М
Е
Х
А
Н
И
К
А

Модуль 1.
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

- Раздел 1. **Статика**
- Раздел 2. **Кинематика**
- Раздел 3. **Динамика точки**
- Раздел 4. **Общие теоремы динамики**
- Раздел 5. **Аналитическая механика**

Разработал доцент, к.т.н. кафедры МиКМ Загиров И.И.

МЕХАНИКА

Теоретическая механика.
Модуль 1

Раздел 1 – СТАТИКА

- **ВВЕДЕНИЕ В СТАТИКУ**
  - ЛЕКЦИЯ 1
  - ЛЕКЦИЯ 2
  - ЛЕКЦИЯ 3
- **УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ**
  - ЛЕКЦИЯ 4
  - ЛЕКЦИЯ 5
- **ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ**
  - ЛЕКЦИЯ 6

1.1

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СТАТИКА

Введение в статику

ЛЕКЦИЯ 1
План:

1.1 Основные понятия и определения.
1.2. Аксиомы статики.
1.3. Связи и их реакции

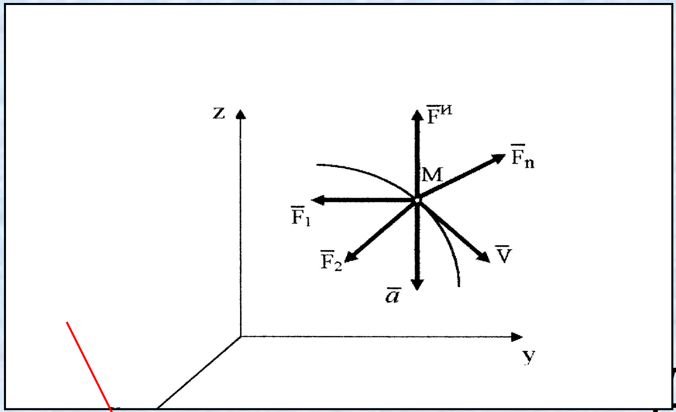
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Статика - *раздел механики, в котором излагается общее учение о силах и условиях равновесия материальных тел, находящихся под действием сил.*

Равновесие - *это состояние покоя тела по отношению к другим телам, например по отношению к Земле.*

Абсолютно твердое тело - *такое тело, расстояние между каждыми двумя точками которого всегда остается постоянным.*

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ



Сила *в механике – это величина, являющаяся основной мерой механического взаимодействия материальных тел.*

Действие силы на тело определяется:

- ***модулем*** *силы;*
- ***направлением*** *вектора силы;*
- ***точкой приложения*** *вектора силы*.

линия действия силы

Основная единица измерения силы - 1 ньютон (1 Н).

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Система сил - ***совокупность сил, действующих на рассматриваемое тело***

Системы сил

Плоские *(линии действия всех сил лежат в одной плоскости)*

Пространственные *(линии действия сил не лежат в одной плоскости)*

Параллельные *(линии действия сил параллельны друг другу)*

Произвольные *(линии действия сил не пересекаются и не параллельны)*

Сходящиеся *(линии действия сил пересекаются в одной точке)*

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Эквивалентными *называются две системы сил, приводящие тело к одному и тому же кинематическому состоянию.*

Уравновешенная *(эквивалентная нулю) – это такая система сил, под действием которой свободное твердое тело может находиться в покое.*

Равнодействующей системы сил, *называется сила, эквивалентная данной системе сил.*

Сила, приложенная к телу в какой-нибудь одной его точке, называется ***сосредоточенной****.*
Силы, действующие на все точки объема или части поверхности тела, называются ***распределенными****.*

АКСИОМЫ СТАТИКИ

1. *Если на свободное абсолютно твердое тело действуют две силы, то тело может находиться в равновесии тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю ($F_1 = F_2$) и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны*

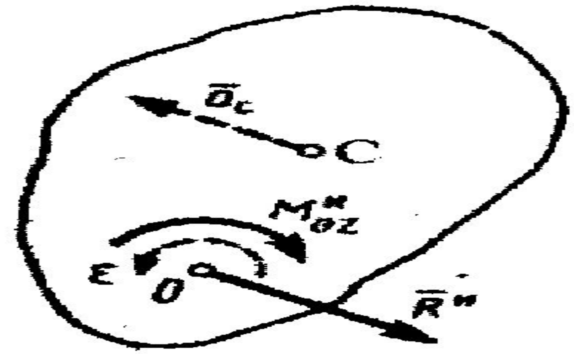


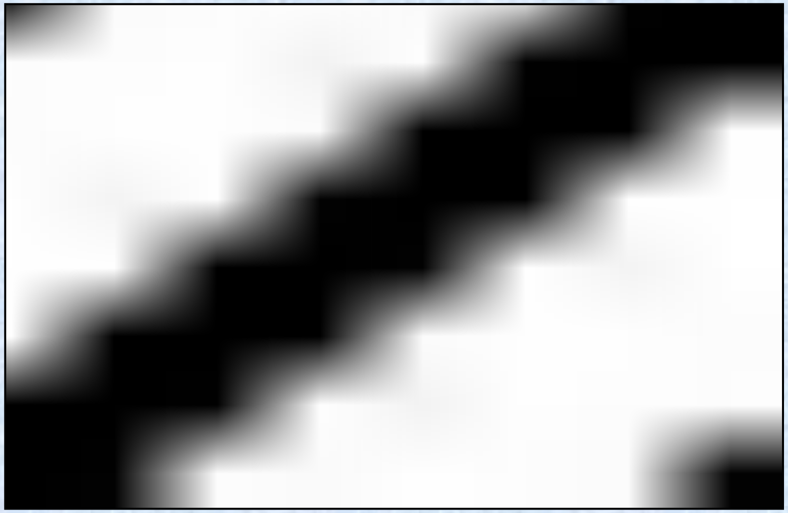
Рис. 82

2. *Действие данной системы сил на абсолютно твердое тело не изменяется, если к ней прибавить или от нее отнять уравновешенную систему сил*

Следствие: *действие силы на абсолютно твердое тело не изменится, если перенести точку приложения силы вдоль ее линии действия в любую другую точку тела.*

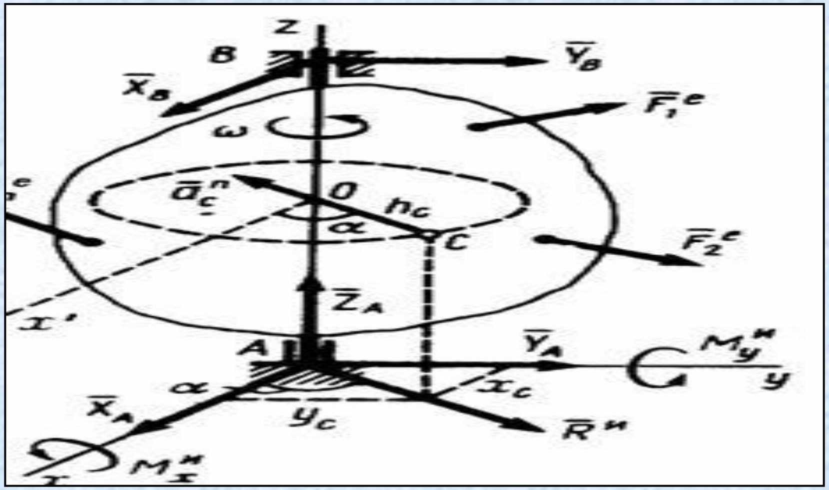
АКСИОМЫ СТАТИКИ

3. **Закон параллелограмма сил***: две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и изображаемую диагональю параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах*



АКСИОМЫ СТАТИКИ

4. Закон равенства действия и противодействия: *при всяком действии одного материального тела на другое имеет место такое же численно, но противоположное по направлению противодействие, т.е.*



5. Принцип отвердевания: *равновесие изменяемого (деформируемого) тела, находящегося под действием уравновешенной системы сил, возможно только при его «отвердевании»*

СВЯЗИ И ИХ РЕАКЦИИ

Свободным *называется тело, которое может совершать из данного положения любые перемещения в пространстве*

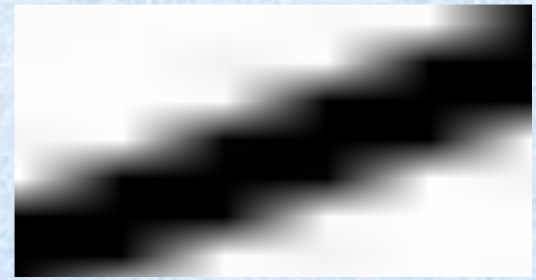
Несвободным *называется тело, перемещениям которого в пространстве препятствуют какие-нибудь другие, скрепленные или соприкасающиеся с ним, тела* (**связи**)

Реакция связи – *это сила, с которой связь действует на тело, препятствуя его перемещениям, называется.*

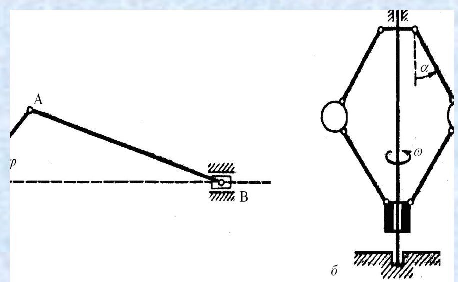
Принцип освобождаемости от связей: *всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если действие связей заменить их реакциями, приложенными к данному телу*

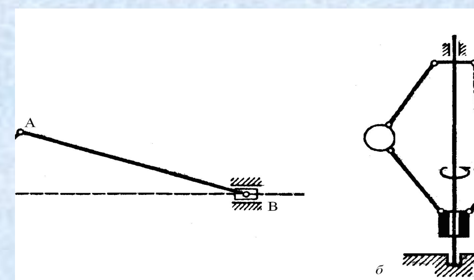
СВЯЗИ И ИХ РЕАКЦИИ

Гладкая поверхность

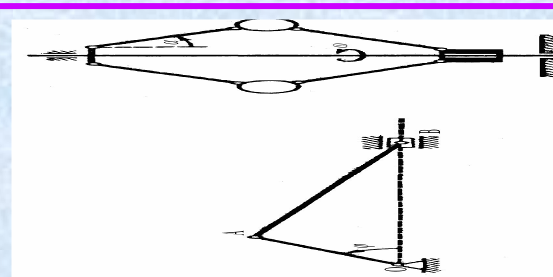


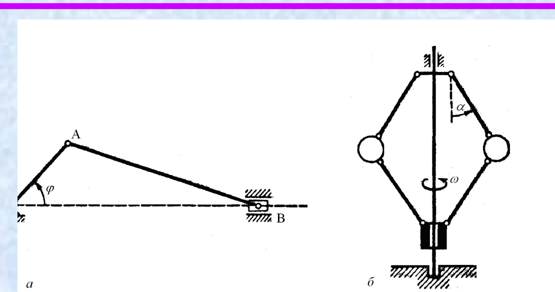
Гибкая связь





Шарнирный стержень

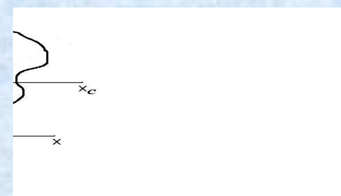


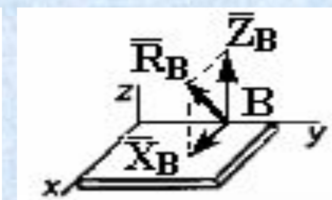


СВЯЗИ И ИХ РЕАКЦИИ

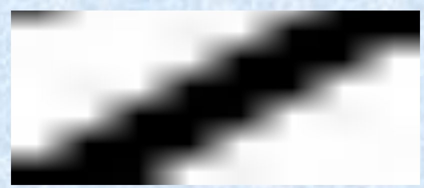
Шарнирно-неподвижная опора

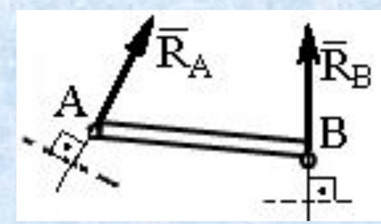
Цилиндрический шарнир



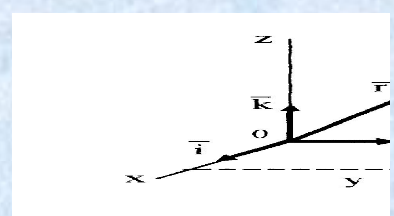


Шарнирно-подвижная опора





Жесткая заделка



2.1

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СТАТИКА

Введение в статику

ЛЕКЦИЯ 2

План:

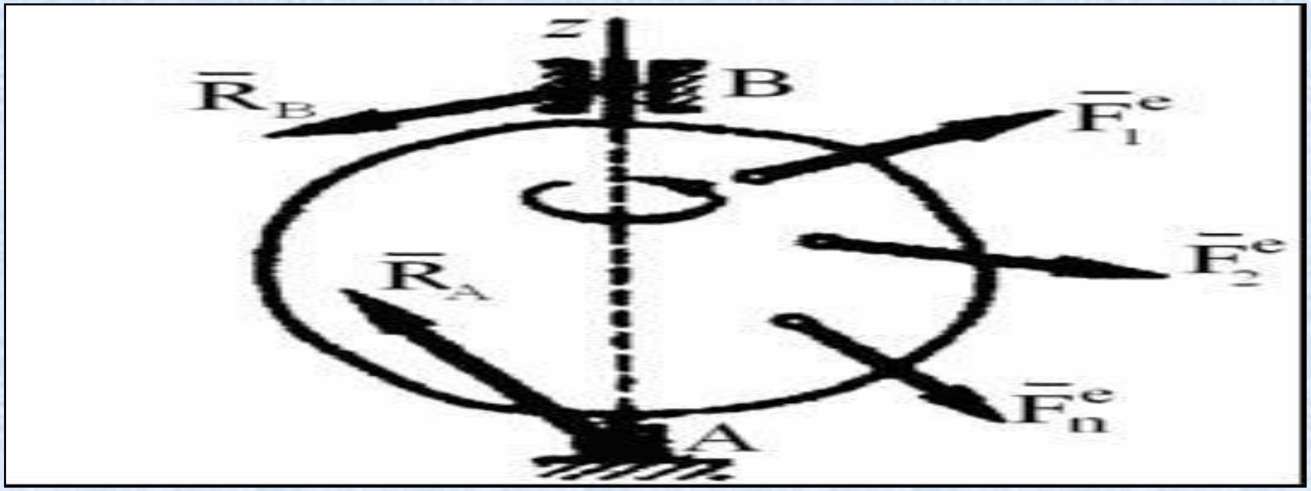
2.1. Проекции сил.

2.2. Момент силы относительно точки и относительно оси.

2.3. Пара сил, момент пары

ПРОЕКЦИИ СИЛ

Проекция силы на ось - *алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси:*



$F_x = F\cos\alpha = ab;$

$Q_x = Q\cos\alpha_1 =$
$= -Q\cos\phi = -de$

$P_x = 0$

ПРОЕКЦИИ СИЛ

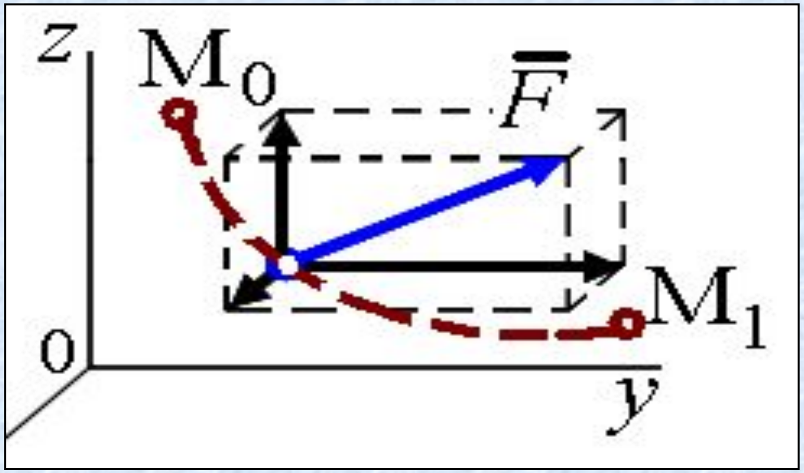
Проекция силы на плоскость *это вектор , заключенный между проекциями начала и конца силы на эту плоскость*

2.4

Введение в статику

ПРОЕКЦИИ СИЛ

Силу можно задавать ее проекциями F_x, F_y, F_z на координатные оси:



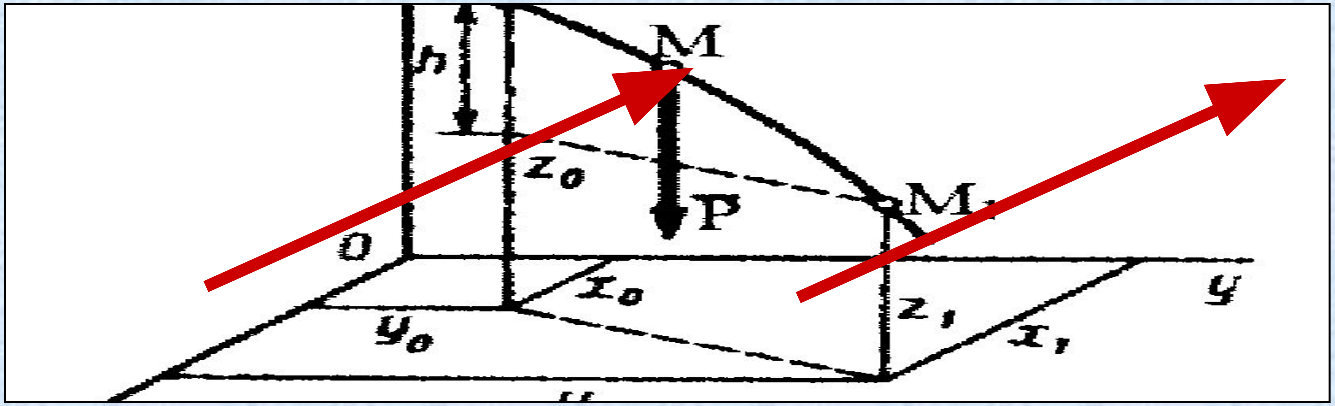
2.5

СПОСОБЫ СЛОЖЕНИЯ И РАЗЛОЖЕНИЯ СИЛ

Введение в статику

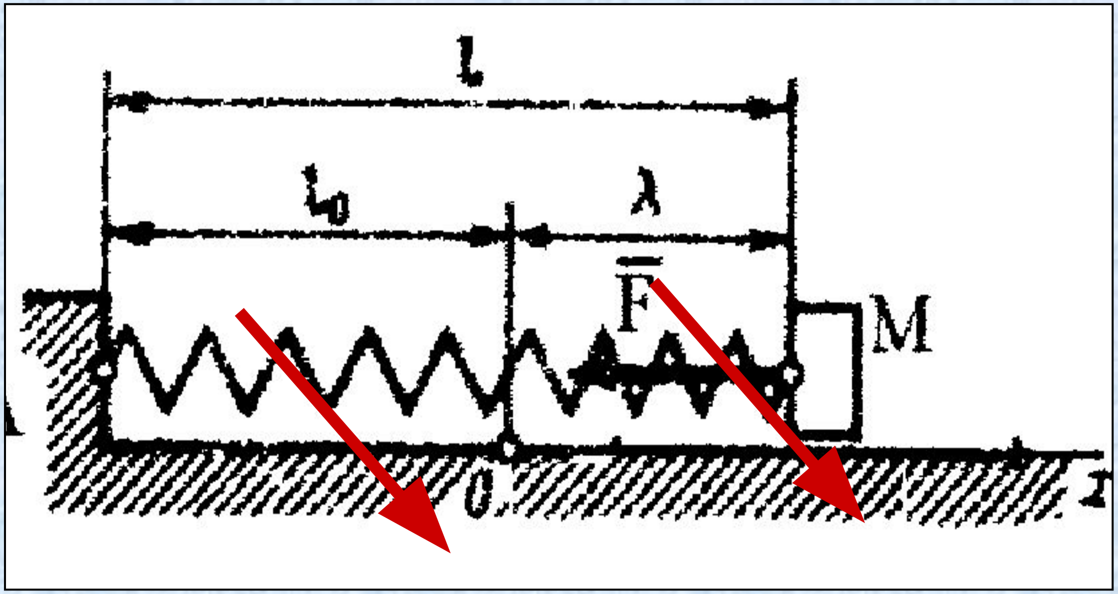
1. Сложение двух сил

Величину, равную геометрической сумме сил системы, называют **главным вектором этой системы сил**

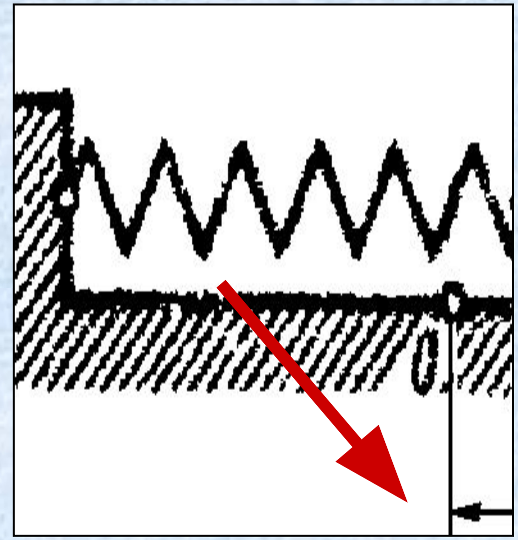


СПОСОБЫ СЛОЖЕНИЯ И РАЗЛОЖЕНИЯ СИЛ

2. Сложение системы сил

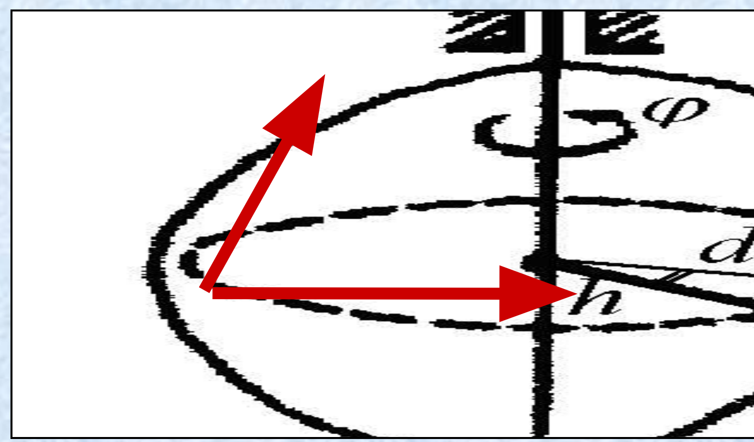


Аналитический способ сложения сил



$$R_x = \sum F_{kx};$$
$$R_y = \sum F_{ky};$$
$$R_z = \sum F_{kz}$$

Разложение сил



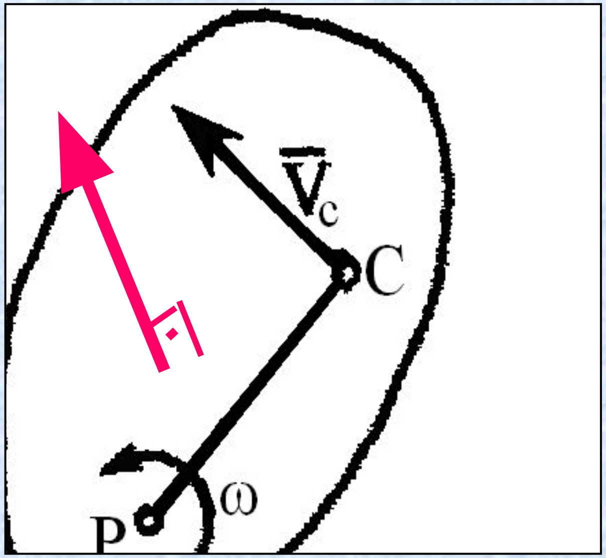
Момент силы относительно точки

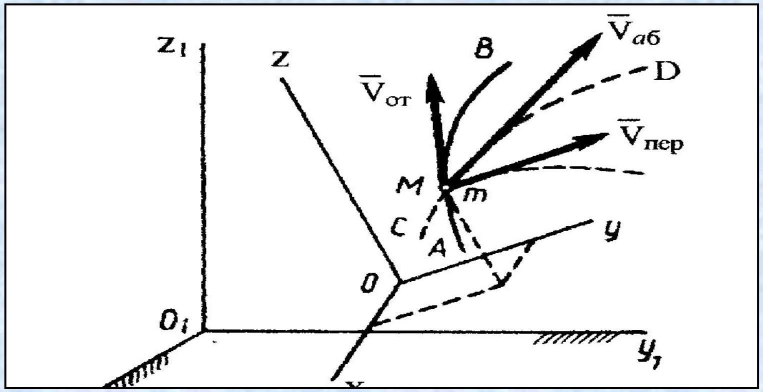
Векторный момент силы *относительно центра О - это приложенный в центре О вектор*

где - радиус-вектор точки А, проведенный из центра О.

Алгебраический момент силы *относительно центра*

$m_0(\quad) = \pm F$
$h.$

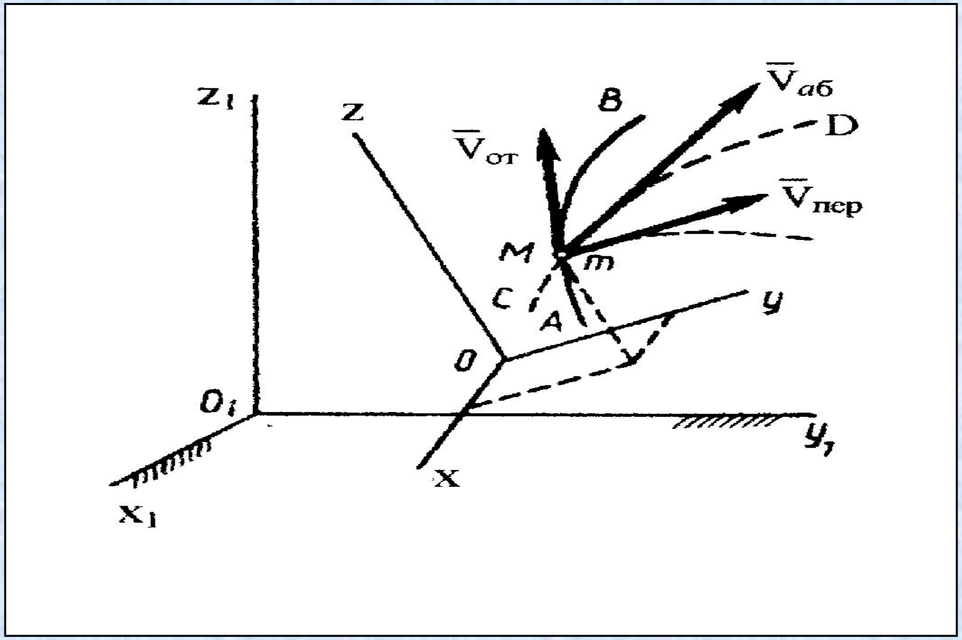




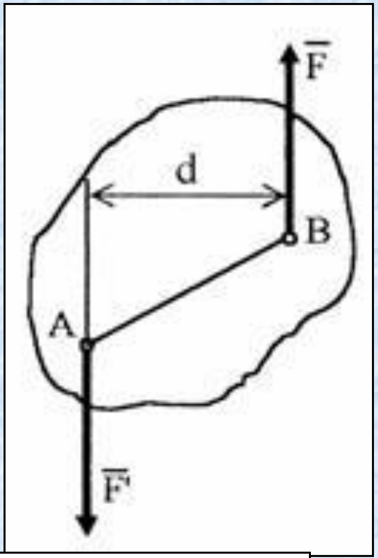
$m_0(\quad) = P\,h_1,\ m_0(\quad) = -\,Q$
h_2

Момент силы относительно оси

- это момент проекции вектора силы на плоскость перпендикулярную оси относительно точки пересечения оси с этой плоскостью



Пара сил, момент пары



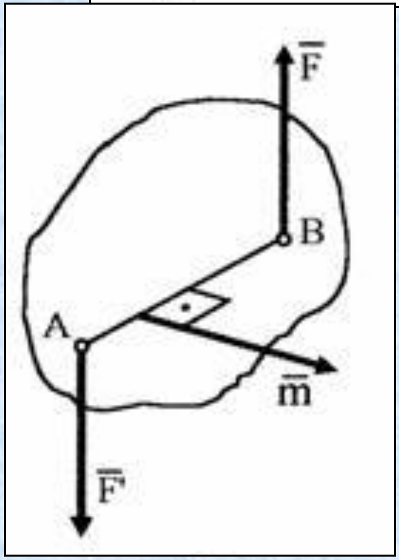
Плоскость действия пары - *плоскость, проходящая через линии действия сил пары*

Алгебраический момент пары

$$m = \pm F\, d$$

Плечо пары d **-** *кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары*

Векторный момент пары - *это вектор , направленный перпендикулярно плоскости действия пары в ту сторону, откуда пара видна стремящейся повернуть тело против хода часовой стрелки*



Этот вектор называется ***скользящим***

МЕХАНИКА

Модуль 1
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

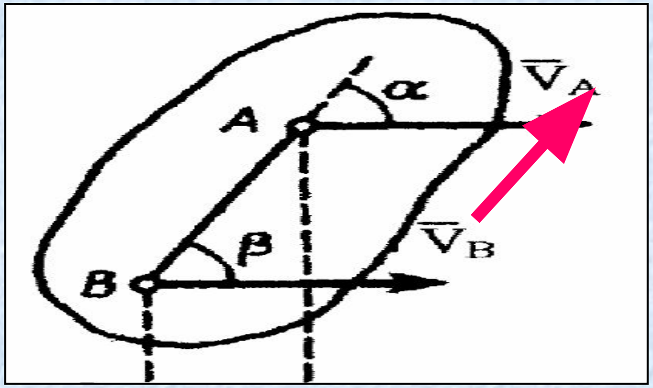
СТАТИКА

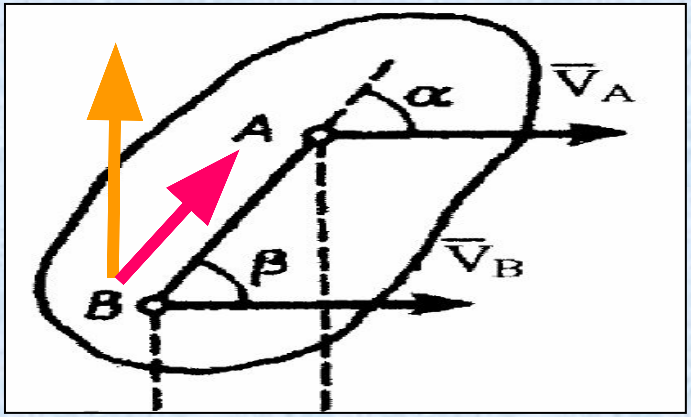
Введение в статику

ЛЕКЦИЯ 3
План:

3.1. Теорема о параллельном переносе силы.
3.2. Приведение системы сил к центру. Главный вектор и главный момент системы сил

Теорема о параллельном переносе силы



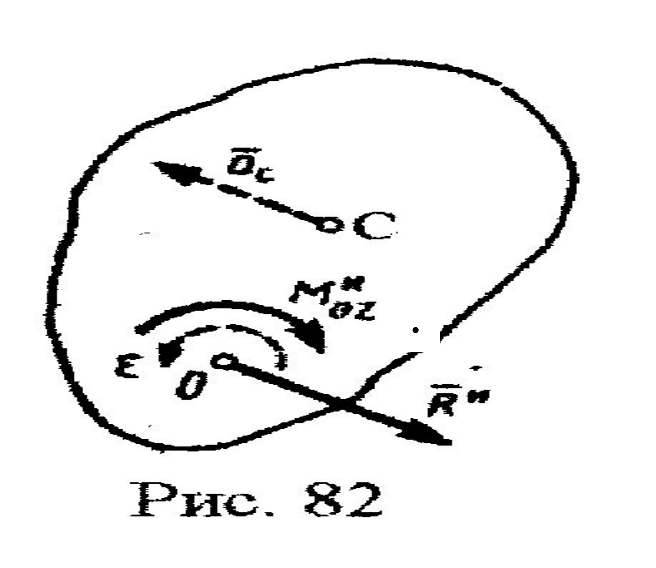


Силу, приложенную к абсолютно твердому телу, можно, не изменяя её действия, переносить из данной точки в новый произвольный центр, прибавляя при этом пару с моментом, равным моменту переносимой силы относительно нового центра

3.3

Введение в статику

Приведение системы сил к центру



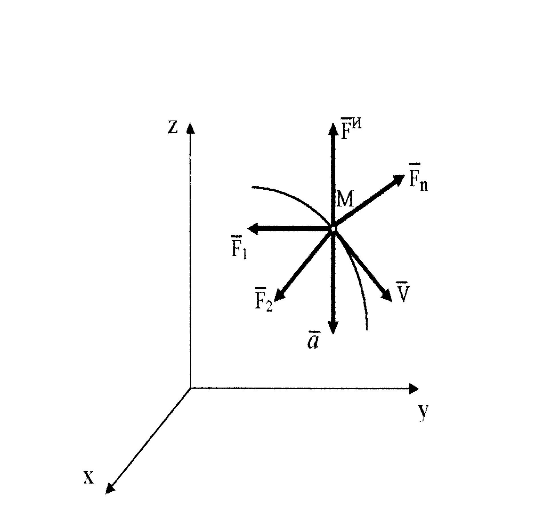


Рис. 81

- **главный вектор** системы сил;

- **главный момент** системы сил относительно центра О

Приведение системы сил к центру

Частные случаи приведения системы сил к центру:

данная система сил приводится к одной паре сил

данная система сил приводится к одной силе, т. е. к равнодействующей

данная система сил будет уравновешенной

4.1

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СТАТИКА

Условия равновесия

ЛЕКЦИЯ 4

План:

4.1. Теорема Вариньона.

4.2. Условия равновесия различных систем сил.

ТЕОРЕМА ВАРИНЬОНА

Пусть система сил приводится к равнодействующей

Приложим в точке С силу

Система сил
будет находиться в равновесии и для нее

или

Если данная система сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей относительно любого центра О равен сумме моментов сил системы относительно того же центра

УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ СИЛ

Равновесие пространственной системы произвольно расположенных сил

Равновесие пространственной системы параллельных сил

В случае, когда все действующие на тело силы параллельны оси z

УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ СИЛ

Равновесие системы сходящихся сил

в геометрической форме: *необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный из векторов сил, был замкнутым*

в аналитической форме:

$$R_x = 0, \quad R_y = 0, \quad R_z = 0,$$

УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ СИЛ

Равновесие плоской системы произвольных сил

2

ось Ох, не перпендикулярна прямой АВ

1

3

центры А, В и С, не лежат на одной прямой

4.6

УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ СИЛ

Равновесие плоской системы параллельных сил

В случае, когда все действующие на тело силы параллельны оси Оу

точки А и В не должны лежать на прямой, параллельной векторам сил.

5.1

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СТАТИКА

Условия равновесия

ЛЕКЦИЯ 5

План:

5.1. Равновесие систем тел.

5.2. Равновесие тела при наличии трения

РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМ ТЕЛ

Внутренние связи – это связи, соединяющие части конструкции

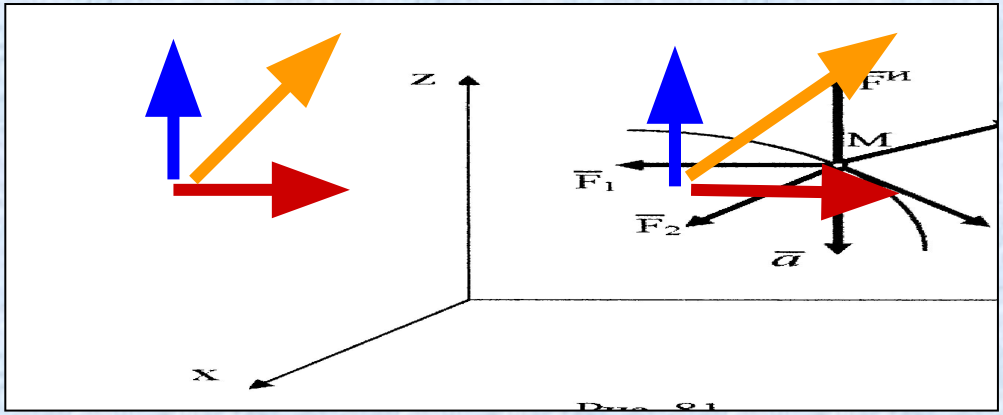
*Два способа решения задач
на равновесие составной конструкции:*

1 способ. Рассматривают равновесие всей конструкции как единое целое (не учитывая реакции внутренних связей) и дополнительно равновесие какой-нибудь одной или нескольких частей конструкции с учетом реакций внутренних связей.

2 способ. Конструкцию расчленяют на части и рассматривают равновесие каждой части, учитывая при этом реакции внутренних связей. При этом реакции внутренних связей будут попарно равны по модулю и противоположны по направлению.

РАВНОВЕСИЕ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

Сцепление и трение скольжения



Условие равновесия:

ϕ_0 - *угол трения покоя*

$$0 \le F_{\text{ТР}} \le F_{\text{ПР}}.$$

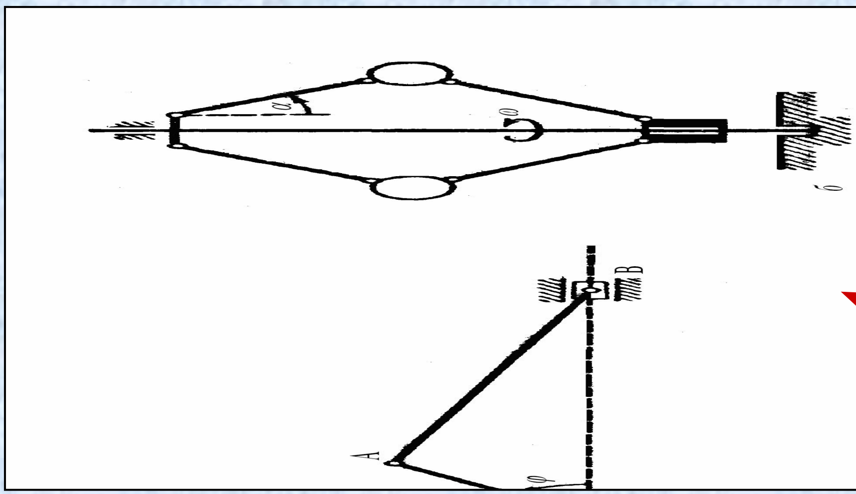
$$\frac{F_{\text{ПР}}}{N} = f_0$$

$$\text{tg}\phi_0 = F_{\text{ПР}} / N.$$

$$\text{tg}\phi_0 = f_0.$$

РАВНОВЕСИЕ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

Трение качения



$$Q_{\text{ПР}} = (\delta / R)\,N$$

Условие равновесия:

( ) – пара сил

( ) – пара сил

6.1

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СТАТИКА

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

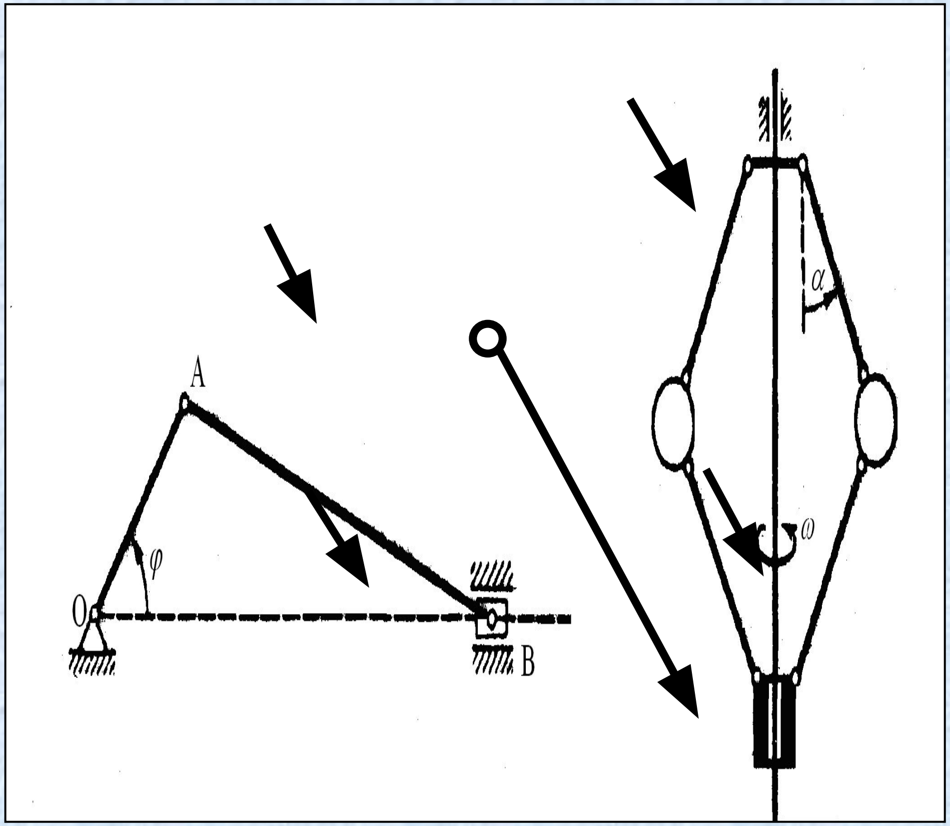
ЛЕКЦИЯ 5

План:

6.1. Центр параллельных сил

6.2. Центр тяжести твердого тела

ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ



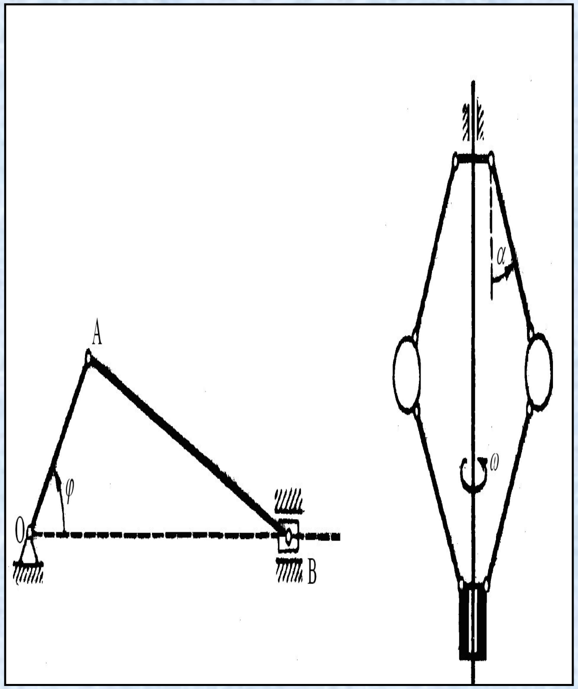
$$R\,x_C = F_1 x_1 + F_2 x_2 + \ldots + F_n x_n$$

$$R\,x_C = \Sigma F_k x_k.$$

Координаты центра параллельных сил:

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Силовое поле – это область, в которой на каждую материальную точку действует сила, зависящая от положения этой точки,



*Поле тяжести вблизи земной поверхности можно назвать **однородным полем тяжести**.*

*Модуль равнодействующей сил тяжести называется **весом тела P***

Координаты центра тяжести:

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Центр тяжести некоторых однородных тел

1 Для однородного объемного твердого тела (вес пропорционален объему):

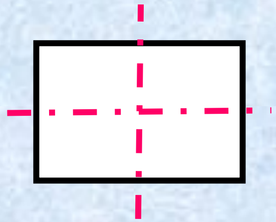
2. Для тела, представляющего собой однородную пластину (вес пропорционален площади):

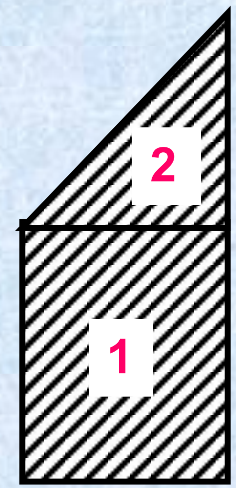
3. Координаты центра тяжести тонкого прямого стержня (вес пропорционален длине):

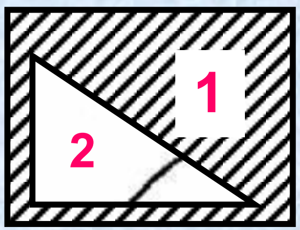
ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Способы нахождения положения центров тяжести тел сложной формы:

- Способ симметрии
- Способ разбиения
- Способ дополнения
- Способ интегрирования







МЕХАНИКА

Теоретическая механика

Модуль 1

Раздел 2 – КИНЕМАТИКА

- КИНЕМАТИКА ТОЧКИ
  - ЛЕКЦИЯ 7
  - ЛЕКЦИЯ 8
- КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
  - ЛЕКЦИЯ 9
- СЛОЖНОЕ ДВИЖЕИЕ ТОЧКИ
  - ЛЕКЦИЯ 10
  - ЛЕКЦИЯ 11
- ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА
  - ЛЕКЦИЯ 12
  - ЛЕКЦИЯ 13

7.1

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

КИНЕМАТИКА

Кинематика точки

ЛЕКЦИЯ 7

План:

7.1. Векторный способ задания движения точки.

7.2. Координатный способ задания движения

7.2

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Кинематикой *называется раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их инертности и действующих на них сил.*

Траекторией точки *называется непрерывная линия, которую описывает движущаяся точка относительно данной системы отсчета.*

Для задания движения точки можно применять способы:

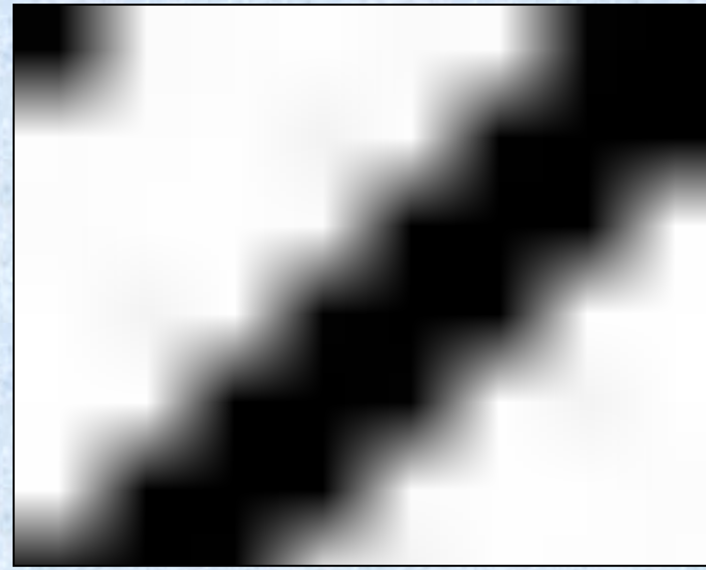
- векторный;

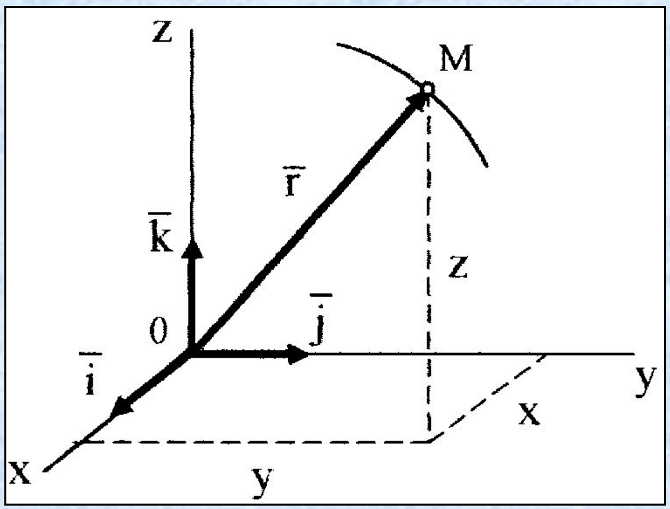
- координатный;

- естественный.

Векторный способ задания движения точки

закон движения точки





Скорость точки в момент времени t

Ускорение точки в момент времени t $\bar{a} = \dfrac{d\bar{V}}{dt} = \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}.$

Координатный способ задания движения точки

$$\boxed{x = f_1(t);\quad y = f_2(t);}\quad z = f_3(t).$$

закон движения точки

ускорение точки

скорость точки

$v_x =$

$v_y =$

$v_z =$

8.1

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

КИНЕМАТИКА

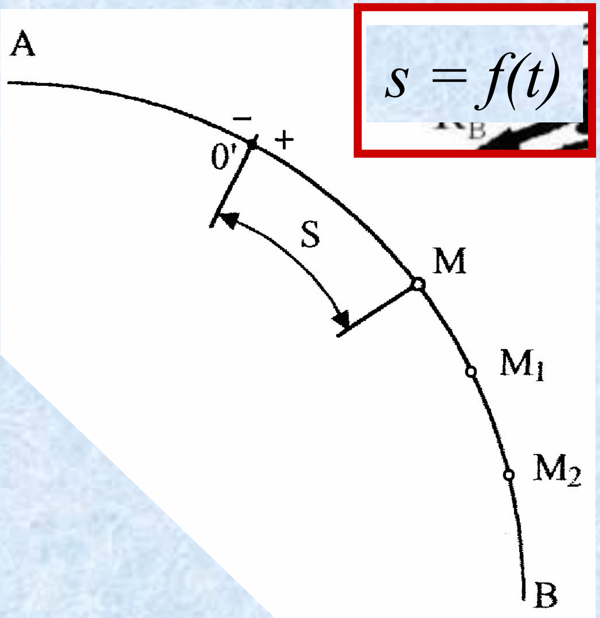
Кинематика точки

ЛЕКЦИЯ 8
План:

8.1. Естественный способ задания движения точки.
8.2. Частные случаи движения точки

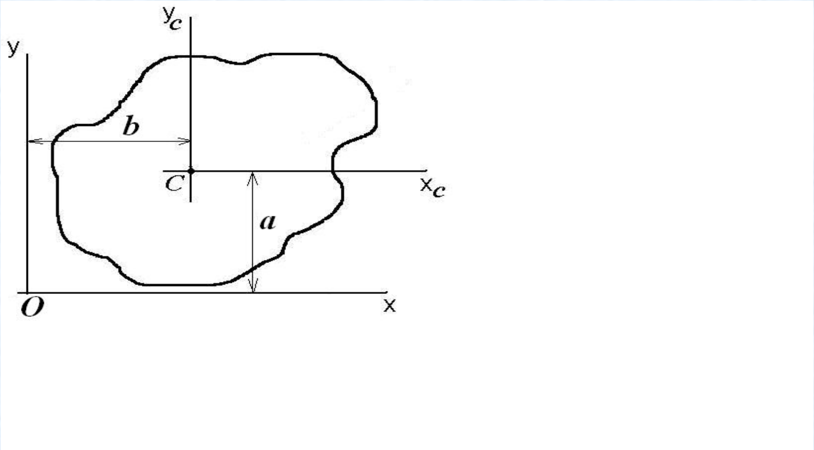
Естественный способ задания движения точки

Закон движения точки



$$\boxed{s = f(t)}$$

Оси естественного трехгранника



ось **Mτ** *- касательная*

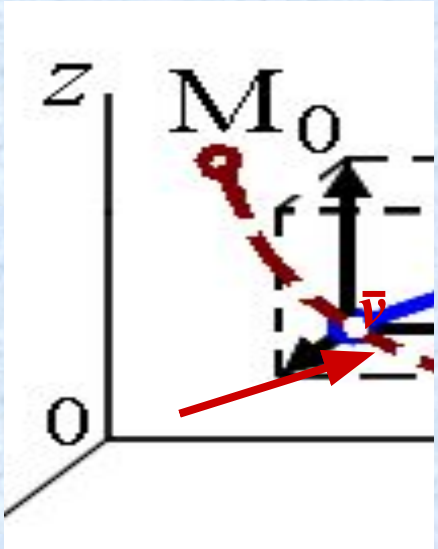
ось Mn *- главная нормаль*

ось Mb *- бинормаль*

Естественный способ задания движения точки

Скорость точки

или



Ускорение точки

Кривизна траектории

в точке М

$k = 1/\rho$,

для прямой линии $\rho = \infty$;

для окружности $\rho = R$.

8.4

Естественный способ задания движения точки

Частные случаи движения точки

Прямолинейное движение

$\rho = \infty$

Тогда

$$a_n = v^2/\rho = 0$$

Полное ускорение :

$$a = a_\tau = dv/dt.$$

При равномерном движении

$$v = \mathrm{const},\ a_\tau = 0,$$

$$a = 0$$

Криволинейное движение

- *равномерное движение*

$$v = \mathrm{const}$$

$$a_\tau = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = 0$$

$$a = a_\mathrm{n} = v^2/\rho.$$

- *равнопеременное движение*

$$a_\tau = \mathrm{const} \qquad a_\mathrm{n} = v^2/\rho.$$

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

КИНЕМАТИКА

Кинематика твердого тела. Простейшие движения

ЛЕКЦИЯ 9

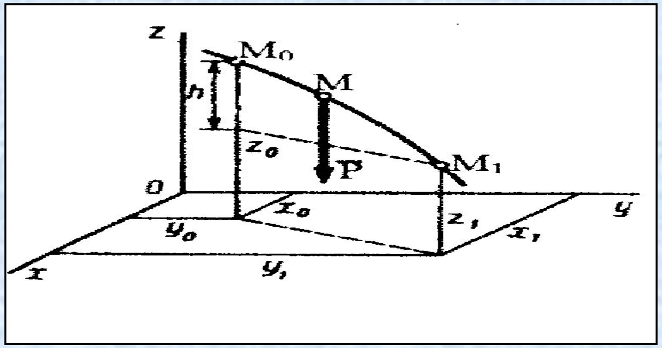
План:

9.1. Поступательное движение тела.

9.2. Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси.

Поступательное движение тела

Поступательным *называется движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, перемещается, оставаясь параллельной своему начальному направлению.*



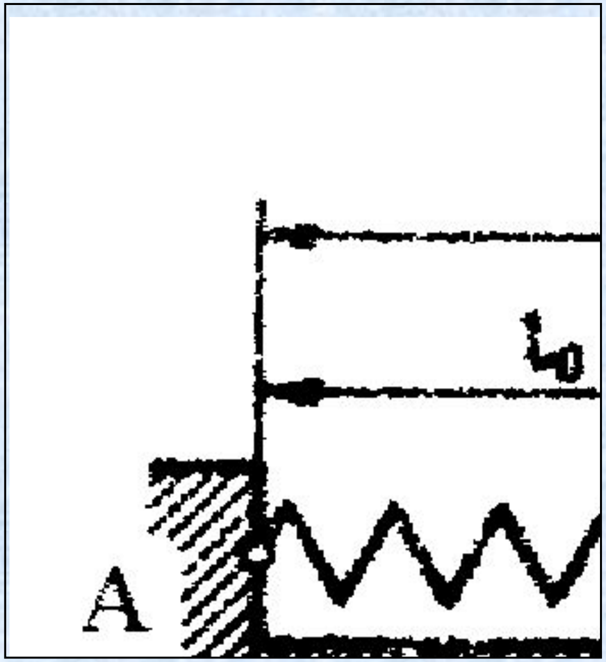
Свойства поступательного движения:

1. *Все точки тела описывают одинаковые траектории*

2. *Все точки тела имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения*

ВРАЩЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Вращательным движением *твердого тела вокруг неподвижной оси называется движение, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу (или неизменно с ним связанные), остаются во все время движения неподвижными*



Проходящая через неподвижные точки прямая - ось вращения.

$$\boxed{\phi = f(t)}$$

φ - *угол поворота тела*

закон вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

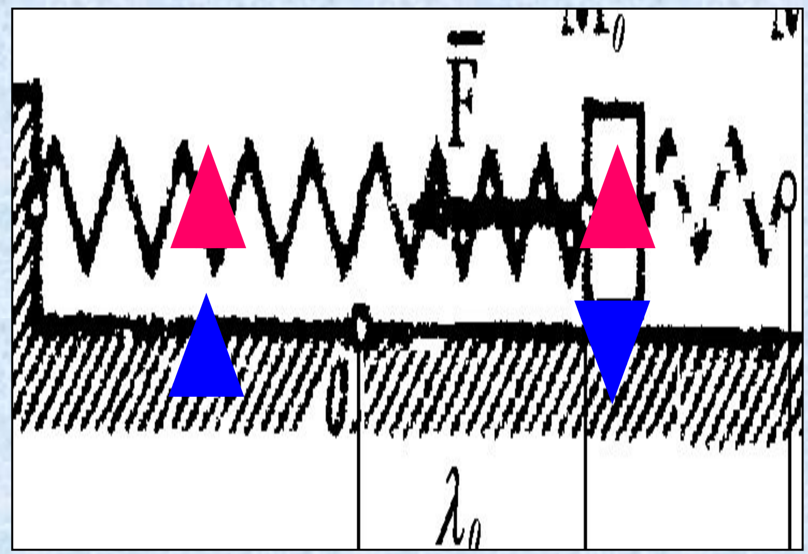
ВРАЩЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Угловая скорость тела

Единица измерения ω

рад/с,   1/с,   с$^{-1}$.

Угловое ускорение тела

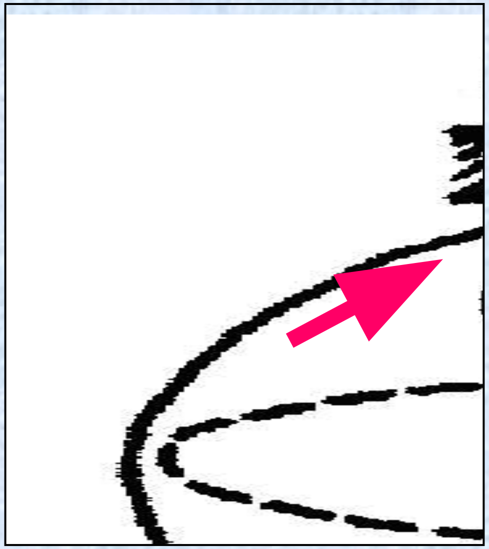


Единица измерения ε

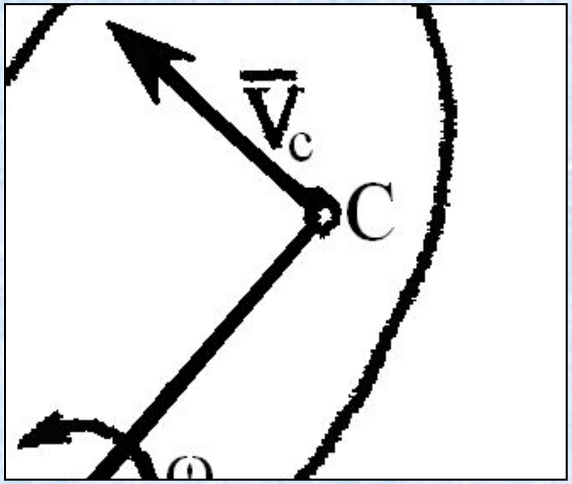
рад/с^{2}*,   1/с*^{2} *,   с*$^{-2}$.

ВРАЩЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Скорости точек вращающегося тела



$\boxed{v = h\,\omega}$ *-линейная или окружная скорость точки M.*



Ускорение точки *M*

$$a_\tau = h\,\varepsilon, \quad a_n = h\,\omega^2.$$

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

КИНЕМАТИКА

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

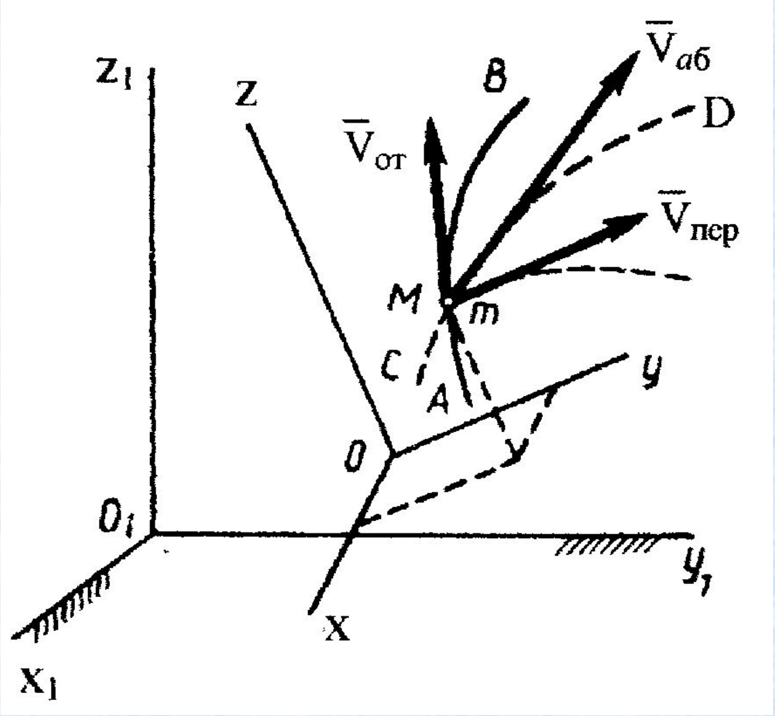
ЛЕКЦИЯ 10

План:

10.1. Основные определения.

10.2. Теорема о сложении скоростей (теорема Кориолиса).

Основные определения



Сложное движение точки – *это такое движение, при котором точка одновременно участвует в нескольких движениях.*

Две системы отсчёта:

- подвижная система отсчета - *Oxyz*

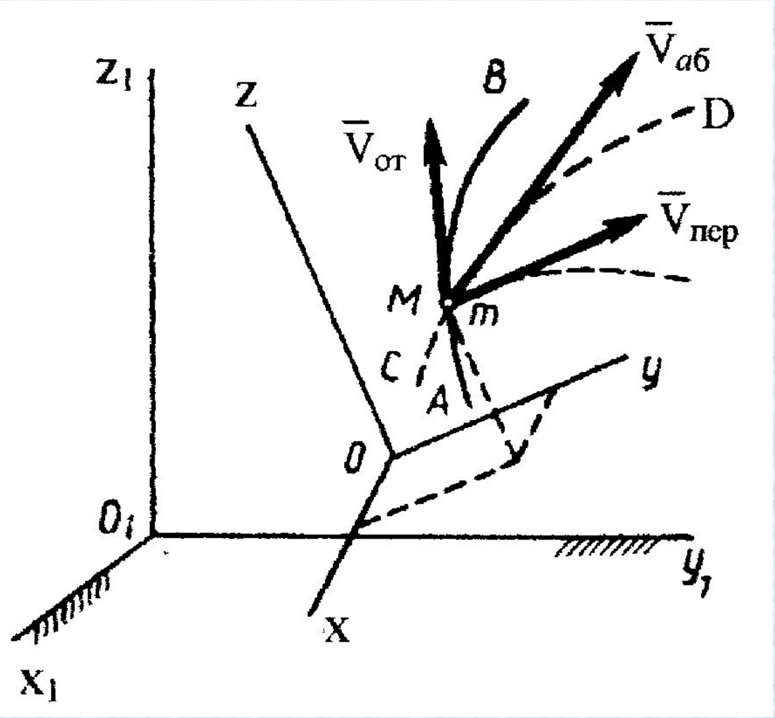
- неподвижная система отсчета $O_1x_1y_1z_1$

Основные определения

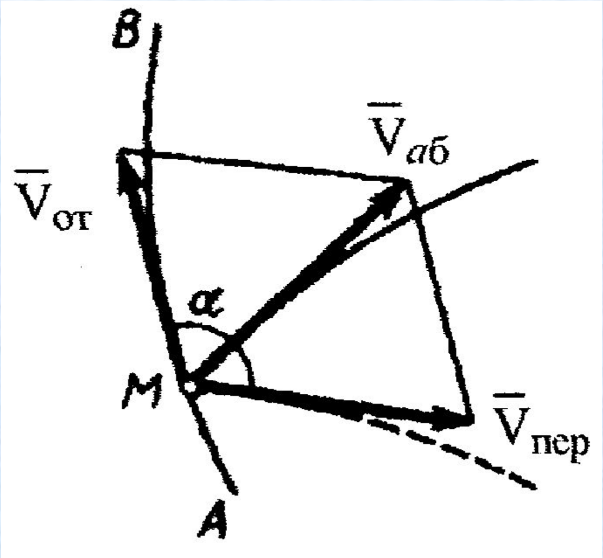
Относительное движение - *движение точки по отношению к подвижной системе отсчета*

Переносное движение - *движение, совершаемое подвижной системой отсчета по отношению к неподвижной системе*

Абсолютное движение - *движение, совершаемое точкой по отношению к неподвижной системе отсчета*



Теорема о сложении скоростей



при сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей.

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

КИНЕМАТИКА

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

ЛЕКЦИЯ 8

План:

11.1. Теорема о сложении ускорений.
11.2. Ускорение Кориолиса.

11.2

ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ УСКОРЕНИЙ (ТЕОРЕМА КОРИОЛИСА)

- кориолисово ускорение (ускорение Кориолиса)

УСКОРЕНИЕ КОРИОЛИСА

$$a_{кор} = 2|\,\omega\,|\cdot|v_{от}\,|\,\sin\alpha$$

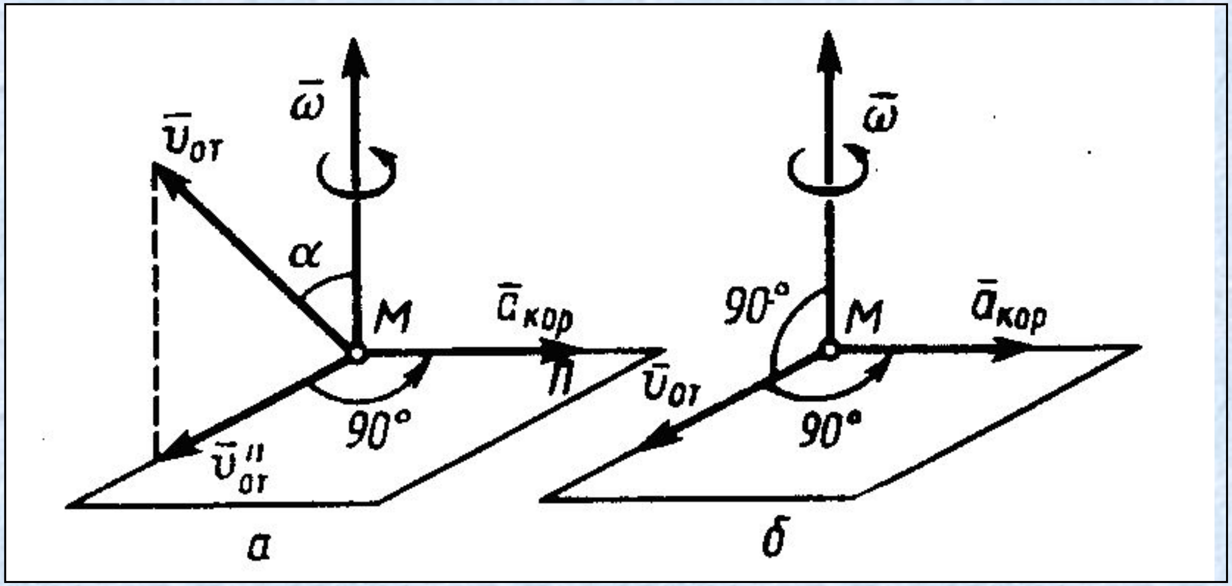
Направление вектора

можно найти двумя способами:

- по правилу Жуковского;

- по правилу векторного произведения

.



УСКОРЕНИЕ КОРИОЛИСА

в следующих случаях:

- когда ω = 0, т. е. переносное движение является поступательным;

- когда относительная скорость в данный момент времени обращается в нуль;

- когда угол между векторами и α = 0, или α = 180°, т.е. когда параллелен оси переносного вращения

12.1

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

КИНЕМАТИКА

Плоскопараллельное движение твердого тела

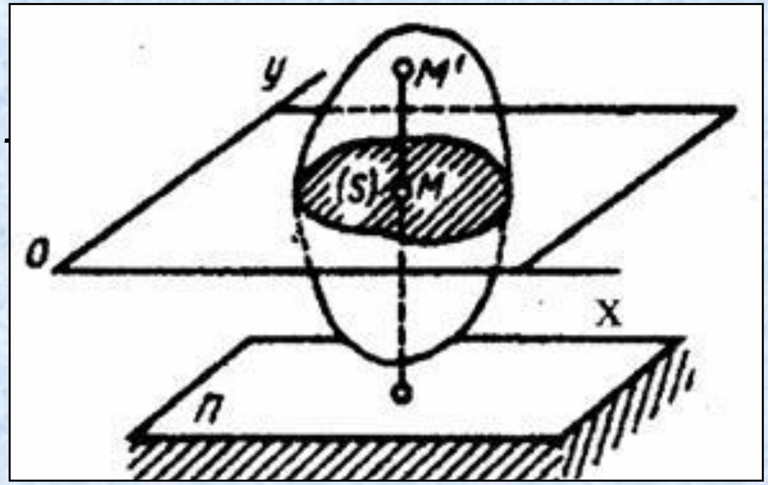
ЛЕКЦИЯ 12

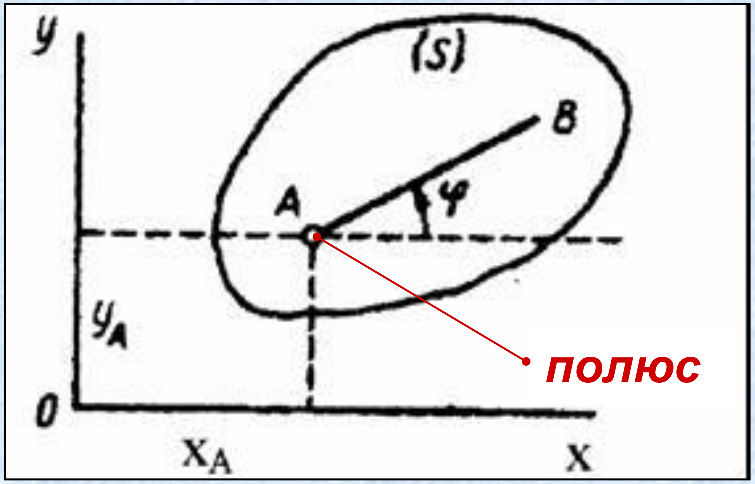
План:

12.1. Понятие плоскопараллельного движения тела
12.2. Определение скоростей точек плоской фигуры
12.3. Понятие МЦС и способы его нахождения

Понятие о плоскопараллельном движении тела

Плоскопараллельное (плоское) *движение – такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой фиксированной плоскости П*

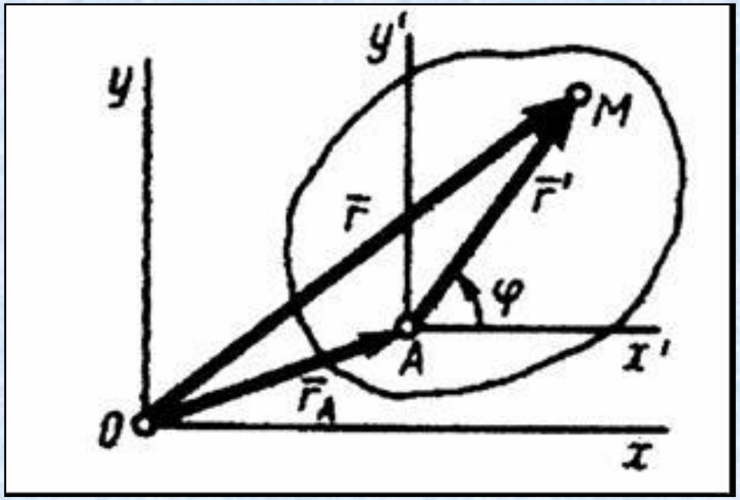


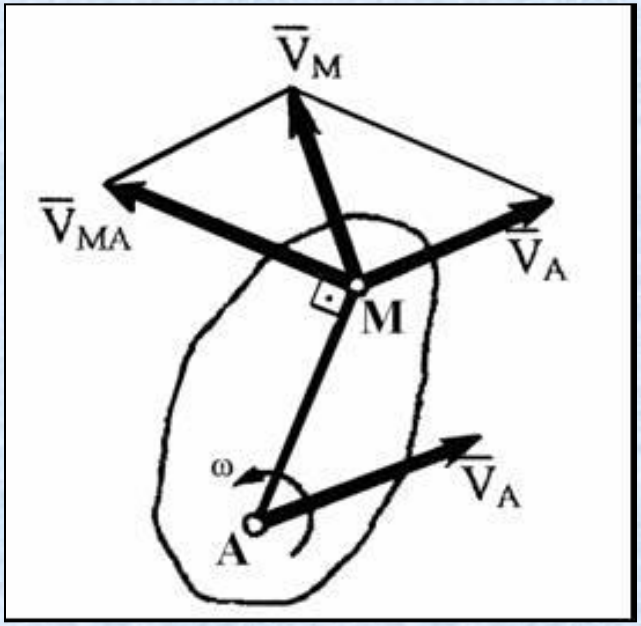


Закон движения плоской фигуры:

$$x_A = f_1(t);$$
$$y_A = f_2(t);$$
$$\phi = f_3(t)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ





ТЕОРЕМА О ПРОЕКЦИЯХ СКОРОСТЕЙ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

$$mvdv = \sum dA_k$$

$$v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha.$$

Проекции скоростей точек плоской фигуры на прямую, проходящую через эти точки, равны, между собой.

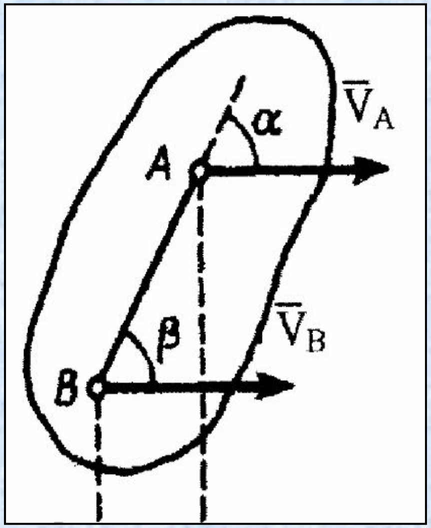
Понятие МЦС и способы его нахождения

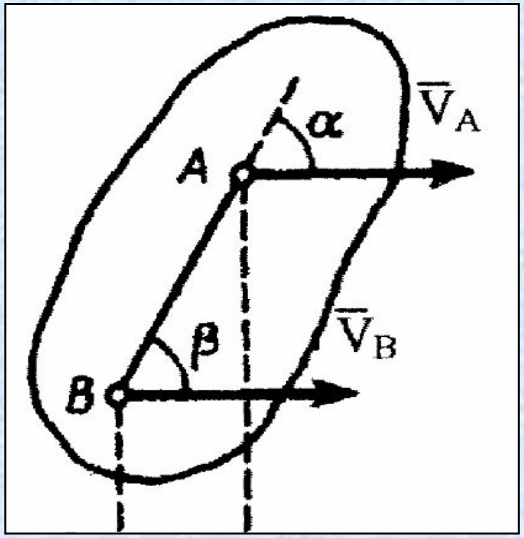
Мгновенным центром скоростей (*МЦС*) *называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю*

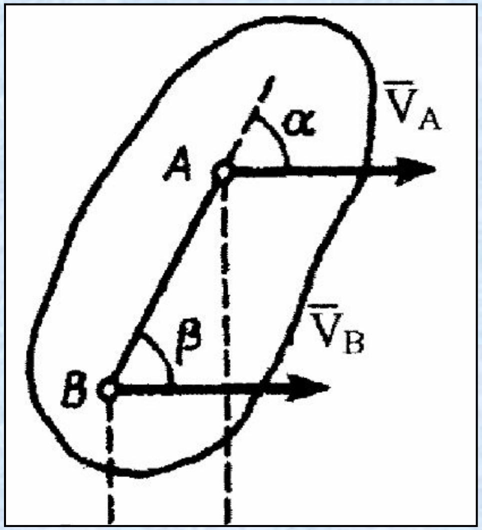
$$mvdv = \sum dA_k$$

Понятие МЦС и способы его нахождения

Частные случаи определения мгновенного центра скоростей







МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

КИНЕМАТИКА

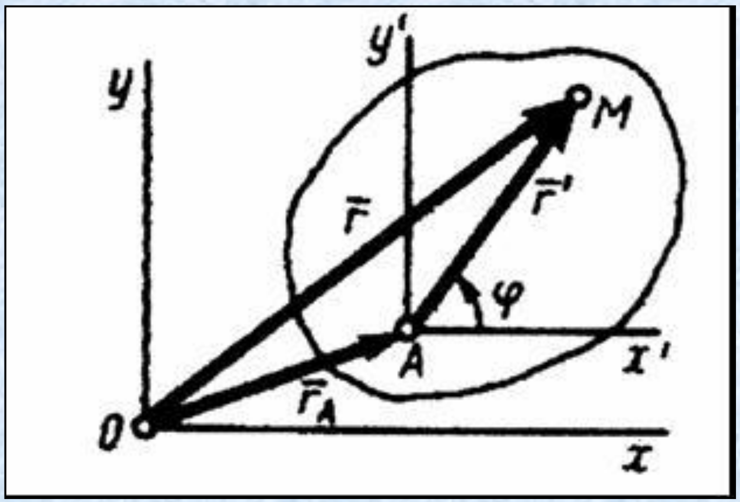
Плоскопараллельное движение твердого тела

ЛЕКЦИЯ 13

План:

13.1. Определение ускорений точек плоской фигуры
13.2. Мгновенный центр ускорений

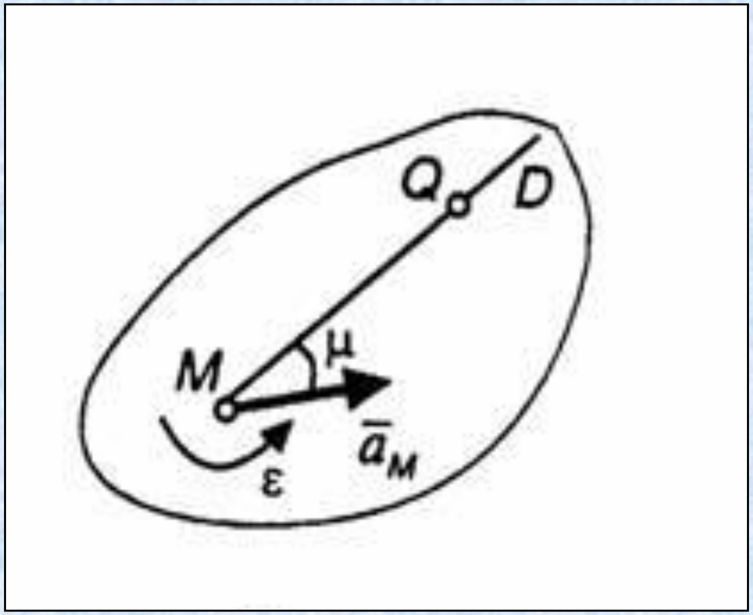
ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЙ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ



$$mvdv = \sum dA_k$$

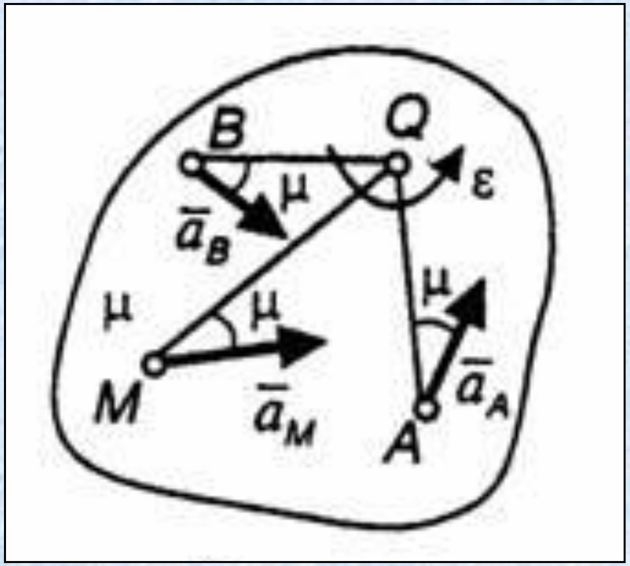
МГНОВЕННЫЙ ЦЕНТР УСКОРЕНИЙ

Точка, ускорение которой в данный момент времени равно нулю называется ***мгновенным центром ускорений*** **(МЦУ)**.



$$\mathrm{tg}\mu = \varepsilon/\omega;$$

МГНОВЕННЫЙ ЦЕНТР УСКОРЕНИЙ



$$\mathrm{tg}\,\mu = \varepsilon/\omega;$$

Частные случаи :

- *если* $\varepsilon = 0$, $\omega \neq 0$, *то угол* $\mu = 0$ *и ускорения всех точек будут направлены к МЦУ;*

- *если* $\varepsilon \neq 0$, $\omega = 0$, *то угол* $\mu = 90^o$ *и ускорения всех точек направлены перпендикулярно к отрезкам, соединяющим эти точки с МЦУ*

МЕХАНИКА

Теоретическая механика

Модуль 1

Раздел 3 – ДИНАМИКА ТОЧКИ

- ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ — ЛЕКЦИЯ 14
- ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ — ЛЕКЦИЯ 15, ЛЕКЦИЯ 16

14.1

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ДИНАМИКА ТОЧКИ

Общие сведения

ЛЕКЦИЯ 14
План:

14.1. Основные законы механики
14.2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Динамика - *это раздел механики, в котором изучается движение материальных точек, тел и механических систем под действием приложенных сил*

Основные законы механики

Первый закон (закон инерции)

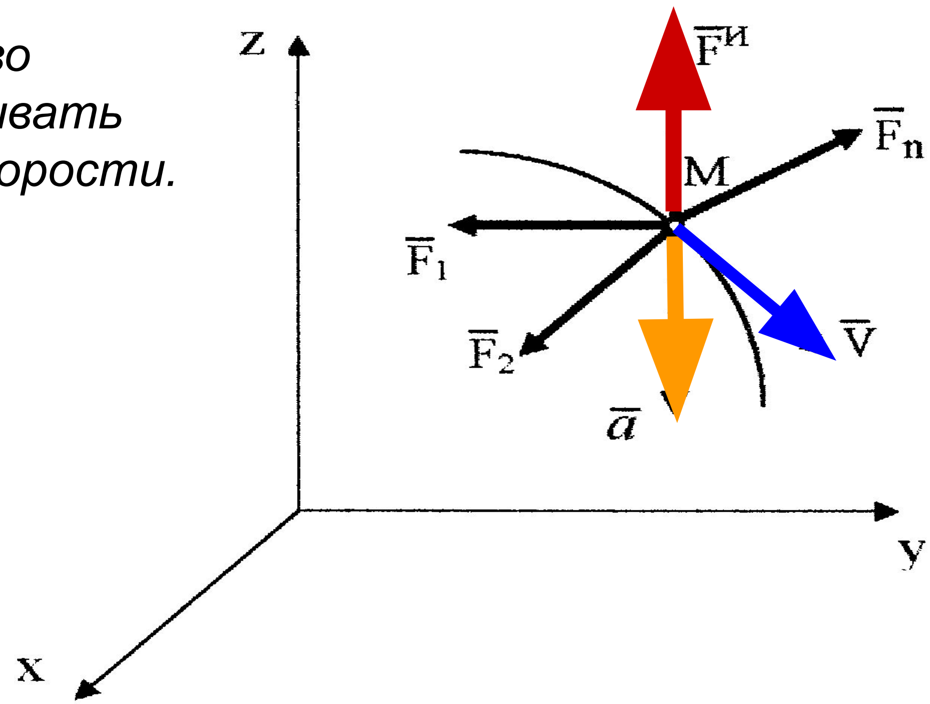
Второй закон (основной закон динамики)

Третий закон (закон равенства действия и противодействия)

Четвертый закон (закон независимости действия сил)

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

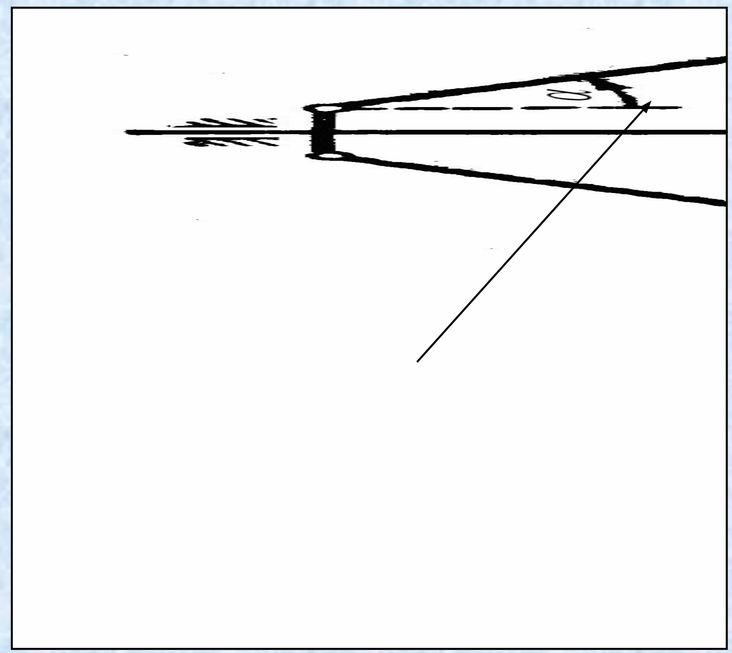
Инерция – это свойство материальной точки оказывать сопротивление изменению скорости.



Сила инерции материальной точки направлена противоположно ускорению точки и приложена к телу, сообщающему точке это ускорение

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

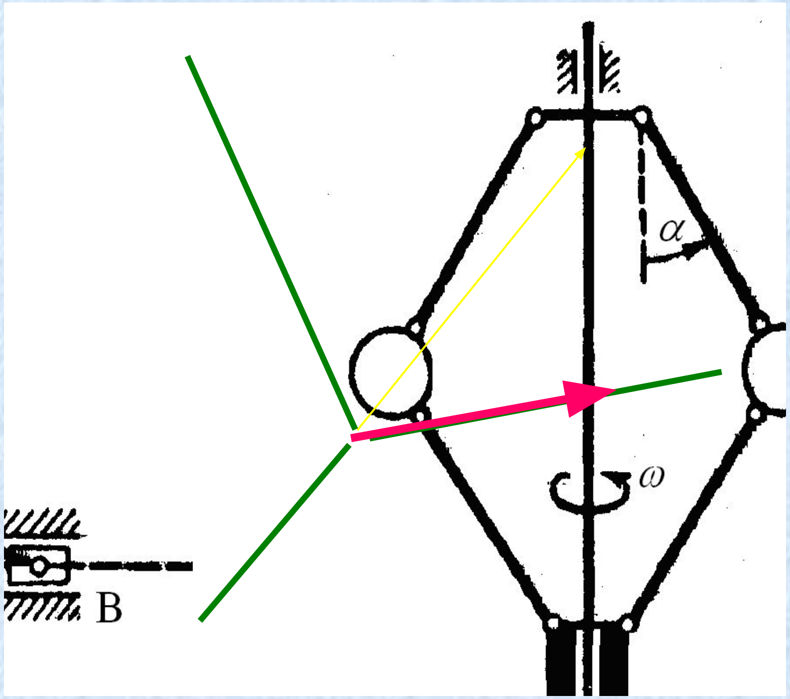
Дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на декартовые оси:



Закон движения точки:
$$\begin{cases} x = f_1(t); \\ y = f_2(t); \\ z = f_3(t). \end{cases}$$

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Дифференциальные уравнения в проекциях на оси естественного трехгранника



15.1

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ДИНАМИКА ТОЧКИ

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

ЛЕКЦИЯ 15

План:

15.1. Две задачи динамики.

15.2. Решение задач

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

ДВЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ

Первая задача динамики: по известному закону движения материальной точки находят приложенные к ней силы.

Вторая (основная) задача динамики: при известных действующих на материальную точку силах, определяют закон движения точки

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Решение задач динамики точки:

Первая задача динамики:

- *составить и решать дифференциальные уравнения движения материальной точки*

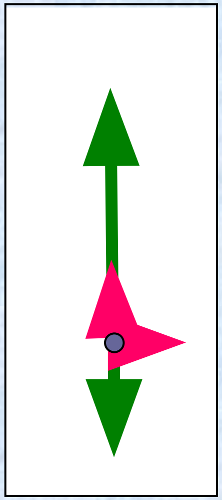
Вторая задача динамики:

- *выбрать систему координат и записать начальные условия;*
- *изобразить движущуюся точку в произвольном положении и все действующие на точку силы;*
- *составить дифференциальные уравнения движения точки;*
- *проинтегрировать полученные уравнения, определив постоянные интегрирования из начальных условий.*
- *найти искомые величины из полученных выражений.*

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Лифт весом P *начинает подъем по закону:*

$$y = at^2.$$



Определить:

натяжение троса T

Решение. *На лифт действуют сила тяжести и реакция троса*

$$(P/g)\ 2a = T - P,$$

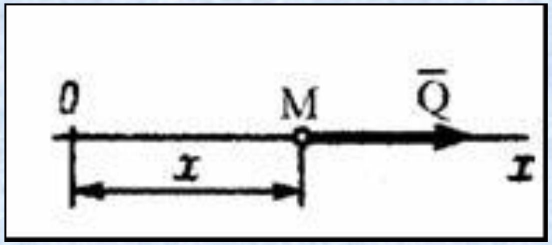
$$T = P\ (1 + 2a/g).$$

Если лифт опускается с таким же ускорением:

$$T = P\ (1 - 2a/g).$$

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Задача 2.
Материальная точка с массой m движется под действием постоянной силы



Найти:
закон движения точки при начальных условиях:

$t=0,\ x=x_0,\ v_x=v_0$

.

Решение:

Учитывая, что $Q_x = Q$:

$$v_x = (Q/m)\,t + C_1.$$

$$= (Q/m)\,t + C_1.$$

$$x = (Q/2m)t^2 + C_1 t + C_2$$

$$v_0 = C_1,\ x_0 = C_2$$

$$x = x_0 + v_0\,t + (Q/2m)t^2.$$

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ДИНАМИКА ТОЧКИ

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

ЛЕКЦИЯ 16

План:

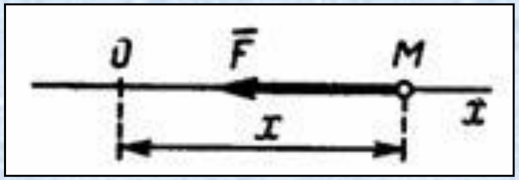
16.1. Свободные прямолинейные колебания материальной точки

16.2. Влияние постоянной силы на свободные колебания точки

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Свободные прямолинейные колебания материальной точки

Восстанавливающая сила F - сила, стремящаяся вернуть точку в положение равновесия (всегда направлена к положению равновесия и зависит от величины отклонения точки от положения равновесия x).



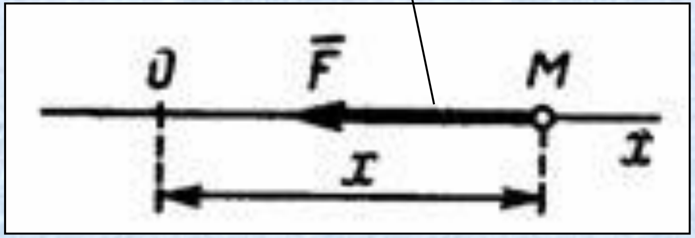
Сила сопротивления R, зависящая от скорости движения

Возмущающая сила, т.е. сила, являющаяся заданной функцией времени.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Свободные прямолинейные колебания материальной точки

Восстанавливающая сила



, или

если $c/m = k^2$, то

дифференциальное уравнение свободных колебаний

при отсутствии сопротивления.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Свободные прямолинейные колебания материальной точки

Характеристическое уравнение:

$x = e^{nt}$

$n^2 + k^2 = 0,\ n_{1,2} = \pm ik$

общее решение

$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt,$

Пусть $C_1 = A\cos\alpha,$ $C_2 = A\sin\alpha,$

$x = A\,(\sin kt \cos\alpha + \cos kt \sin\alpha)$

или

закон гармонических колебаний точки:

$$\boxed{x = A\sin(kt + \alpha).}$$

Скорость точки: $v_x = Ak\cos(kt + \alpha).$

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Свободные прямолинейные колебания материальной точки

$$x = A \sin(kt + \alpha)$$

A - *амплитуда колебаний.*

$(kt+\alpha) = \phi$ - *фаза колебаний.*

α - *начальная фаза колебаний.*

k - *круговая частота колебаний*

Период колебаний T - *промежуток времени, в течение которого точка совершает одно полное колебание*

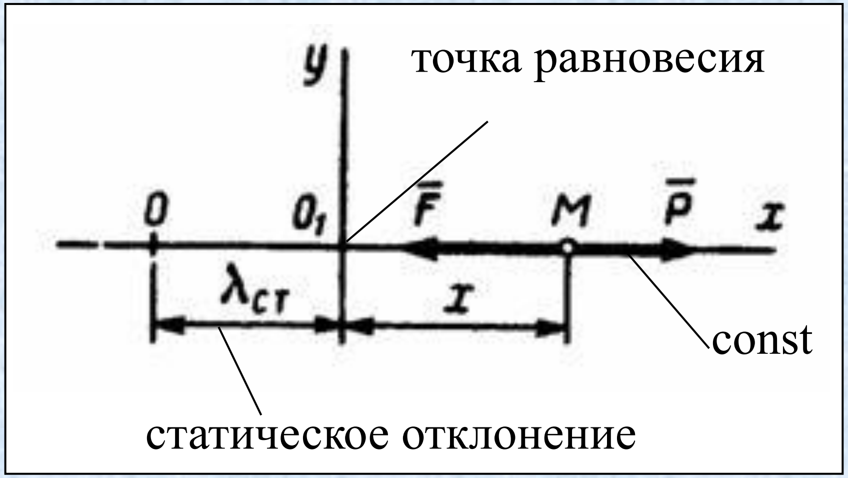
$$T = 2\pi/\mathrm{k}.$$

Частота колебаний ν *– число колебаний, совершаемых за 1с*

$$\nu = 1/T = \mathrm{k}/2\pi.$$

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Влияние постоянной силы на свободные колебания точки



$$F_x = -c(x + \lambda_{ст})$$

В результате

или

$$P = \text{const}$$

$$F = cx$$

В точке равновесия при $x = \lambda_{ст}$

$$F = P = c\lambda_{ст}$$

МЕХАНИКА

Теоретическая механика

Модуль 1

Раздел 4 – ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

- ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС — ЛЕКЦИЯ 17, ЛЕКЦИЯ 18
- ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ — ЛЕКЦИЯ 19
- ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА — ЛЕКЦИЯ 20
- ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ — ЛЕКЦИЯ 21

17.1

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

ЛЕКЦИЯ 17

План:

17.1. Введение в динамику системы. Свойства внутренних сил.
17.2. Центр масс механической системы
17.3. Теорема о движении центра масс механической системы
17.4. Закон сохранения движения центра масс.
17.5. Примеры применения теоремы о движении центра масс.

ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

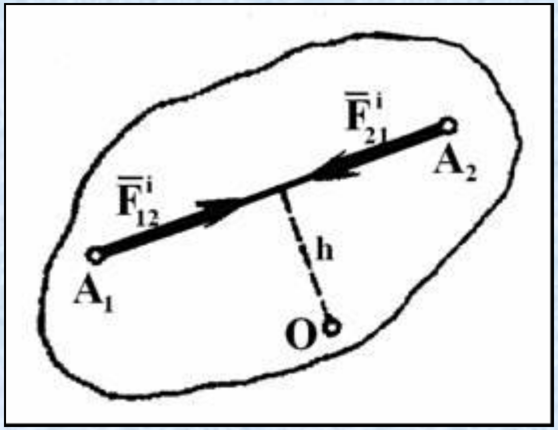
Введение в динамику системы

Механическая система - совокупность материальных точек или тел, находящихся в механическом взаимодействии

- Внешние силы, действующие на точки системы со стороны точек или тел, не входящих в состав данной системы

- Внутренние силы, с которыми точки или тела данной системы действуют друг на друга

Свойства внутренних сил:



Центр масс механической системы

Масса системы:

Центром масс *(центром инерции) механической системы называется геометрическая точка С, координаты которой :*

Радиус-вектор центра масс:

ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

Для каждой точки системы

— ускорение центра масс системы

Дифференциальные уравнения движения центра масс в проекциях на оси координат

ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

Закон сохранения движения центра масс

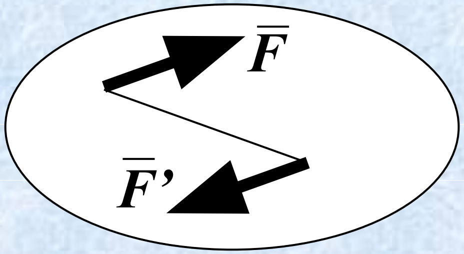
1. Пусть сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю

2. Пусть сумма внешних сил системы, не равна нулю, но сумма их проекций на какую-нибудь ось равна нулю

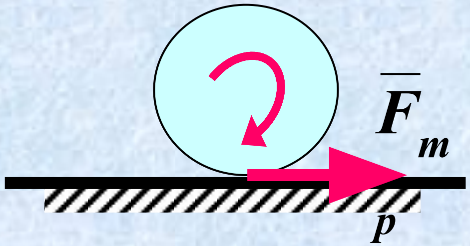
ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

Примеры применения теоремы о движении центра масс

Действие пары сил на тело



Движение по горизонтальной плоскости



18.1

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

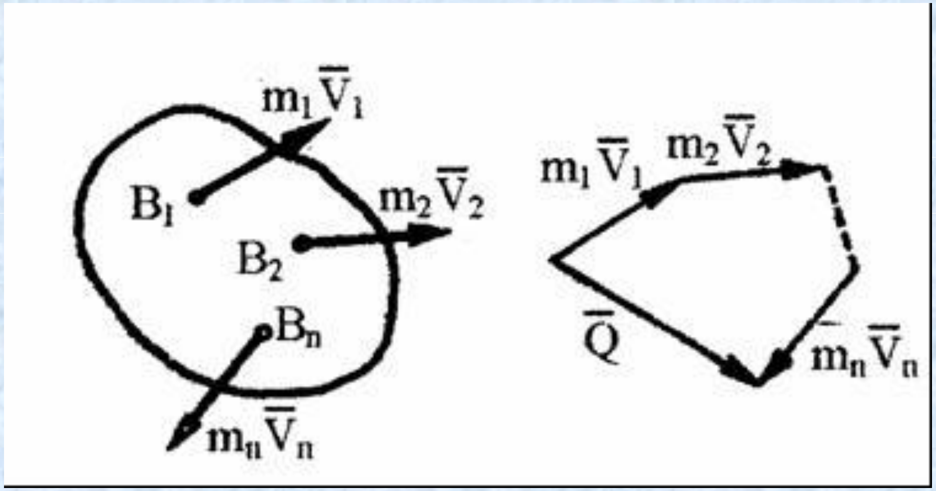
ЛЕКЦИЯ 18

План:

18.1. Количество движения.
18.2. Импульс силы.
18.3. Теорема об изменении количества движения
18.4. Закон сохранения количества движения.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Количество движения



- *Количество движения материальной точки*

Количество движения механической системы

Количество движения твердого тела

18.3

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Импульс силы

Элементарный импульс силы:

Импульс силы за конечный промежуток времени t_1:

Проекции импульса на координатные оси

Единицей измерения импульса силы в системе СИ является 1 кг·м/с = 1 Н/с.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Дифференциальное уравнение движения точки

Теорема об изменении количества движения материальной точки

18.5

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Для всех точек механической системы

= 0

Теорема об изменении количества движения системы:

17.10

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Закон сохранения количества движения

1.

2.

19.1

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

ЛЕКЦИЯ 19

План:

19.1. Осевые моменты инерции тела.

19.2. Момент количества движения материальной точки.

19.3. Теорема об изменении момента количества движения точки

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

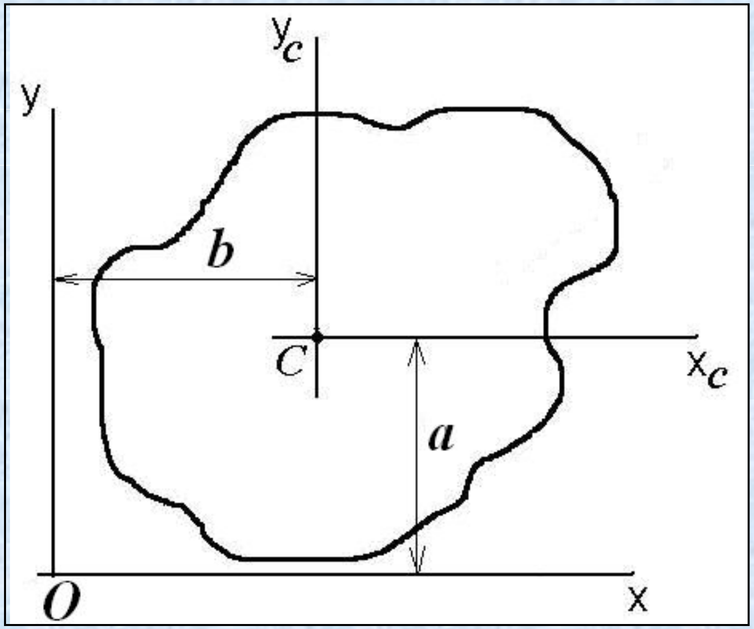
Осевые моменты инерции тела

$$\boxed{I_z = \sum m_k h_k^2}$$

ρ - *радиус инерции тела*

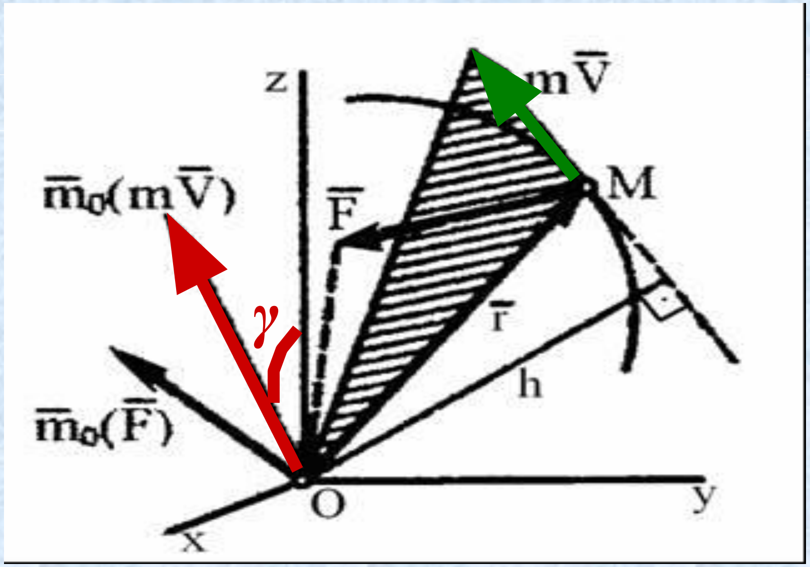
Теорема Гюйгенса

$$I_{Ox} = I_{Cx} + M a^2;$$
$$I_{Oy} = I_{Cy} + M b^2.$$



ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Момент количества движения материальной точки



ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Теорема об изменении момента количества движения точки

или

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

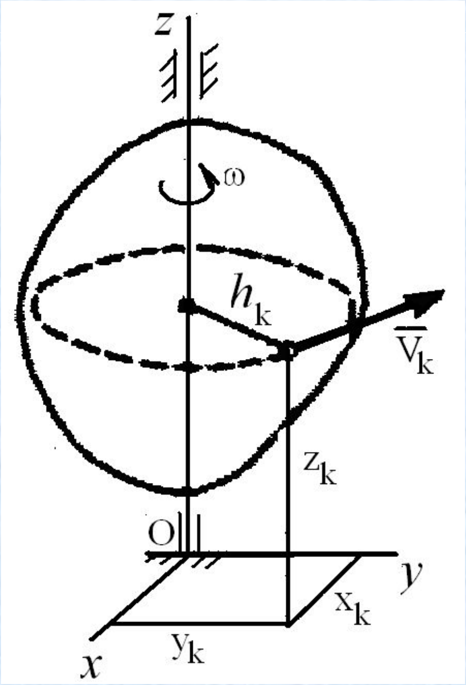
ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

ЛЕКЦИЯ 20
План:

20.1. Теорема об изменении кинетического момента.
20.2. Дифференциальное уравнение вращения твёрдого тела

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Кинетический момент системы



Кинетический момент вращающегося тела

20.3

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Если рассмотреть одну точку системы:

= 0

для всех точек системы:

Теорема об изменении кинетического момента механической системы

20.4

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

следствия из теоремы:

1. Если сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему, относительно центра О равна нулю

то

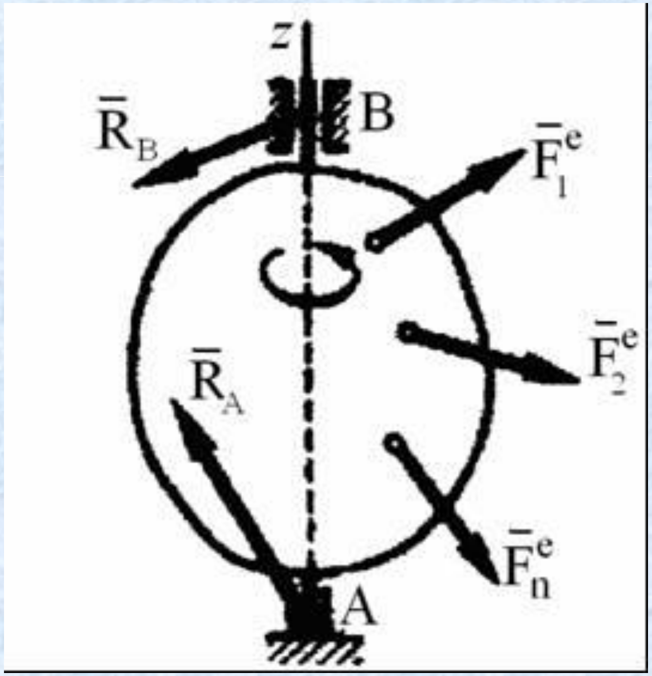
2. Если сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему, относительно некоторой неподвижной оси равна нулю

то $K_z = \text{const}$

20.5

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Дифференциальное уравнение вращения тела вокруг неподвижной оси



МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

ЛЕКЦИЯ 21
План:

21.1. Работа силы и мощность

21.3

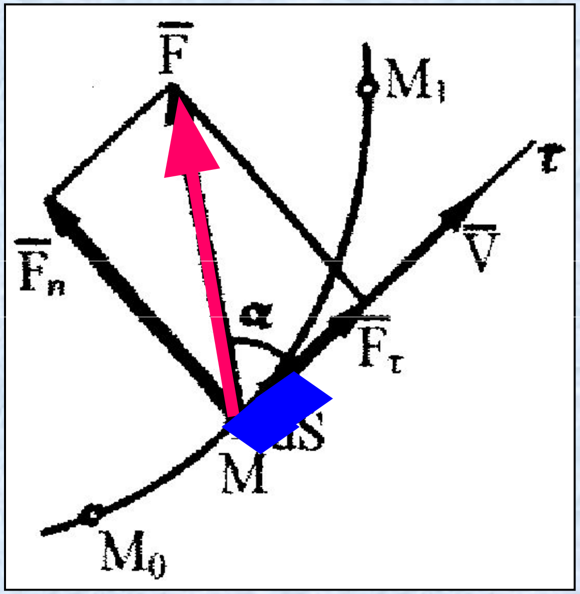
ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Работа силы. Мощность

Элементарная работа силы

$$dA = F_\tau ds,$$ *где* $$F_\tau = F\cos\alpha,$$

$$\boxed{dA = F ds \cos\alpha.}$$

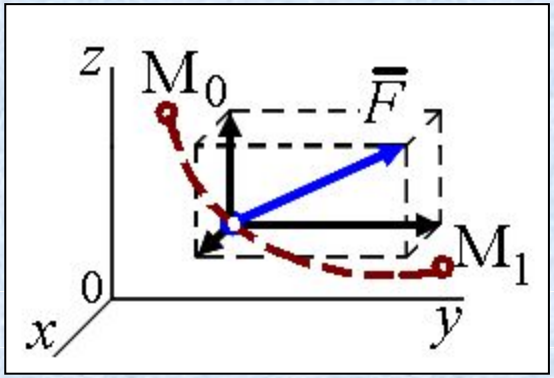


Работа силы на конечном перемещении

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Работа силы. Мощность

Если вектор силы спроецировать на оси координат



Единицей измерения работы в системе СИ является - 1 джоуль (1 Дж = 1Н·м = 1 кг·м2 /с2).

Мощность *- это величина, определяющая работу, совершаемую силой в единицу времени.*

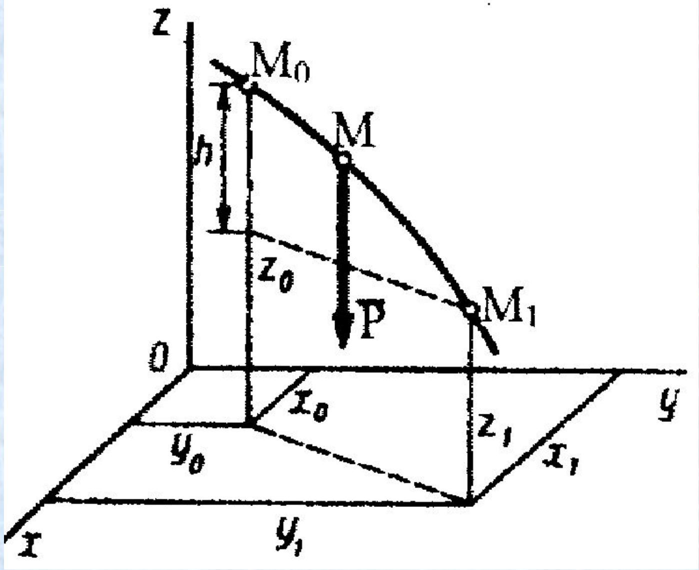
$$N = dA/dt = F\tau\, ds/dt = F\tau v.$$

Единицей измерения мощности в системе СИ является ватт (1 Вт = 1Дж/с). В технике - 1 л.с. = 736 Вт.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Примеры вычисления работы

Работа силы тяжести

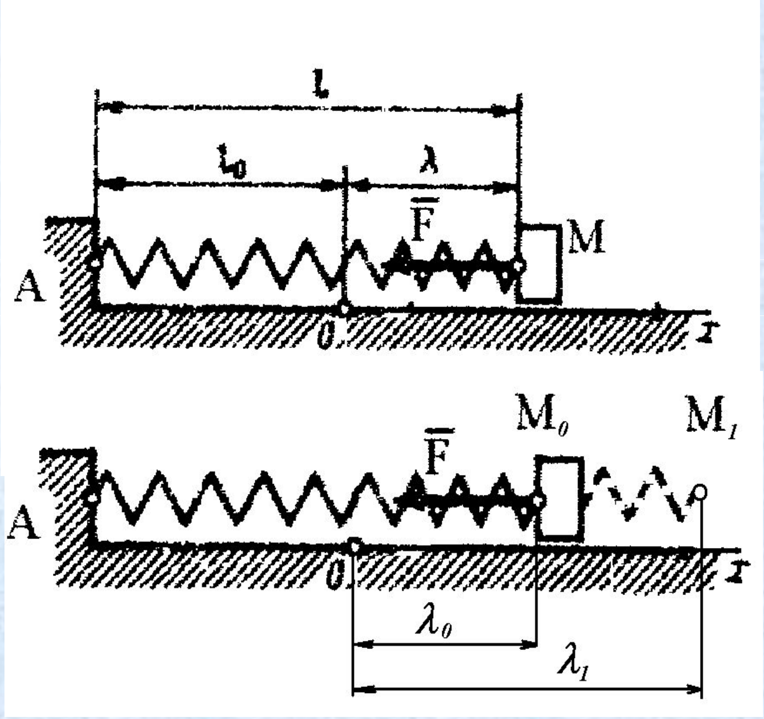


$$z_0 - z_1 = h$$

Работа силы тяжести не зависит от формы траектории точки её приложения. Силы, обладающие таким свойством, называются потенциальными силами.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Работа силы. Мощность



Работа силы упругости

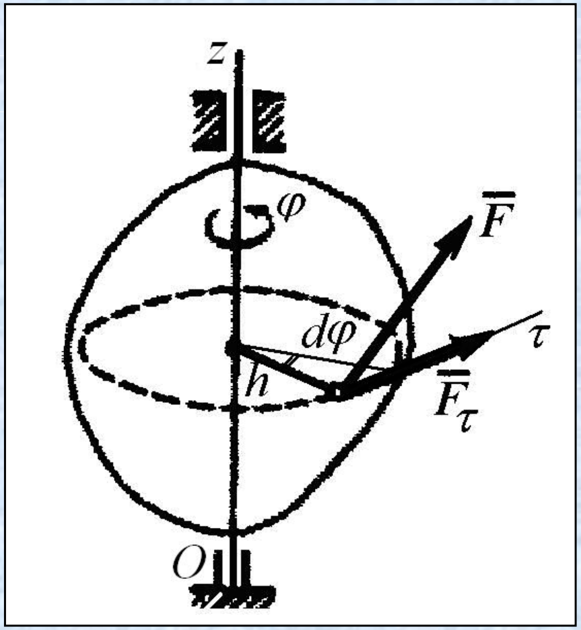
$$F = c\lambda = c|x| \ \text{и} \ F_x = -cx.$$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Работа силы. Мощность

Работа силы, приложенной к вращающемуся телу

где $ds = h\,d\varphi$



$$dA = \underline{F_\tau h}\, d\varphi.$$

$$F_\tau h = m_z(\quad) = M_z$$

$$dA = M_z\, d\varphi$$

или $$\boxed{A = \pm M_z \cdot \varphi.}$$

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

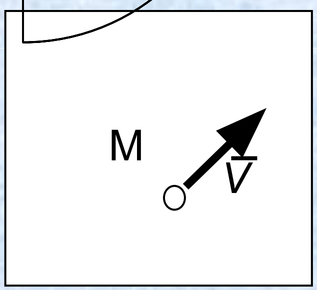
ЛЕКЦИЯ 22
План:

22.1. Кинетическая энергия.
22.2. Теорема об изменении кинетической энергии

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Кинетическая энергия

для материальной точки



для механической системы

из n материальных точек

Кинетическая энергия - скалярная величина

Единица измерения кинетической энергии в системе СИ - 1 Дж.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

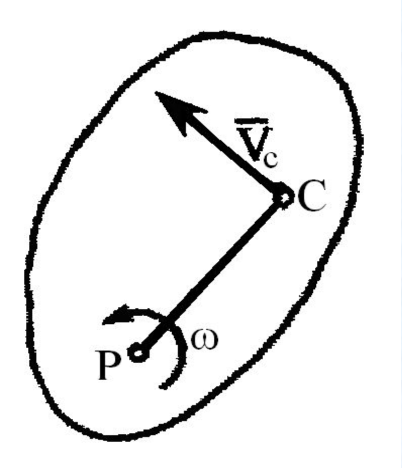
Кинетическая энергия

для твердого тела

Поступательное движение

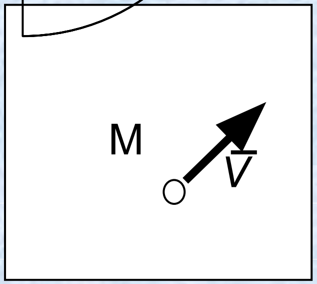
Вращательное движение

Плоскопараллельное движение



ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Рассмотрим материальную точку с массой m



$$ma_\tau = \sum F_{k\tau}.$$

$$mvdv = \sum dA_k$$

теорема об изменении кинетической энергии точки в дифференциальной форме

теорема об изменении кинетической энергии точки в конечном виде

22.5

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Рассмотрим материальную точку механической системы с массой m_k

Для всей механической системы

теорема об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме

теорема об изменении кинетической энергии системы в интегральной форме

МЕХАНИКА

Теоретическая механика
Модуль 1

Раздел 5 – АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

- ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА — ЛЕКЦИЯ 23
- ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ — ЛЕКЦИЯ 24
- ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ — ЛЕКЦИЯ 25, ЛЕКЦИЯ 18
- УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА — ЛЕКЦИЯ 26

МЕХАНИКА

Модуль 1
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

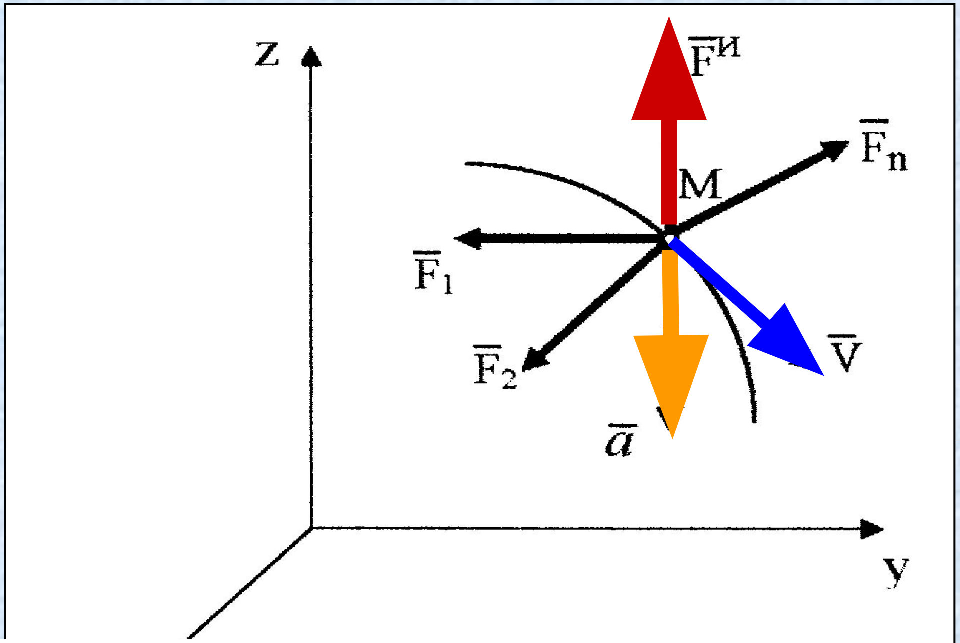
ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

ЛЕКЦИЯ 23
План:

23.1. Сила инерции.
23.2. Принцип Даламбера для материальной точки и механической системы.
23.3. Главный вектор и главный момент сил инерции
23.4. Динамические реакции.

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

Рассмотрим движение материальной точки М



*Сила инерции материальной точки направлена противоположно ее ускорению и **приложена к телу**, сообщающему точке это ускорение*

принцип Даламбера для материальной точки.

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

Рассмотрим материальную точку механической системы:

для всех точек полученная система сил будет произвольной пространственной и уравновешенной:

Принцип Даламбера для системы

Принцип Даламбера для твердого тела

23.4

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

Главный вектор и главный момент сил инерции механической системы

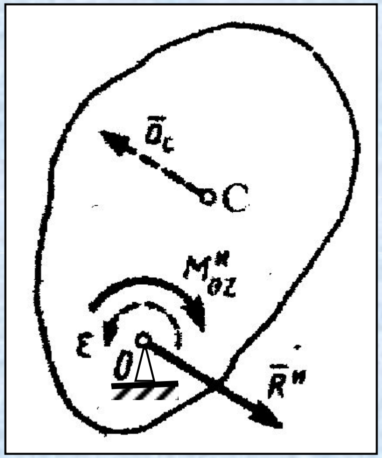
Главный вектор сил инерции

Главный момент сил инерции

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

Частные случаи приведения сил инерции твердого тела

1. Поступательное движение



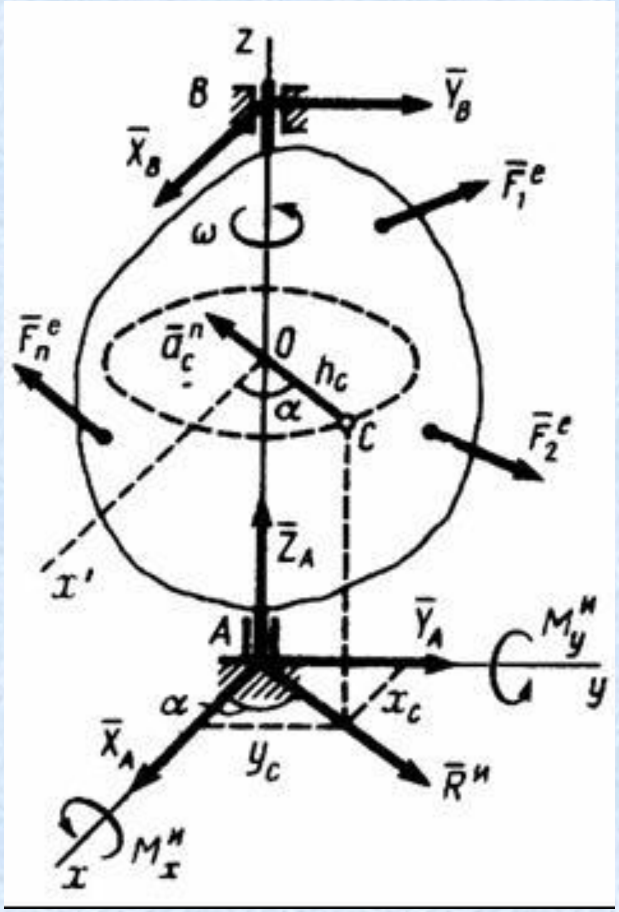
2. Вращательное движение (общий случай)

3. Вращение вокруг оси, проходящей через центр масс тела

4. Плоскопараллельное движение

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

Динамические реакции вращающегося тела



24.1

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

ЛЕКЦИЯ 24

План:

24.1. Классификация связей.
24.2. Возможные перемещения системы. Идеальные связи.
24.3. Принцип возможных перемещений

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Классификация связей

***Связи** - это любого вида ограничения, которые налагаются на положения и скорости точек механической системы*

- ***Стационарные***
- ***Нестационарные***

- ***Геометрические***
- ***Кинематические (дифференциальные)***

- ***Интегрируемые***
- ***Неинтегрируемые***

- ***Голономные***
- ***Неголономные***

- ***Удерживающие***
- ***Неудерживающие***

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Возможные перемещения системы

Возможное перемещение *механической системы - это совокупность воображаемых элементарных перемещений точек системы из занимаемого в данный момент положения, которые допускаются всеми наложенными на систему связями*

действительное перемещение -

дифференциал

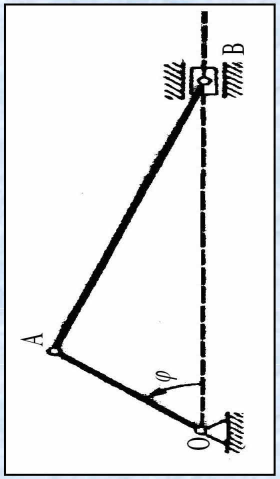
возможное перемещение –

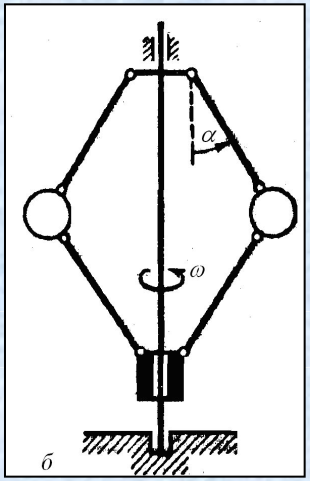
вариация

$\delta x, \delta y, \delta z$ - *проекции на координатные оси*

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Число степеней свободы *системы - это число независимых, между собой возможных перемещений механической системы*





Возможная работа *- элементарная работа, которую действующая на материальную точку сила могла бы совершить на перемещении, совпадающем с возможным перемещением этой точки:*

Идеальная связь *– это связь, для которой сумма элементарных работ ее реакций на любом возможном перемещении системы равна нулю:*

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

(общее условие равновесия механической системы)

Для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил на любом возможном перемещении системы была равна нулю:

25.1

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

ЛЕКЦИЯ 25

План:

25.1.Обобщённые координаты и обобщенные скорости.

25.2. Обобщённые силы.

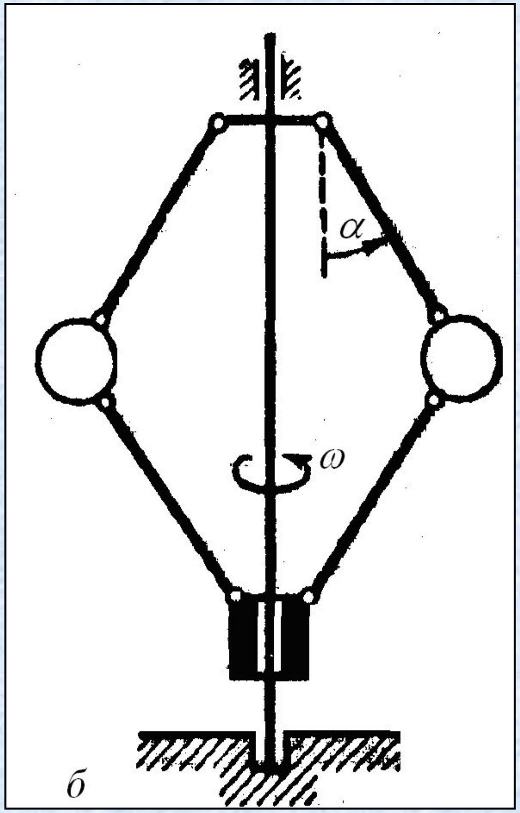
25.3. Общее уравнение динамики

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

Обобщенные координаты *механической системы* **-** *независимые между собой параметры любой размерности, однозначно определяющие положение системы, число которых равно числу степеней свободы:*

$$q_1, q_2, \ldots, q_s$$

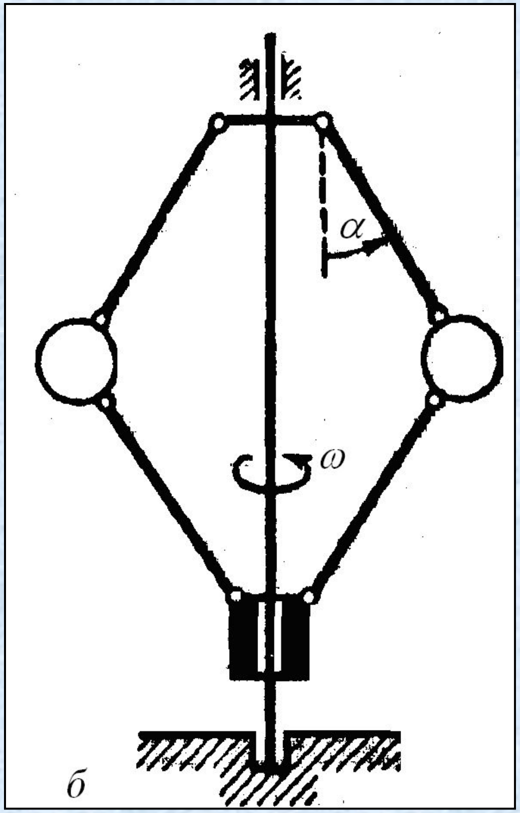
Положение любой точки механической системы:



ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

Кинематические уравнения *движения системы в обобщенных координатах*

$$q_1 = f_1(t),$$
$$q_2 = f_2(t),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$q_s = f_s(t)$$



Обобщенные скорости *- производные от обобщенных координат по времени :*

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

Обобщённые силы

Пусть механическая система состоит из n *материальных точек, на которые действуют силы :*

Сумма элементарных работ всех сил на возможном перемещении системы δq*:*

$$\Sigma\delta A_1 = Q_1\delta q_1$$

- обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

Если ко всем точкам системы кроме активных сил и реакций связей прибавить силы инерции, то по принципу Даламбера полученная система сил будет уравновешенной

Тогда, согласно принципу возможных перемещений:

$= 0$ *для идеальных связей*

общее уравнение динамики (принцип Даламбера–Лагранжа)

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

Общее уравнение динамики в обобщенных координатах:

обобщенная активная сила

обобщенная сила инерции, соответствующая обобщенной координате q_j

Т.к. величины δq_j независимы, то:

……….,

26.1

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

ЛЕКЦИЯ 26

План:

26.1. Уравнения Лагранжа

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

Лагранж получил формулу, вычисляющую обобщенные силы инерции через кинетическую энергию системы:

:

где T - кинетическая энергия системы

Согласно общему уравнению динамики:

обобщенная сила системы:

26.3

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

Дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа)

:

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

Чтобы составить уравнения Лагранжа для данной механической системы, необходимо:

- *- установить число степеней свободы системы и выбрать обобщенные координаты;*
- *- изобразить систему в произвольном положении,все действующие силы (для систем с идеальными связями только активные);*
- *- вычислить обобщенные силы, при этом каждое возможное перемещение должно быть положительным;*
- *- записать кинетическую энергию системы и выразить ее через обобщенные координаты и обобщенные скорости;*
- *- вычислить частные производные согласно уравнениям Лагранжа;*