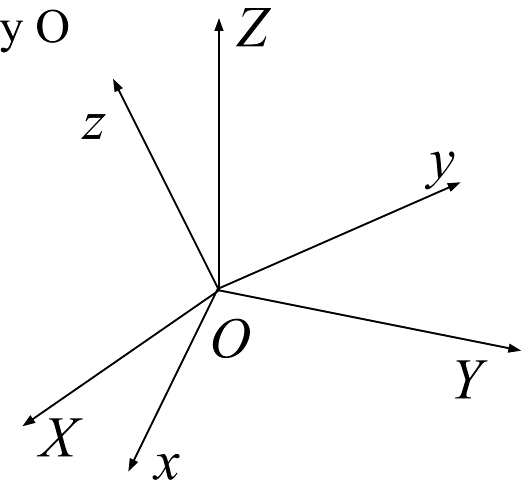
ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

ЛЕКЦИЯ 6:

ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ. СЛУЧАЙ ЭЙЛЕРА

1. Обозначения

Рассмотрим твердое тело, имеющее одну неподвижную точку O



$OXYZ$ неподвижная система координат

$Oxyz$ подвижная система координат (ПСС), жестко связанная с телом

Удобно работать в $Oxyz$ потому, что тензор инерции в этой системе координат есть величина постоянная.

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix} = \mathrm{const}$$

В каждый момент времени скорости тела распределены так, как будто происходит вращение относительно мгновенной оси с некоторой мгновенной угловой скоростью

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

компоненты мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ в подвижной системе координат $Oxyz$

Задача: построить уравнения движения тела в терминах p, q, r

2. Выражение для кинетического момента в ПСС

напоминание

Формула для раскрытия двойного векторного произведения

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$$

$$\mathbf{K}_O = \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \sum m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) =$$

$$= \sum m_i \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i) - \sum m_i \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) =$$

$$= \sum m_i \boldsymbol{\omega}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - \sum m_i \mathbf{r}_i (xp + yq + zr)$$

$$K_{Ox} = p\sum m_i\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - \sum m_i x (xp + yq + zr) =$$

$$= p\underbrace{\sum m_i\left(y^2 + z^2\right)}_{A} - q\underbrace{\sum m_i xy}_{F} - r\underbrace{\sum m_i xz}_{E}$$

$$\boxed{\begin{aligned} K_{Ox} &= Ap - Fq - Er \\ K_{Oy} &= Bq - Dr - Fp \\ K_{Oz} &= Cr - Ep - Dq \end{aligned}}$$

$$\begin{pmatrix} K_{Ox} \\ K_{Oy} \\ K_{Oz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

Если оси (x,y,z) главные (и только в этом случае)

$$\boxed{K_{Ox} = Ap,\ K_{Oy} = Bq,\ K_{Oz} = Cr}$$

3. Динамические уравнения Эйлера

Теорема об изменении кинетического момента

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}^e + \underbrace{0}_{\text{реакции}}$$ в неподвижной системе координат

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{K}_O}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{K}_O = \mathbf{M}^e$$ в подвижной системе координат

напоминание

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\tilde{d}\mathbf{a}}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a}$$

абсолютная производная — относительная производная

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{K}_O}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{A}p - \dot{F}q - \dot{E}r \\ \dot{B}q - \dot{D}r - \dot{F}p \\ \dot{C}r - \dot{E}p - \dot{D}q \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{K}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ p & q & r \\ Ap - \ldots & Bq - \ldots & Cr - \ldots \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{A}p - \dot{F}q - \dot{E}r + (C-B)qr + D(r^2 - q^2) + p(Fr - Eq) &= M_x^e \\ -\dot{F}p + \dot{B}q - \dot{D}r + (A-C)rp + E(p^2 - r^2) + q(Dp - Fr) &= M_y^e \\ -\dot{E}p - \dot{D}q + \dot{C}r + (B-A)pq + F(q^2 - p^2) + r(Eq - Dp) &= M_z^e \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{A}p + (C-B)qr &= M_x^e \\ \dot{B}q + (A-C)rp &= M_y^e \\ \dot{C}r + (B-A)pq &= M_z^e \end{aligned}}$$

Если оси (x,y,z) главные

4. Выражение для кинетической энергии в ПСС

$$T = \frac{1}{2} I_\omega \omega^2$$

I_ω Изменяется во времени, т.к. мгновенная ось перемещается относительно тела

$$I_\omega = \begin{pmatrix} l_x & l_y & l_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix} = \sum_{i,j} I_{ij} l_i l_j$$

l_i направляющие косинусы мгновенной оси вращения

$$l_x = \frac{p}{\omega}, l_y = \frac{q}{\omega}, l_z = \frac{r}{\omega},$$

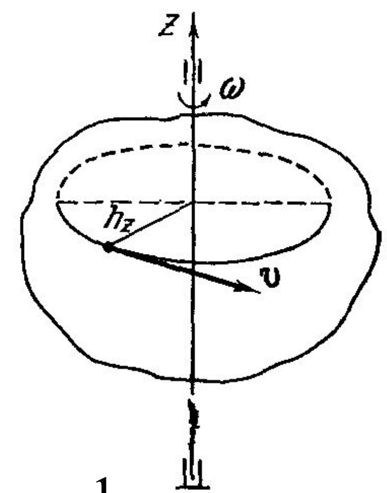
$$\boxed{T = \frac{1}{2}\left(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2\right) - Dqr - Epr - Fpq}$$

Если оси (x,y,z) главные (и только в этом случае)

В общем случае КЭ <u>не есть</u> сумма КЭ трех вращений!

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\left(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2\right)}$$

напоминание



$$T = \frac{1}{2}\int \omega^2 h_z^2 dm =$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2 \int h_z^2 dm = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

5. Динамические уравнения Эйлера

Всюду далее считаем, что оси x,y,z направлены по главным осям тела для точки O

$$\boxed{\begin{aligned} A\dot{p} + (C-B)qr &= M_x^e \\ B\dot{q} + (A-C)rp &= M_y^e \\ C\dot{r} + (B-A)pq &= M_z^e \end{aligned}}$$

Моменты M_x^e, M_y^e, M_z^e в правых частях динамических уравнений Эйлера являются, вообще говоря, функциями эйлеровых углов, их производных и времени

$$M_x^e = M_x^e\left(\varphi, \psi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}, t\right)$$
$$M_y^e = M_y^e\left(\varphi, \psi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}, t\right)$$
$$M_z^e = M_z^e\left(\varphi, \psi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}, t\right)$$

Поэтому динамические уравнения Эйлера не являются замкнутой системой уравнений относительно p, q, r Их нужно дополнить кинематическими уравнениями Эйлера, связывающими p, q, r с эйлеровыми углами

6. Эйлеровы углы и кинемати-ческие уравнения Эйлера

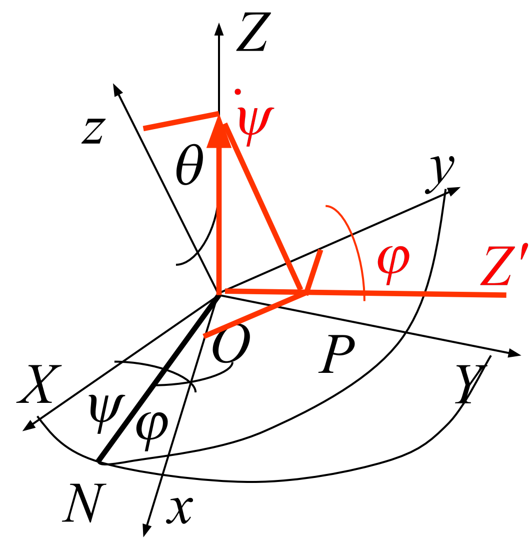
Плоскость P проведена через оси x,y.

Линия узлов N – линия пересечения плоскостей P и OXZ

Угол прецессии ψ - угол между N и OX

Угол чистого вращения φ- угол между N и Ox

Угол нутации θ - угол между OZ и Oz



$$\vec{\dot{\varphi}} \perp P \quad \Rightarrow \quad \vec{\dot{\varphi}} \parallel Oz$$

$$\vec{\dot{\psi}} \perp XOY \quad \Rightarrow \quad \vec{\dot{\psi}} \parallel OZ$$

$$\vec{\dot{\theta}} \perp zOZ \quad \Rightarrow \quad \vec{\dot{\theta}} \parallel ON$$

$$\boldsymbol{\omega} = \vec{\dot{\varphi}} + \vec{\dot{\psi}} + \vec{\dot{\theta}}$$

$$\boldsymbol{\omega} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k}$$

$$p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k} = \vec{\dot{\varphi}} + \vec{\dot{\psi}} + \vec{\dot{\theta}}$$

$$\vec{\dot{\varphi}} = \dot{\varphi}\mathbf{k}$$

$$\vec{\dot{\psi}} = \dot{\psi}\cos\theta\mathbf{k} + \dot{\psi}\sin\theta\left(\sin\varphi\mathbf{i} + \cos\varphi\mathbf{j}\right)$$

$$\vec{\dot{\theta}} = \dot{\theta}\left(\cos\varphi\mathbf{i} - \sin\varphi\mathbf{j}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} p &= \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi \\ q &= \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi \\ r &= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} \end{aligned}}$$

7. Общая система уравнений Эйлера движения ТТ вокруг неподвижной точки

ДС
$$\boxed{\begin{aligned} A\dot{p} + (C-B)qr &= M_x^e \\ B\dot{q} + (A-C)rp &= M_y^e \\ C\dot{r} + (B-A)pq &= M_z^e \end{aligned}}
\quad + \quad
\boxed{\begin{aligned} p &= \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi \\ q &= \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi \\ r &= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} \end{aligned}}$$
КС

Преимущества системы уравнений Эйлера выражается в тех случаях, когда главные моменты действующих сил не зависят от эйлеровых углов и их производных. В этом случае ДС – независимая система относительно p, q, r

Наиболее простым и очень важным случаем является тот, когда момент внешних сил относительно неподвижной точки равен нулю. Тогда говорят, что имеет место **случай Эйлера** движения твердого тела вокруг неподвижной точки.

Случай Эйлера возможен, когда внешних сил нет совсем или тогда, когда внешние силы, приложенные к телу, приводятся к равнодействующей, проходящей через неподвижную точку.

8. Стационарное вращение в случае Эйлера

Будем называть стационарным вращением такое движение твердого тела, при котором его угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ постоянна относительно неподвижной системы координат

При этом угловая скорость будет постоянна и в подвижной системе координат.

Д-во: $$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{\tilde{d}\boldsymbol{\omega}}{dt} + \underbrace{\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}}_{0}$$

$$\boxed{\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\tilde{d}\mathbf{a}}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a}}$$

$$\dot p = \dot q = \dot r = 0 \quad \Rightarrow \quad (C-B)qr = 0 \quad (B-A)pq = 0 \quad (A-C)rp = 0$$

Стационарное вращение тела может происходить только вокруг главной оси инерции тела для точки O, причем величина угловой скорости тела может быть произвольной.

$A \neq B \neq C$ $\quad qr = 0 \wedge pq = 0 \wedge rp = 0$ — Возможно когда две из величин p, q, r равны нулю, а третья произвольна

$A = B \neq C$ $\quad q = p = 0,$ r произвольна — Ось z главная; $\quad r = 0$, p, q произв — Любая ось в плоскости xy главная

$A = B = C$ $\quad p, q, r$ произвольны — Тензор инерции сферический и любая ось главная

9. Устойчивость стационарного вращения

Базовое состояние: стац. вращением твердого тела, вокруг одной из главных осей

$$p = q = 0 \qquad r = R$$

Пусть угловая скорость в начальный момент получила малые возмущения

$$p(0) = \varepsilon p^0 \qquad q(0) = \varepsilon q^0 \qquad r(0) = R + \varepsilon r^0 \qquad \varepsilon \ll 1$$

Предполагая отклик на возмущение малым, ищем решение в виде

$$p = \varepsilon p_1 \qquad q = \varepsilon q_1 \qquad r = R + \varepsilon r_1$$

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = 0 \\ B\dot{q} + (A - C)rp = 0 \\ C\dot{r} + (B - A)pq = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \varepsilon A\dot{p}_1 + \varepsilon (C - B) q_1 (R + \cancel{\varepsilon r_1}) = 0 \\ \varepsilon B\dot{q}_1 + \varepsilon (A - C) p_1 (R + \cancel{\varepsilon r_1}) = 0 \\ \varepsilon C\dot{r}_1 + \cancel{\varepsilon^2 (B - A) p_1 q_1} = 0 \end{cases} \quad \frac{d^2 p_1}{dt^2} + a p_1 = 0$$

$$a = \frac{(C - B)(C - A)}{AB} R^2$$

10. Устойчивость стационарного вращения

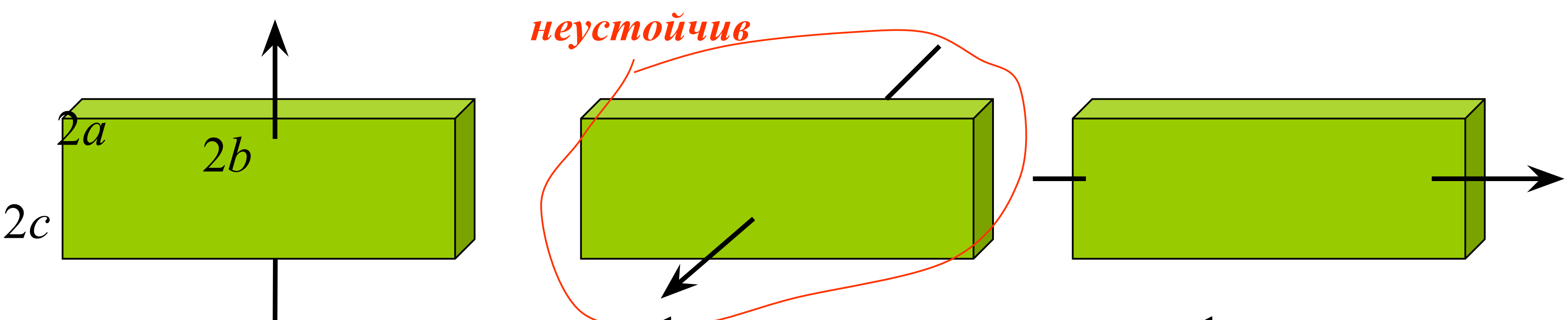
$$\frac{d^2 p_1}{dt^2} + a p_1 = 0 \qquad\qquad a = \frac{(C-B)(C-A)}{AB} R^2$$

Если $a > 0$ то решение выражается через тригонометрические ф-ии и остается малым

Если $a < 0$ то решение выражается через экспоненты и неограниченно возрастает

Условие устойчивости $\boxed{(C-B)(C-A) > 0}$

Момент инерции относительно оси z не должен быть средним

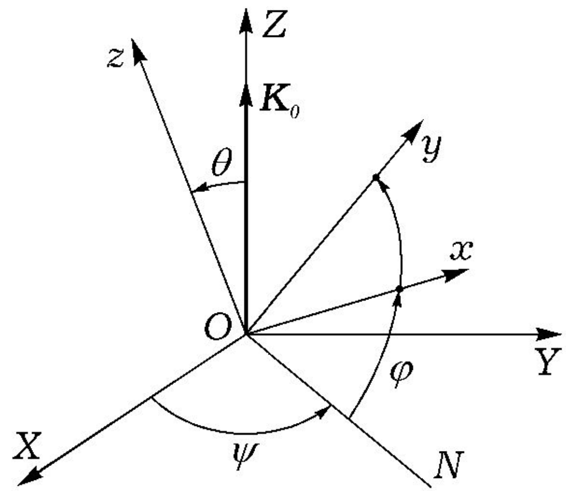


$$I = \frac{1}{3} M\left(b^2 + a^2\right) \quad > \quad I = \frac{1}{3} M\left(b^2 + c^2\right) \quad > \quad I = \frac{1}{3} M\left(c^2 + a^2\right)$$

11. Движение динамически симмет-ричного тела в случае Эйлера

Тело называется **динамически симметричным**, если два его главных момента инерции для точки O равны, например $A = B$. Ось Oz тогда называется **осью динамической симметрии**.

Неподвижную систему координат $OXYZ$ выберем так, чтобы ее ось OZ была направлена по вектору $\boldsymbol{K}_0$. Для проекций вектора $\boldsymbol{K}_0$ на оси $Oxyz$, имеем:



$$K_{Ox} = Ap = K_O \sin\theta \sin\varphi \qquad K_{Oy} = Aq = K_O \sin\theta \cos\varphi$$

$$\left.\begin{array}{l} K_{Oz} = Cr = K_O \cos\theta \\ C\dot{r} + (B - A)\, pq = 0 \quad \Rightarrow \quad r = r_0 = \text{const} \end{array}\right] \boxed{\theta = \theta_0} = \text{const}$$

$$\text{КС}\begin{cases} p = \dot{\psi} \sin\theta_0 \sin\varphi & \Rightarrow \dot{\psi} = K_O / A = \text{const} \\ q = \dot{\psi} \sin\theta_0 \cos\varphi & \\ r_0 = \dot{\psi} \cos\theta_0 + \dot{\varphi} & \Rightarrow \dot{\varphi} = \text{const} \end{cases}$$

$\boxed{\dot{\psi} = \omega_2}$ угловая скорость прецессии

$\boxed{\dot{\varphi} = \omega_1}$ угловая скорость собственного вращения

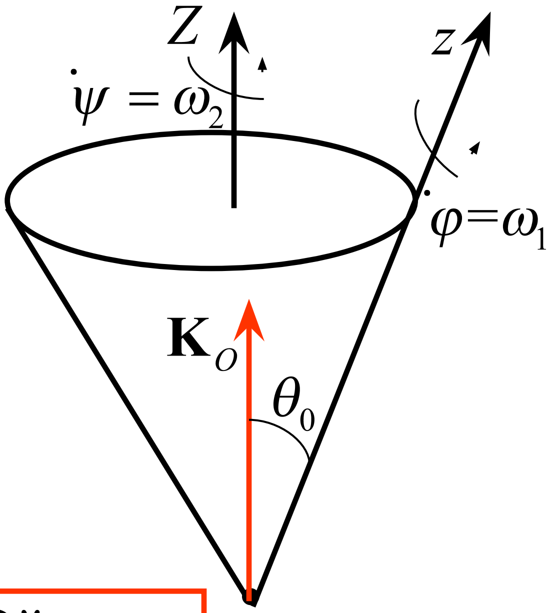
напоминание

$\dot{\varphi}$ ▯ Oz $\quad$ $\dot{\psi}$ ▯ OZ $\quad$ $\dot{\theta}$ ▯ ON

Тело вращается с угловой скоростью ω_1 вокруг своей оси симметрии, а ось симметрии вращается с угловой скоростью ω_2 вокруг вектора $\mathbf{K}_O$

12. Регулярная прецессия

Движение твердого тела вокруг неподвижной точки, состоящее из его вращения вокруг оси, неизменно связанной с телом, и движения, при котором эта ось вращается вокруг пересекающей ее оси, неподвижной в рассматриваемой системе отсчета, называют **прецессией**. Прецессия называется **регулярной**, если вращение тела вокруг неизменно связанной с ним оси и вращение самой этой оси происходят с постоянными по модулю угловыми скоростями.



Динамически симметричное тело в случае Эйлера совершает регулярную прецессию

13. Первые интегралы в случае Эйлера

$$\mathbf{K}_O = \text{const} \quad \Rightarrow \quad K_O = \left|\mathbf{K}_O\right| = \sqrt{K_{OX}^2 + K_{OY}^2 + K_{OZ}^2} = \text{const}$$

Длина вектора (в отличие от координат) не зависит от системы отсчета

$$K_O = \sqrt{K_{Ox}^2 + K_{Oy}^2 + K_{Oy}^2} = \text{const}$$

$$K_O^2 = K_{Ox}^2 + K_{Oy}^2 + K_{Oy}^2 = \boxed{A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = \text{const}}$$

$$A^2 p\dot{p} + B^2 \dot{q}q + C^2 \dot{r}r = 0$$

$$\begin{array}{r|l|l} Ap\cdot & A\dot{p} + (C-B)qr = 0 & \cdot p \\ Bq\cdot & B\dot{q} + (A-C)rp = 0 & \cdot q \\ Cr\cdot & C\dot{r} + (B-A)pq = 0 & \cdot r \end{array}$$

$$A\dot{p}p + B\dot{q}q + C\dot{r}r = 0$$

$$\boxed{\underbrace{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}_{2T} = \text{const}}$$

Другой способ: воспользоваться теоремой о сохранении энергии