из вершин, перпендикулярны между собой.

Прямоугольный тетраэдр получается отсечением тетраэдра плоскостью от прямоугольного параллелепипеда.

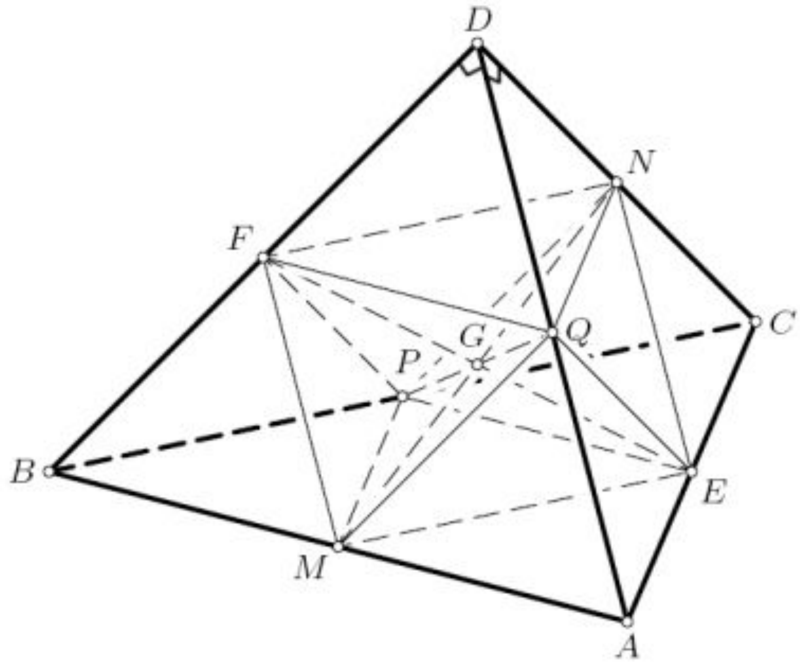


Медианы и бимедианы тетраэдра

Медиана тетраэдра - это отрезок, который соединяет вершину тетраэдра и точку пересечения медиан противоположной грани.



Бимедиана тетраэдра - это отрезок, который соединяет середины рёбер, что скрещиваются (соединяет середины сторон треугольника, который есть одной из граней тетраэдра).

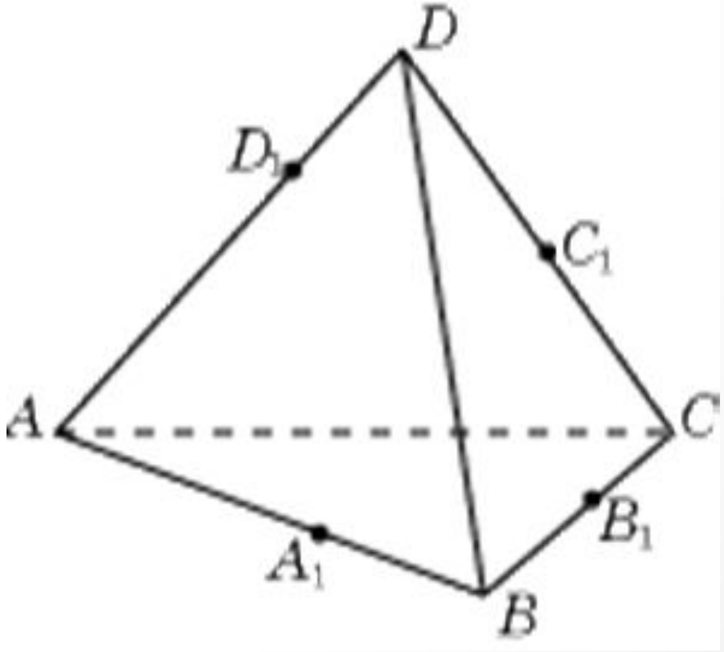


Все медианы и бимедианы тетраэдра пересекаются в одной точке. Эта точка делит медианы в отношении 3:1, если считать от вершины. Она же делит бимедианы на две равные части.

Теорема Менелая для тетраэдра

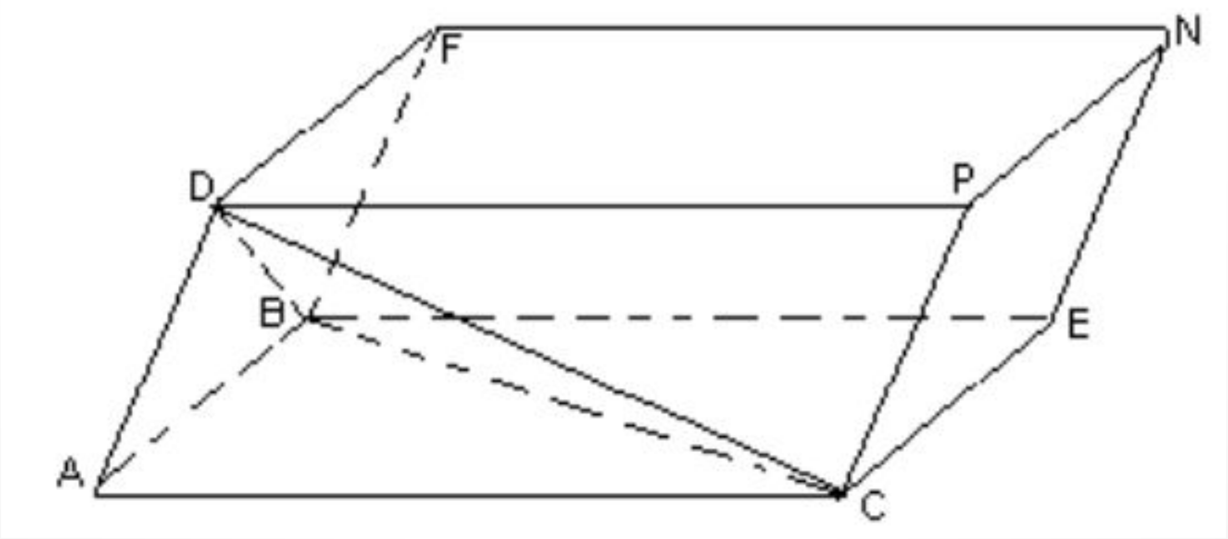
Теорема. Пусть на ребрах *AB, BC, CD* и *AD* тетраэдра *ABCD* взяты соответственно точки A_1, B_1, C_1 и D_1.
Для того чтобы эти точки лежали в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{AA_1}{A_1B}\cdot\frac{BB_1}{B_1C}\cdot\frac{CC_1}{C_1D}\cdot\frac{DD_1}{D_1A}=1$$



Достраивание тетраэдра до параллелепипеда

Способ 1. Достраиваем тетраэдр так, что четыре вершины тетраэдра, будут являться вершинами параллелепипеда.
Таким дополнительным построением удобно пользоваться, когда задачу решают с помощью векторного и координатного методов.
Особенно выгодно применять данный способ, если три ребра тетраэдра взаимно перпендикулярны.



Достраивание тетраэдра до параллелепипеда

Способ 2. Через каждое ребро тетраэдра проводим плоскость так, чтобы она была параллельная противолежащему ребру. Данное построение используют, если в условии что-либо известно о противоположных рёбрах тетраэдра, так как они являются диагоналями граней получившегося параллелепипеда.