Вписанная окружность

Вписанная окружность

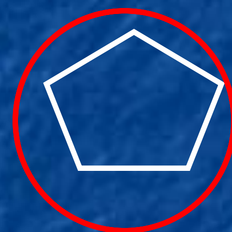
Задача:

В данный треугольник вписать окружность.

Вписанная окружность

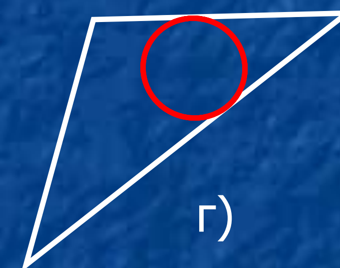
Из данных рисунков выберете те, на которых, по вашему мнению, изображена вписанная окружность:

а)

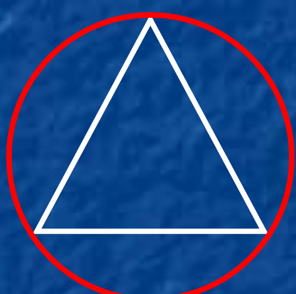


б)

в)

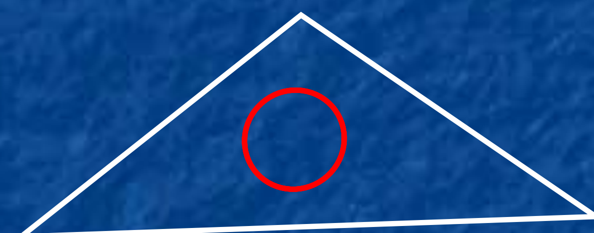


г)



д)

е)



ж)

з)

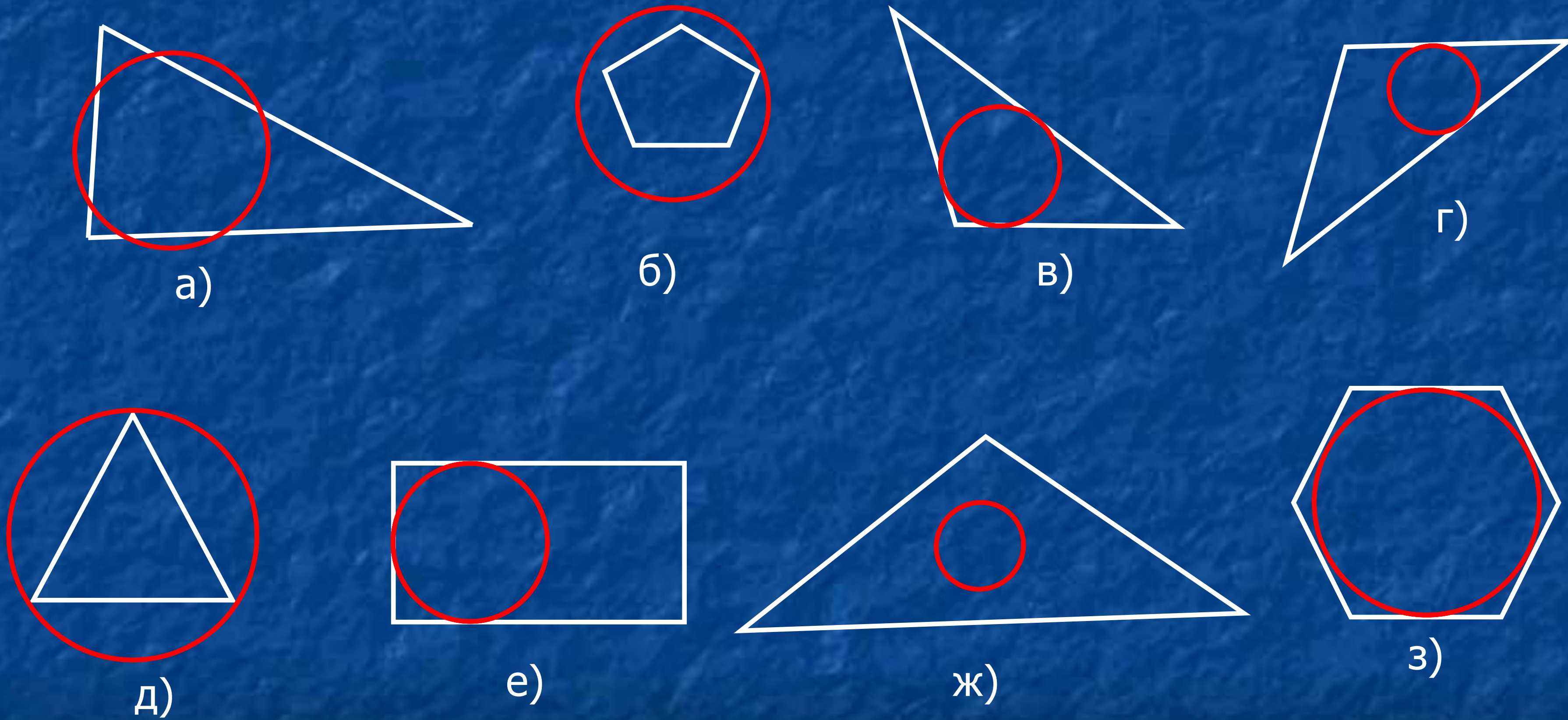
Вписанная окружность

Определение:

Окружность называется <u>вписанной в многоугольник</u>, если она касается всех его сторон.

Вписанная окружность

Из данных рисунков выберете те, на которых, по вашему мнению, изображена вписанная окружность:



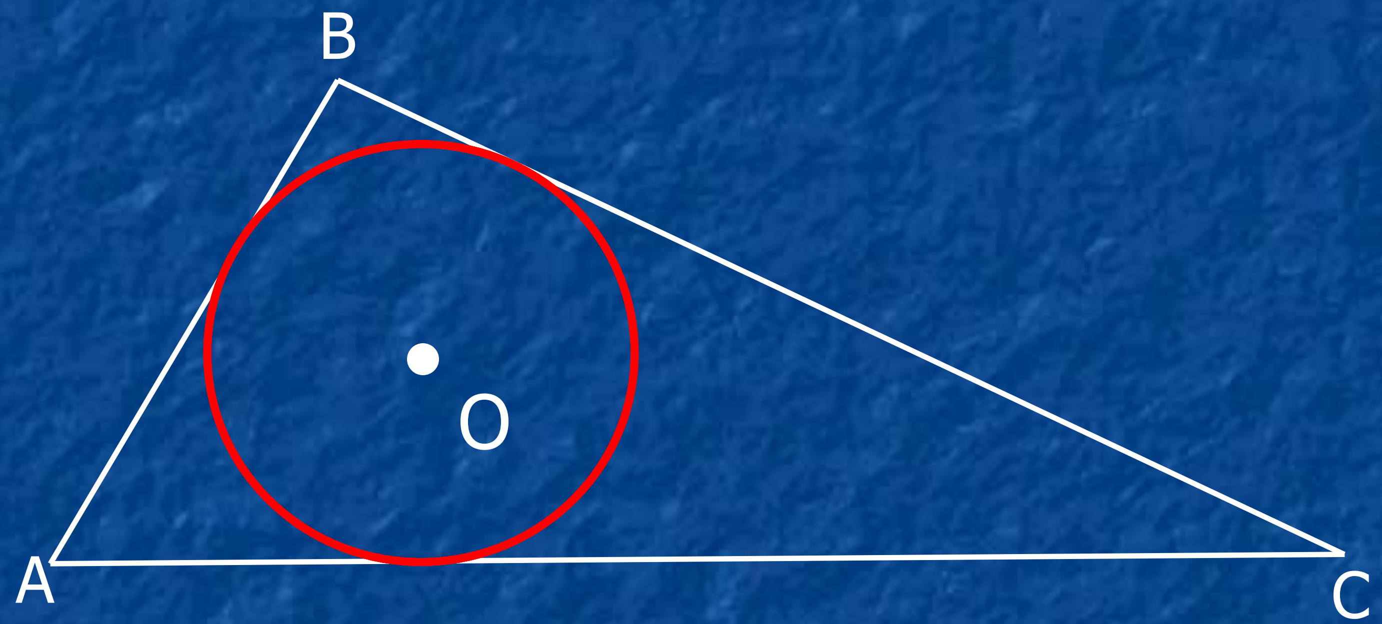
Вписанная окружность

Как вписать окружность в треугольник?

Центр?

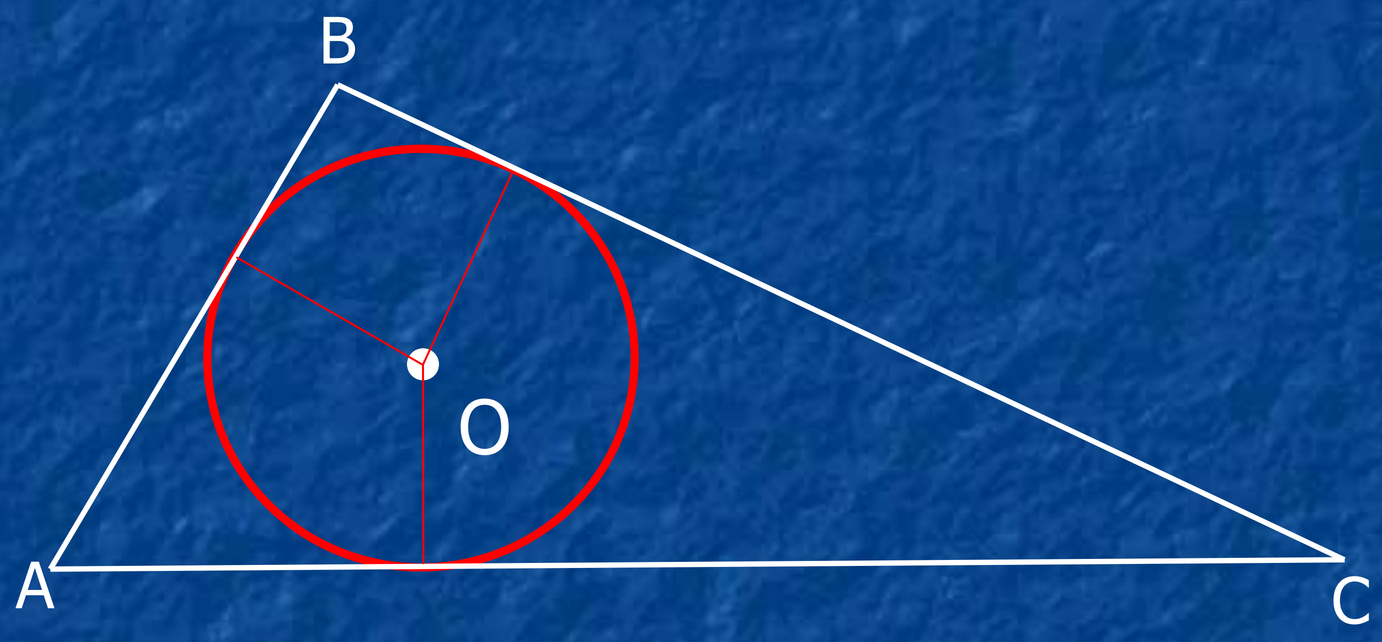
Радиус?

Предположим, что вписали окружность.

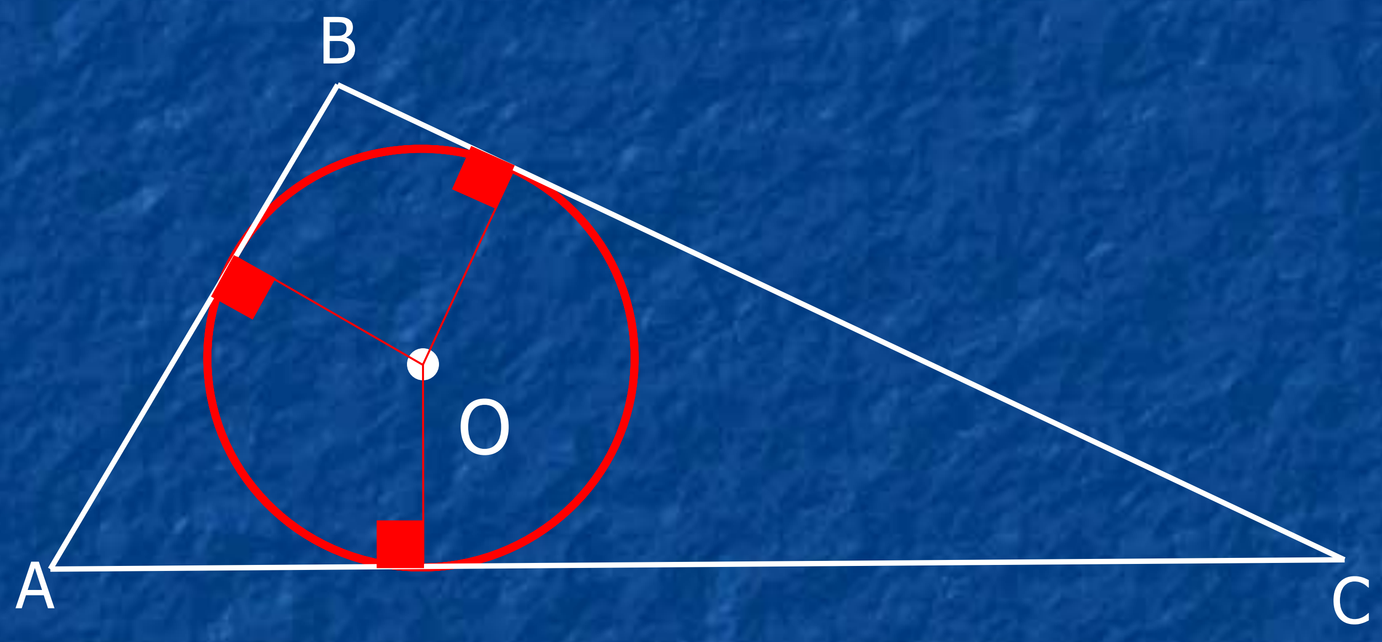


Вписанная окружность

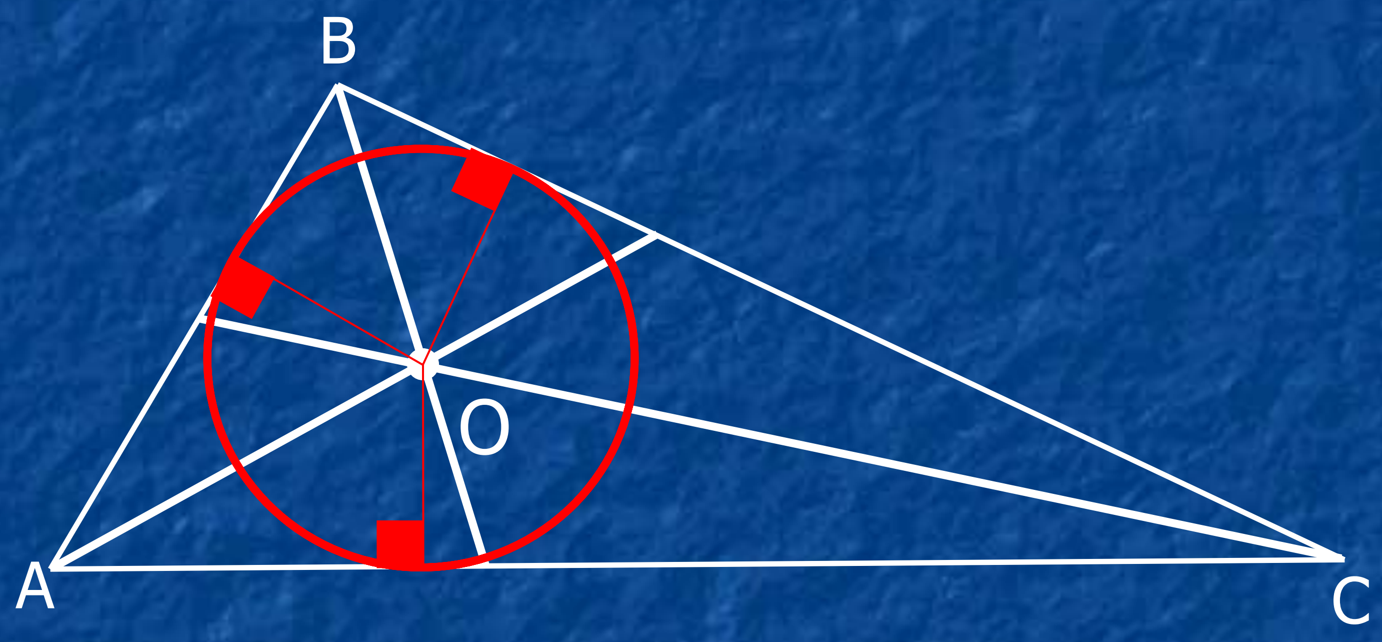
Проведем радиусы в точки касания.



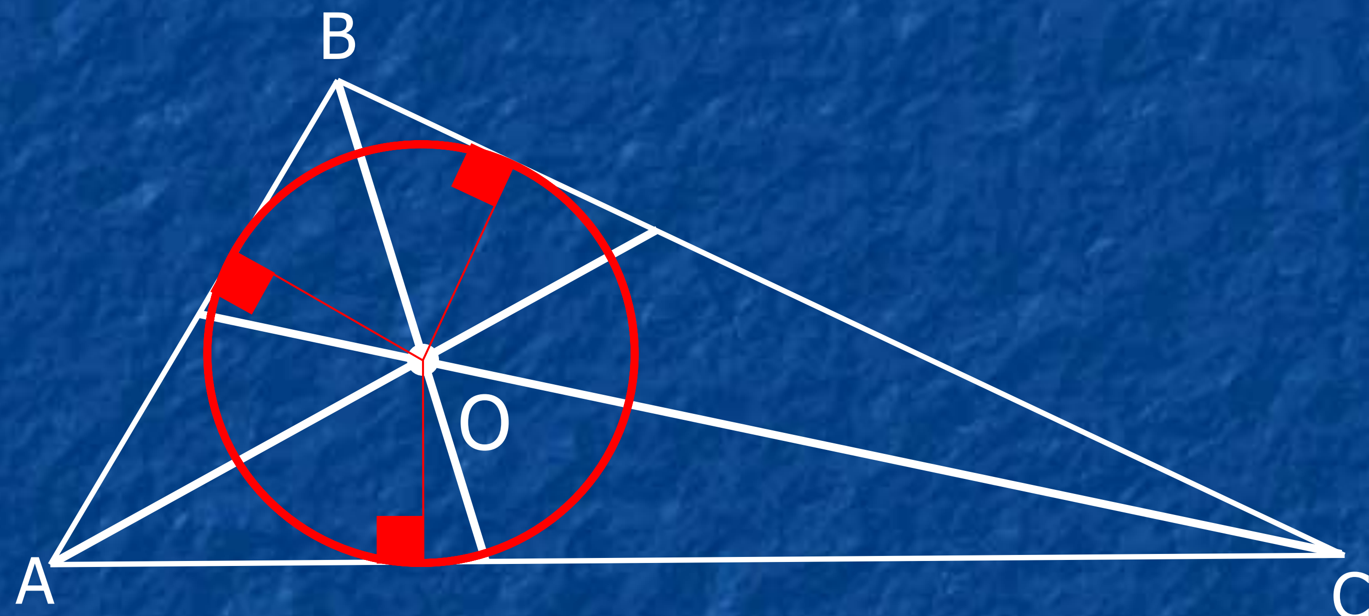
Вписанная окружность



Вписанная окружность



Вписанная окружность



AO - биссектриса угла A
BO - биссектриса угла B
CO - биссектриса угла C

Вписанная окружность

Таким образом,

центр вписанной окружности – это точка пересечения биссектрис треугольника,

радиус – это расстояние от центра окружности до сторон треугольника.

Вписанная окружность

Для того, чтобы вписать окружность в треугольник, надо:

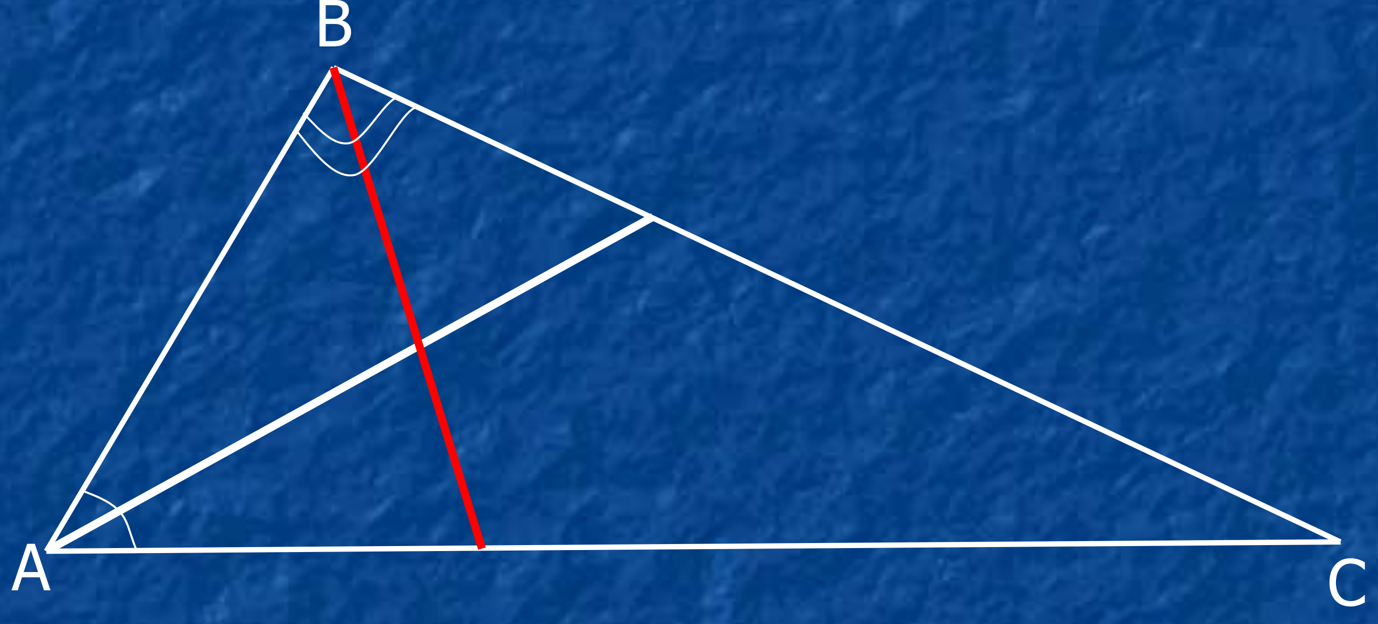
1). Найти точку пересечения биссектрис треугольника (центр окружности);
2). Опустить перпендикуляры из центра окружности к сторонам треугольника (радиус окружности);
3). Провести окружность.

Вписанная окружность

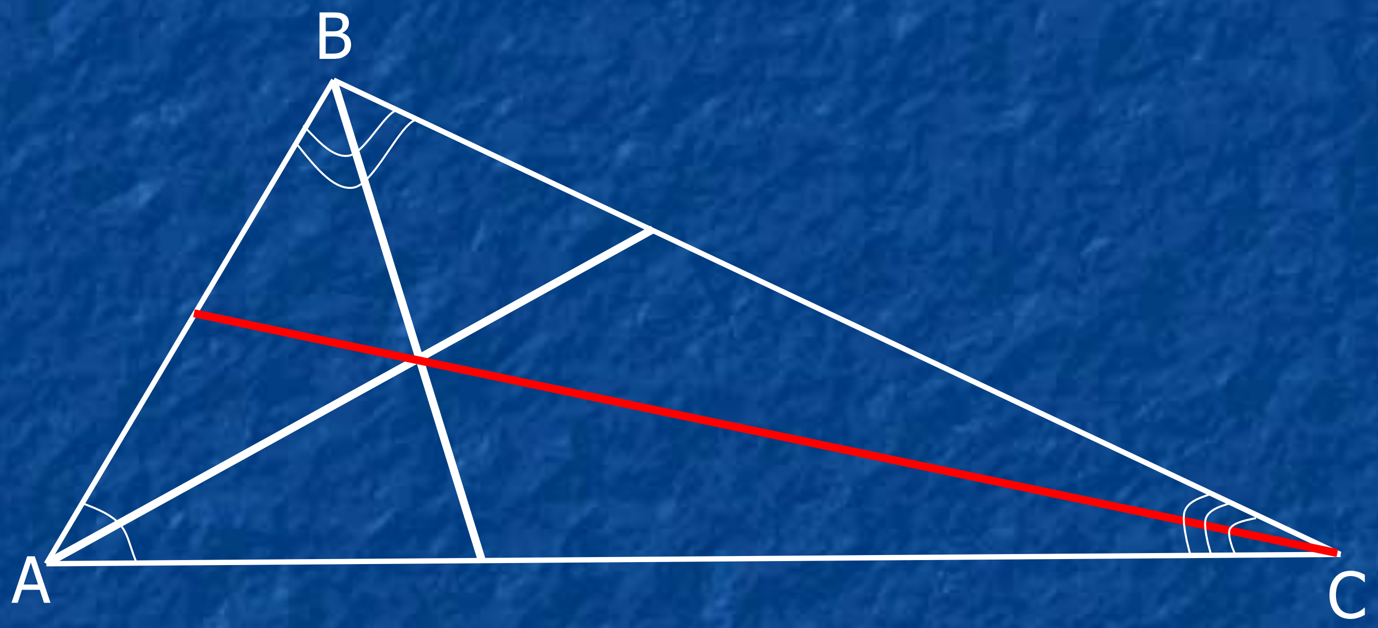
Вписанная окружность

Проведение биссектрисы угла A.

Проведение биссектрисы угла В.

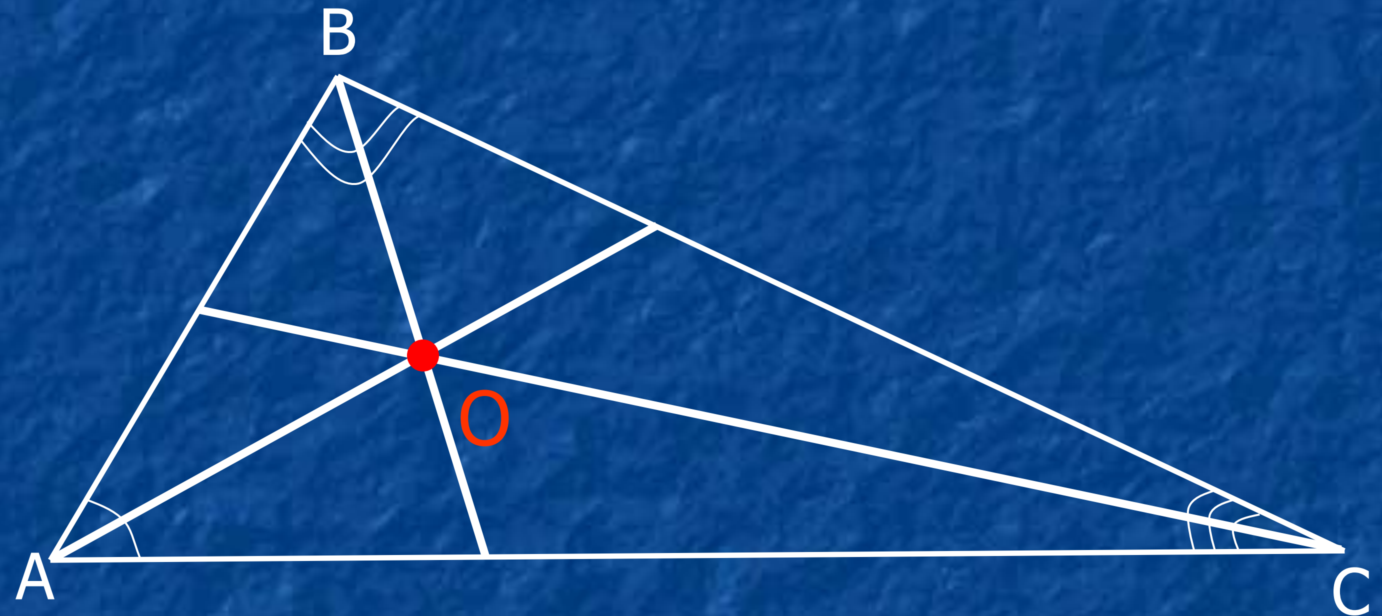


Проведение биссектрисы угла С.



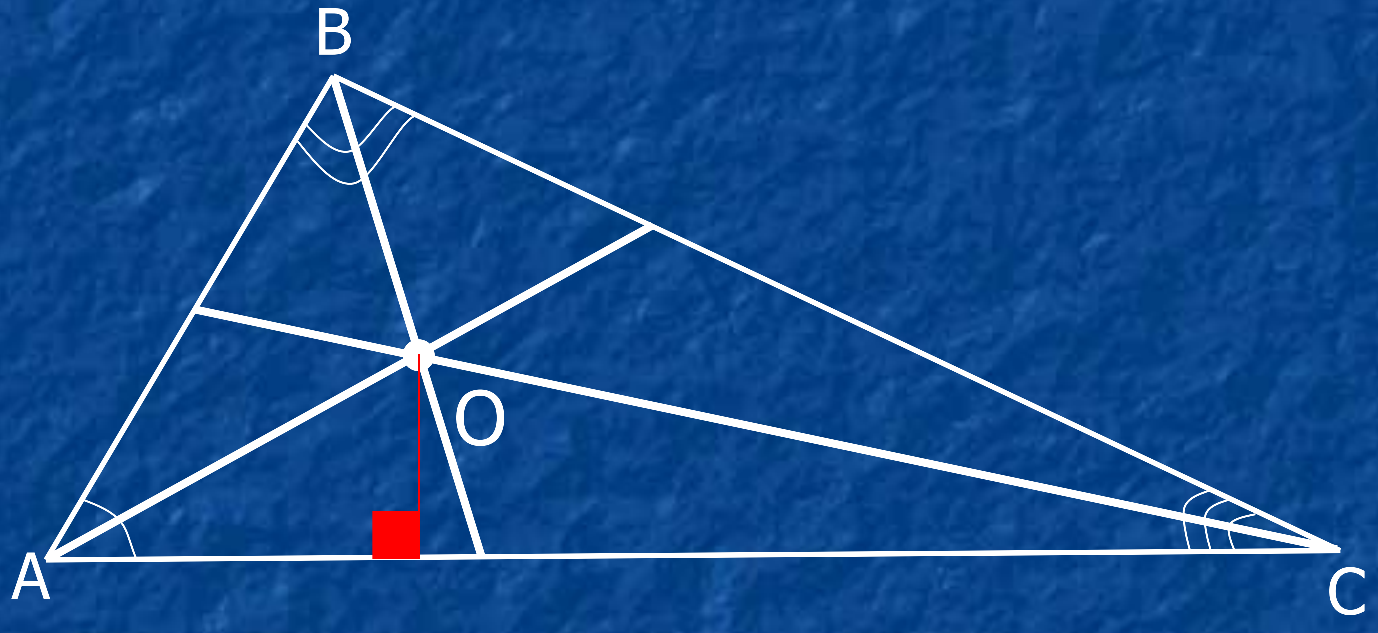
Вписанная окружность

Точка **О** - центр вписанной окружности.



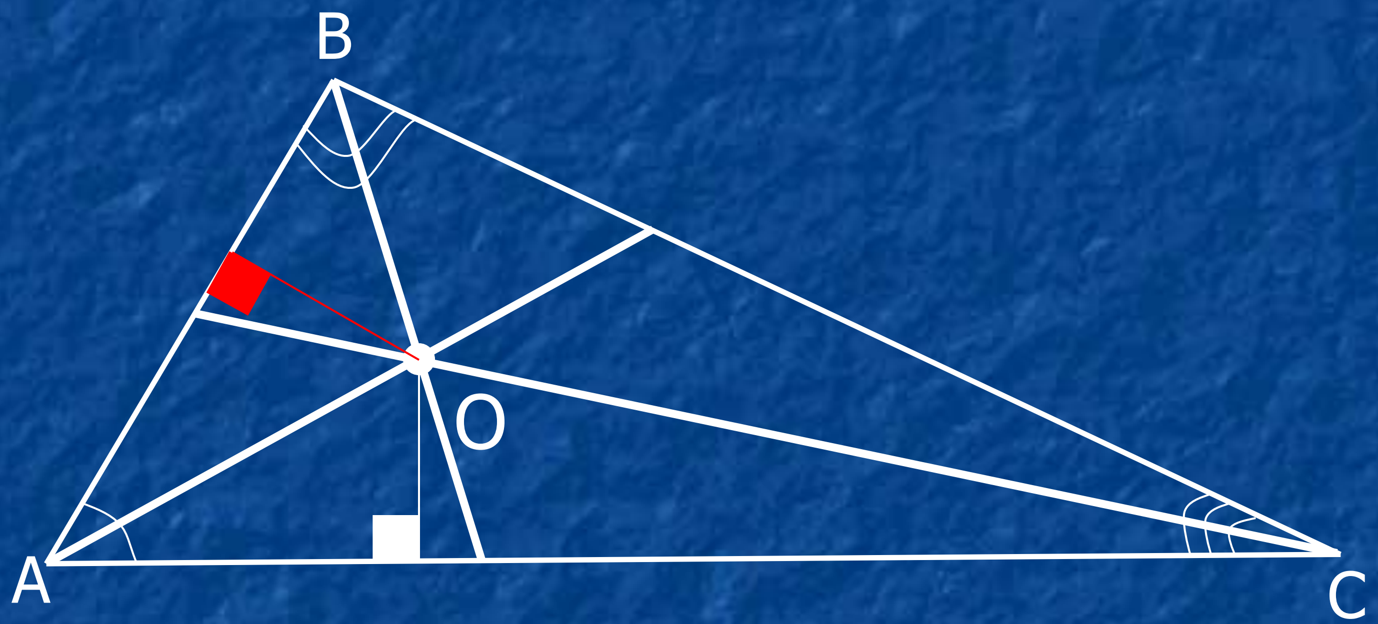
Вписанная окружность

Перпендикуляр из точки **О** к стороне АС.

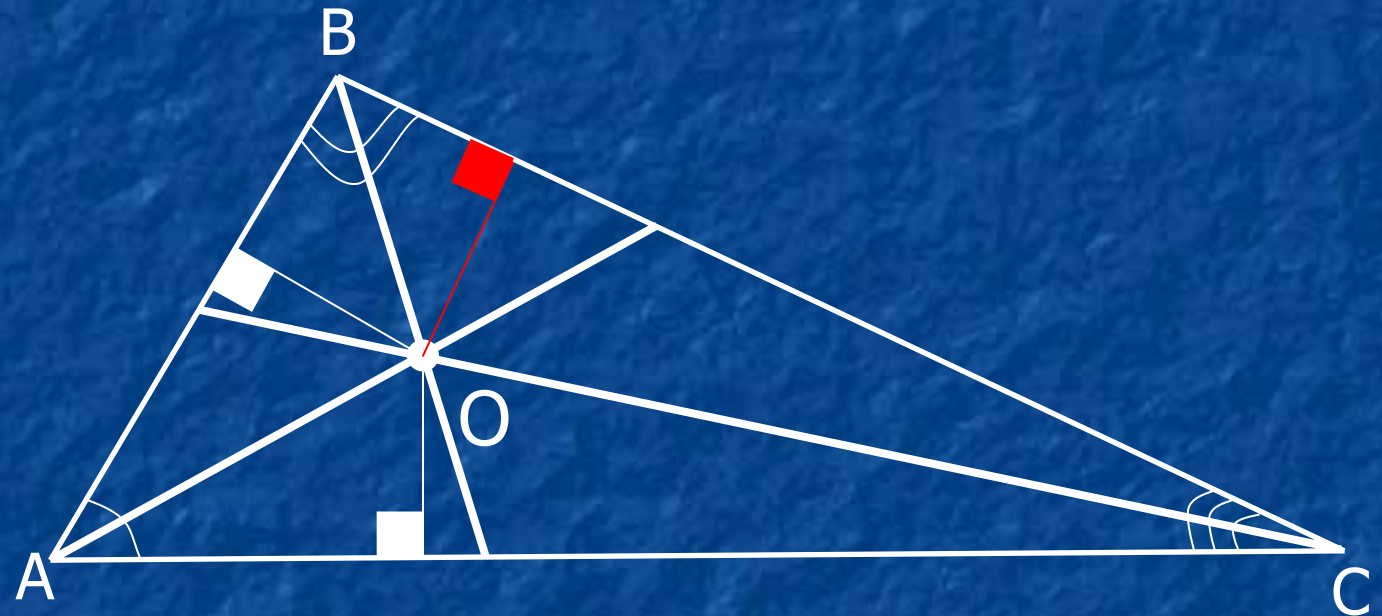


Вписанная окружность

Перпендикуляр из точки **О** к стороне АВ.

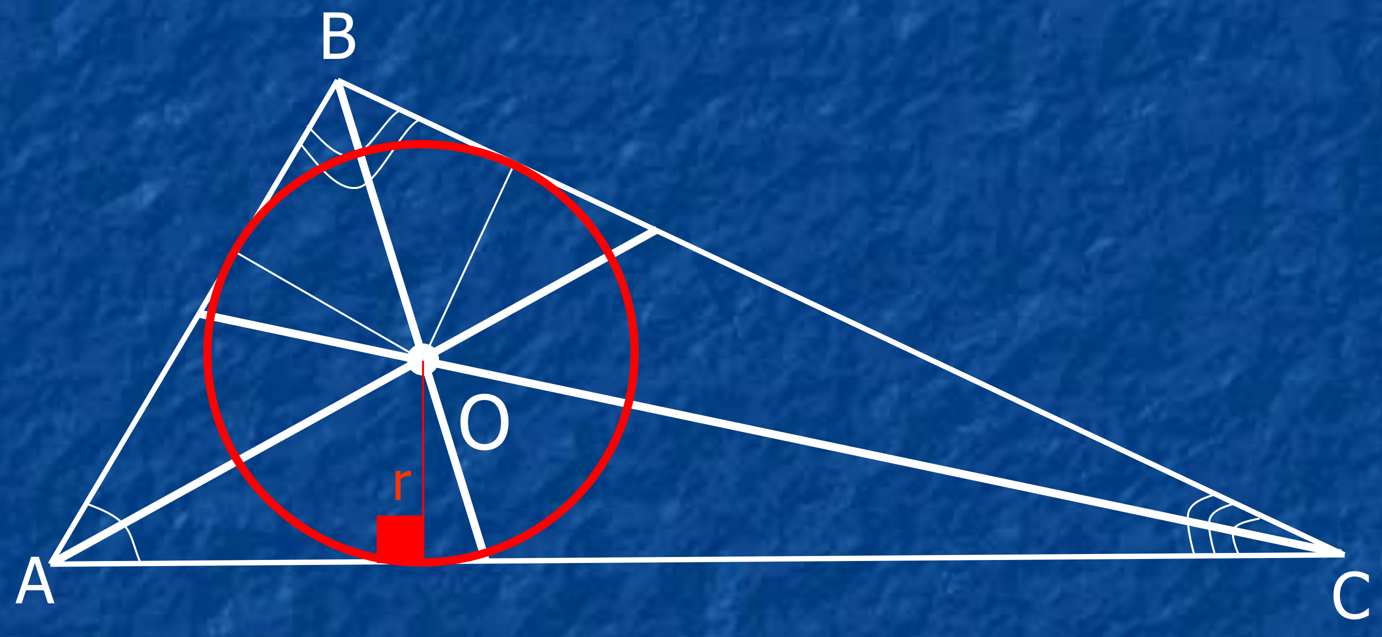


Перпендикуляр из точки **O** к стороне BC.



Вписанная окружность

Окружность (O, r) – искомая.

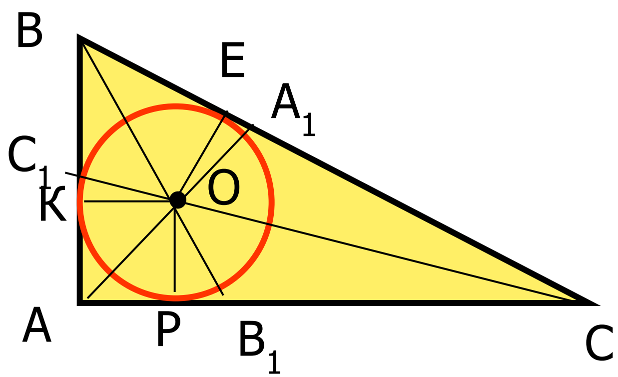


Вписанная окружность

Теорема.

В любой треугольник можно вписать окружность и при том только одну.

Теорема. **В треугольник можно вписать окружность, и притом только одну.**
Её центр – точка пересечения биссектрис треугольника.



Дано: $\triangle ABC$

Доказать: существует Окр.(O;r), вписанная в треугольник

Доказательство:

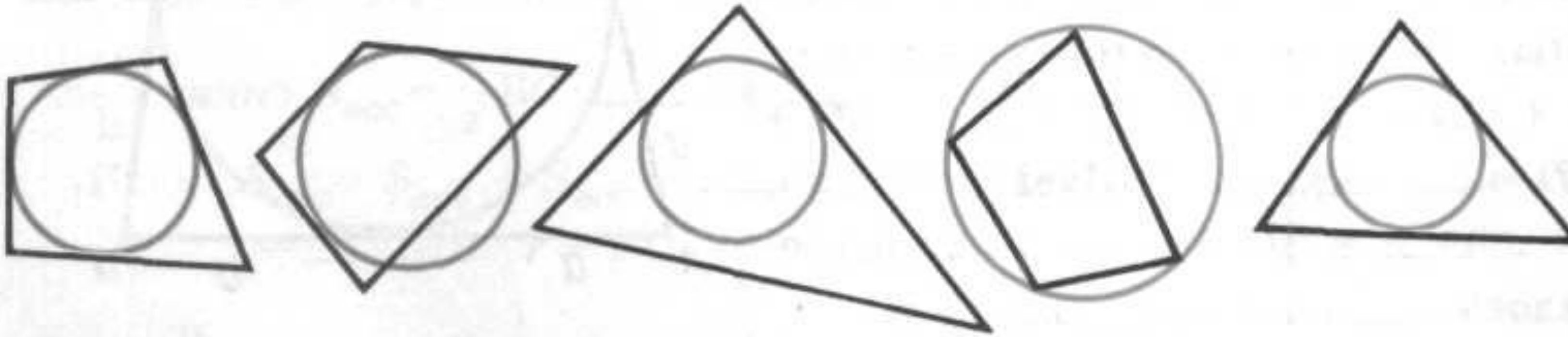
Проведём биссектрисы треугольника: AA_1, BB_1, CC_1.
По свойству (замечательная точка треугольника) биссектрисы пересекаются в одной точке – О,
и эта точка равноудалена от всех сторон треугольника, т. е :

$OK = OE = OP$, где $OK \perp AB$, $OE \perp BC$, $OP \perp AC$, значит,
О – центр окружности, а AB, BC, AC – касательные к ней.

Значит, окружность вписана в $\triangle ABC$.

ЗАДАЧА 1

На каких рисунках *а* — *д* изображены многоугольник и вписанная в него окружность?



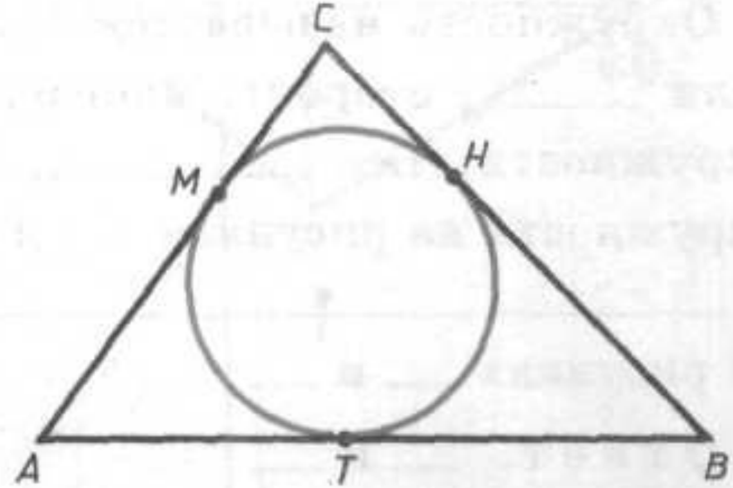
а) *б)* *в)* *г)* *д)*

Р е ш е н и е.

Окружность называется вписанной в __треугольник__, если __все__ стороны многоугольника __касаются__ окружности. Все __стороны__ многоугольника касаются окружности на рисунках __а__ и __д__, следовательно, многоугольник и __вписанная__ в него окружность изображены на рисунках __а__ и __д__

Задача 2

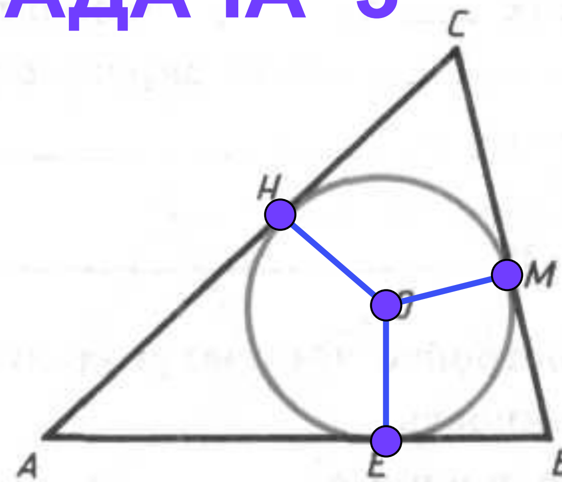
Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках H, M и T. Найдите периметр треугольника ABC, если $AM = 5$ м, $CH = 3$ м, $BT = 6$ м.



Решение.

Отрезки касательных к ОКРУЖНОСТИ, проведенные из одной ТОЧКИ, равны. Поэтому $AT =$ AM $= 5$ м, $CM =$ CH $=$ 3 м, $BH =$ BT $=$ 6 м. Следовательно, $P_{ABC} = AM + MC + CH +$ HB+BT+AT $= 2\cdot(AM +$ MC+CH$) =$ 2 $\cdot (5 +$ 3+6$) =$ 28 (м).

ЗАДАЧА 3



Найдите площадь треугольника ABC, если его периметр равен 60 см, а радиус r вписанной окружности равен 4 см.

Решение.

Соединим центр окружности с вершинами треугольника и точками H, M и E касания сторон треугольника и окружности. Так как радиус, проведенный в точку КАСАНИЯ, перпендикулярен к касательной, то $OH \perp AC$, следовательно, отрезок OH — ВЫСОТА треугольника AOC. Аналогично отрезок OM — высота ТРЕУГОЛЬНИКА BOC, отрезок OE — ВЫСОТА треугольника AOB. Поэтому $S_{AOB}=\frac{1}{2}AB\cdot OE$.

Аналогично $S_{BOC}=\frac{1}{2}BC\cdot OM$ и $S_{AOC}=\frac{1}{2}AC\cdot OH$.

Итак, $S_{ABC}=S_{AOB}+S_{BOC}+S_{AOC}=\frac{1}{2}(AB\cdot OE+BC\cdot OM+AC\cdot OH)=\frac{1}{2}(AB\cdot r+BC\cdot r+AC\cdot r)=\frac{1}{2}(AB+BC+AC)r=\frac{1}{2}P_{ABC}\cdot r=\frac{1}{2}\,60\cdot 4=120$ (см²).

№ 691

Дано: ΔABC – *равнобедренный*

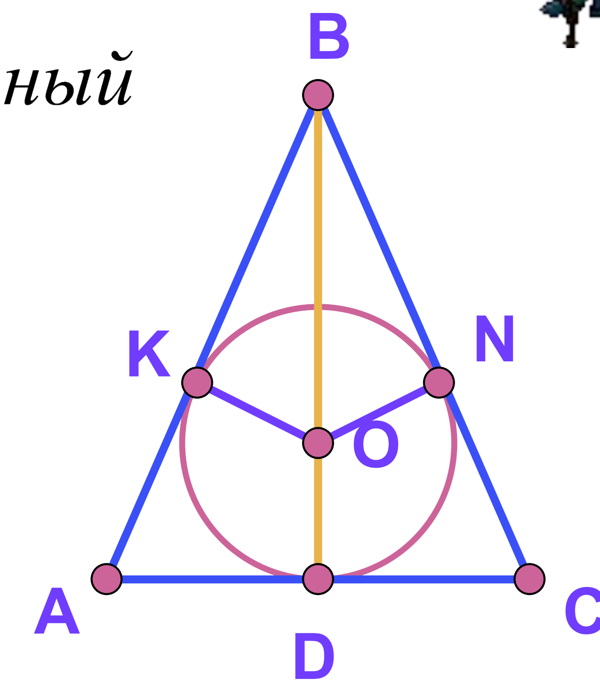
AC-основание

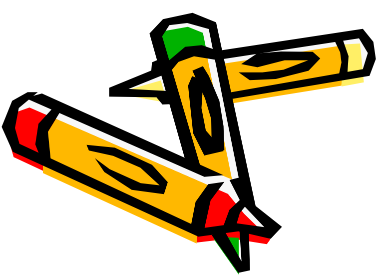
окр$(O; R)$ – *вписанная*

Точки K, N, D – точки касания.

BK = 4 cm

KA = 3 cm



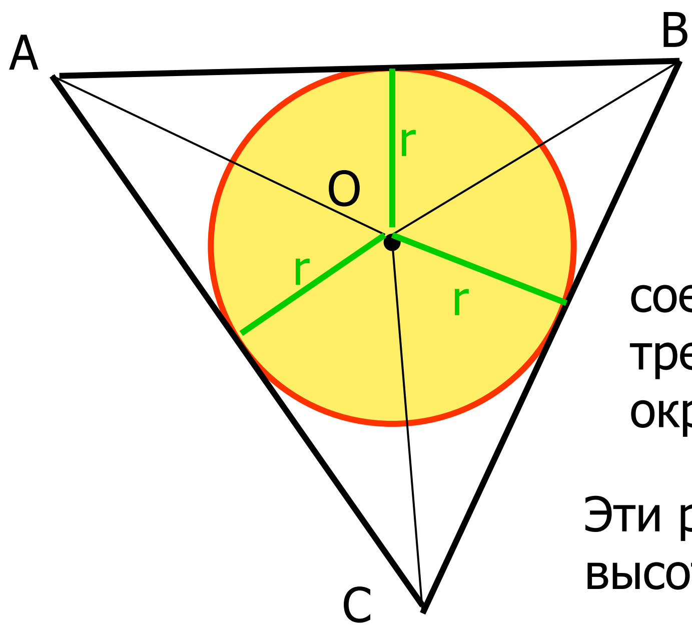


Найти P_{ABC}

Важная формула

Дано: Окр.(O;r) вписана в $\triangle ABC$,

$p = \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$ – полупериметр.



Доказать: $S_{ABC} = p \cdot r$

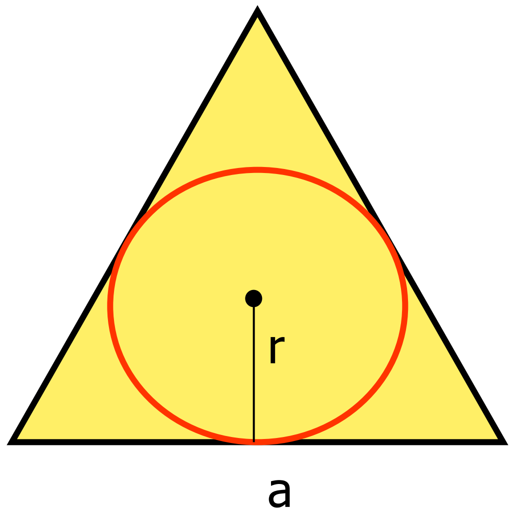
Доказательство:

соединим центр окружности с вершинами треугольника и проведём радиусы окружности в точки касания.

Эти радиусы являются высотами треугольников AOB, BOC, COA.

$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC} = \frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} BC \cdot r + \frac{1}{2} AC \cdot r =$
$= \frac{1}{2}(AB + BC + AC) \cdot r = \frac{1}{2} p \cdot r.$

Задача: в равносторонний треугольник со стороной 4 см вписана окружность. Найдите её радиус.



Решение:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{и} \quad S = p \cdot r$$

$$S = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$$

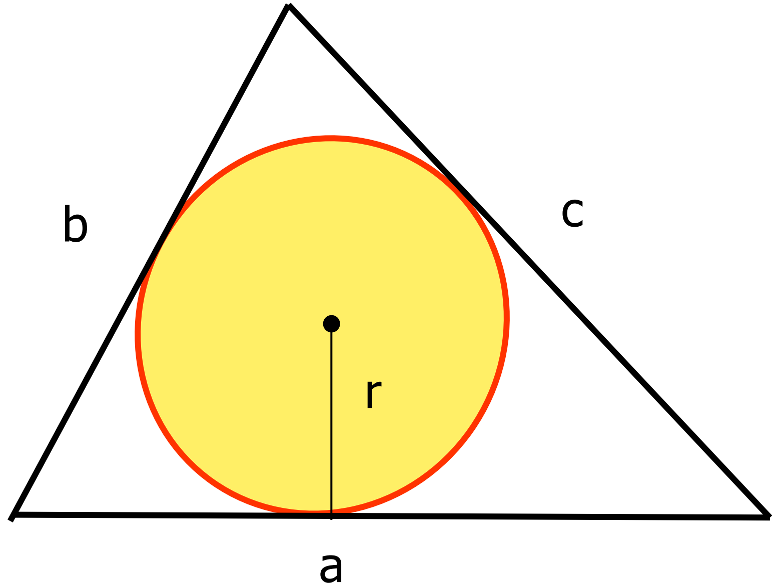
P = ½ ·4 · 3 = ½ · 12 = 6(см) - полупериметр

$$4\sqrt{3} = 6 \cdot r$$

$$r = \frac{4\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ (см)}$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (см)

Вывод формулы для радиуса вписанной в треугольник окружности

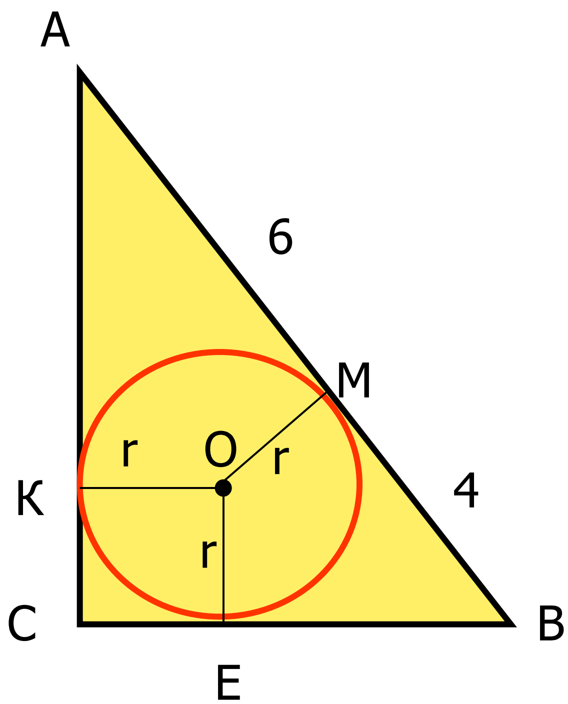


$$S = p \cdot r = \tfrac{1}{2} P \cdot r = \tfrac{1}{2} (a + b + c) \cdot r$$

$$2S = (a + b + c) \cdot r$$

$$r = \frac{2S}{a+b+c}$$

Задача: в прямоугольный треугольник вписана окружность, гипотенуза точкой касания делится на отрезки 6 см и 4 см. Найдите радиус вписанной окружности.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^0$
Окр.(О;r) вписана,
АМ = 6 см, ВМ = 4 см
Найти: r.

Решение:

AB = AM + BM = 6 + 4 = 10(см)

Т. к. Окр.(О;r) вписана в $\triangle ABC$, то AB, AC,BC – касательные и по свойству касательных, проведённых из одной точки:
АМ = АК = 6 см, ВЕ = ВМ = 4 см, СК = СЕ

Т. к. $\angle C = 90^0$, то СКОЕ – квадрат, поэтому СК = СЕ = r. ,

AC= 6+ r, BC = 4 + r

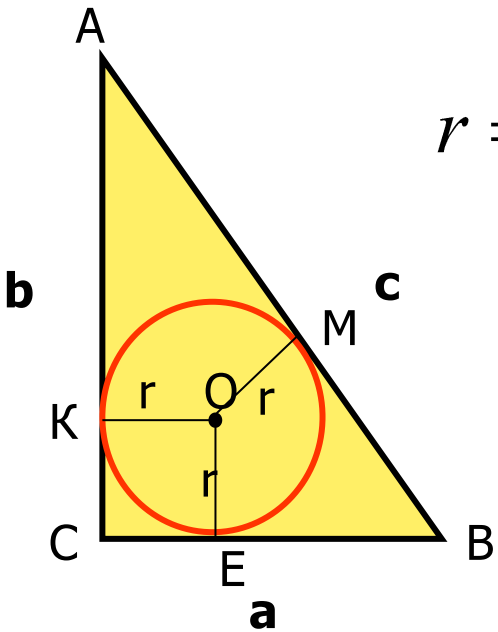
По теореме Пифагора: $AC^2 + BC^2 = AB^2$

$(6 + r)^2 + (4 + r)^2 = 10^2$

Решив квадратное уравнение, получим r = 2 см

Ответ: 2 см

Нужная формула для радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник



$$r = \frac{a+b-c}{2}; a, b$$ - **катеты, c - гипотенуза**

Доказательство:

Т. к. Окр.(O;r) вписана в треугольник ABC, у которого угол C – прямой, то

AC, BC, AB – касательные и

CKOE – квадрат, значит, CK = CE = r

По свойству касательных: BE = BM = a - r

AK = AM = b - r

AB = AM + BM

c = b – r + a - r

2r = a + b - c

r = ½ (a + b – c)