7-дәріс. Математикалық талдауға кіріспе
Функция

x айнымалысының әрбір мәніне $x \in X$ белгілі бір $y \in Y$ мәні сәйкес келсе, онда y -ті x -тің функциясы деп атап, оны $y = f(x), y = \varphi(x)$, т.с.с деп белгілейді, мұндағы x - тәуелсіз айнымалы немесе аргумент деп аталады.

x тәуелсіз айнымалысының қабылдайтын мәндер жиынын анықталу облысы деп, ал y функциясының f сәйкестігі бойынша қабылдайтын мәндер жиынын өзгеру облысы деп атайды.
Сонымен $y = f(x)$ функциясының X - анықталу облысы, Y - өзгеру облысы, ал f - x тәуелсіз айнымалысы мен y функциясының арасындағы сәйкестік.

Функция түрлері. Егер $y = f(x)$ функциясы үшін аргументтің үлкен мәніне функцияның үлкен мәні сәйкес келсе, онда *функция өспелі*, керісінше жағдайда, яғни аргументтің үлкен мәніне функцияның кіші мәні сәйкес келсе, онда *кемімелі функция* деп аталады.

Егер қандай да бір T саны табылып $f(x+T)=f(x)$ теңдігі орындалса, онда $y=f(x)$ функциясын *периодты функция* дейді. T - периоды.

$$y=\sin x,\ y=\cos x,\quad T=2\pi;$$

$$y=tg\,x,\ y=ctg\,x,\quad T=\pi$$ периодты функциялар.

Егер $f(-x)=-f(x)$ теңдігі орындалса, онда $f(x)$ - *тақ функция*, ал $f(-x)=f(x)$, онда $f(x)$ - *жұп функция* делінеді.

Қандай да бір оң M саны табылып $|f(x)|<M$ теңсіздігі орындалса, онда $f(x)$ - *шектелген функция*.

Егер $y=F(u),\ u=\varphi(x)$ болса, онда $y=F(\varphi(x))$ - *күрделі функция* делінеді.

Мысалы, $y=\sin u,\ u=x^2 \Rightarrow y=\sin x^2$.

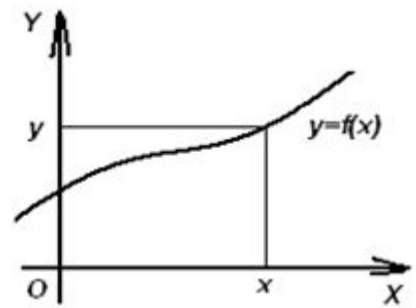
Егер x аргументке бір емес, бірнеше y сәйкес келсе, онда y функциясы көп мәнді функция деп, ал бір мән сәйкес келсе, онда бірмәнді функция деп аталады.

Функцияның берілу тәсілдері.

1. Кестелік берілуі. Бұл әдіс бойынша белгілі бір ретпен x - тің мәндері және оған сәйкес y мәндері жазылады.

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

2. Графиктік берілуі. Сан жиындарының арасындағы қатынасты (тәуелділікті) көрнекі түрде, оның графигін пайдалана отырып көрсетуге болады.



3. Аналитикалық тәсілмен берілуі. Сандар мен тұрақты, айнымалы арасындағы математикалық амалдар нәтижесінде пайда болған өрнекті функцияның аналитикалық тәсілмен берілуі деп атайды.

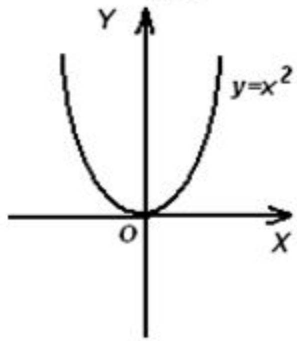
$$y = x^4 - 2, \quad f(x) = \frac{\lg x - \sin x}{5x^2 + 1}, \quad y(x) = 2^x - \sqrt{5 + 3x} \text{ -}$$

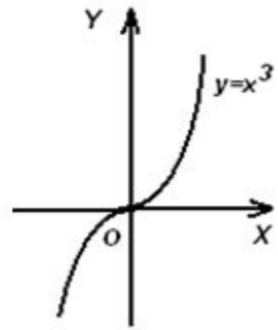
функциялардың аналитикалық түрде берілуі.

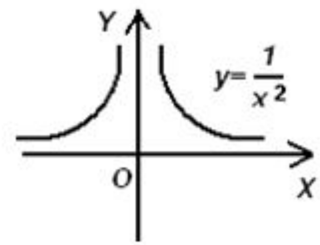
Негізгі элементар функциялар

Негізгі элементар функциялар деп келесі аналитикалық түрде берілген функцияларды айтады.

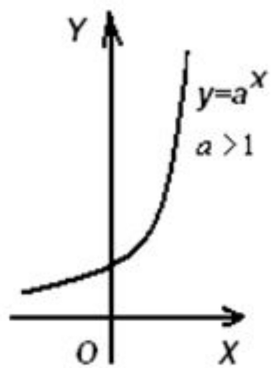
1. Дәрежелік функция $y = x^{\alpha}$, α - нақты сан.

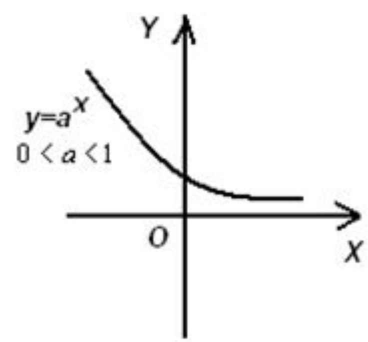




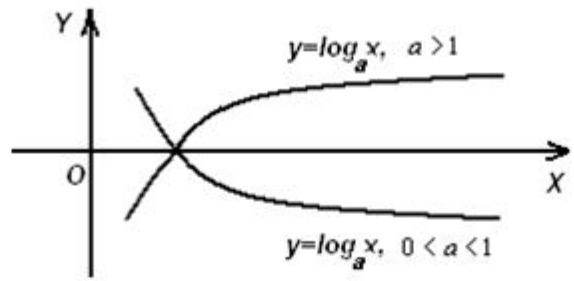


2. Көрсеткіштік функция $y = a^x, a > 0, a \neq 1$.





3. Логарифмдік функция $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1, x > 0$.



4. Тригонометриялық функциялар

$$y = \sin x; \quad y = \cos x; \quad y = tg\, x; \quad y = ctg\, x;$$

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}; \quad y = \mathrm{cosec}\, x = \frac{1}{\sin x}.$$

5. Кері тригонометриялық функциялар

$$y = \arcsin x; \; y = \arccos x; \; y = arctg\, x; \; y = arcctg\, x.$$

Негізгі элементар функцияларға амалдар қолдану арқылы жасалған функцияны элементар функция дейді.

Сандық тізбектер және функция шектері

Математикадағы негізгі түсініктің бірі – сан. $N=\{1,2,\ldots,n,\ldots\}$- натурал сандар жиыны.

Реттері өсуіне қарай бүтін сандармен нөмірленген сандар жиынын тізбек деп атайды: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ немесе былай белгілейді $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Егер кез келген оң ε санына сәйкес натурал $N=N(\varepsilon)$ саны табылып, барлық $n>N(\varepsilon)$ нөмірлері үшін $|x_n-a|<\varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда a саны $\{x_n\}$ тізбегінің шегі деп аталады және былай жазылады: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ немесе $n\to\infty$ жағдайда $x_n\to a$.

Шегі бар болатын тізбек жинақты тізбек деп, ал шегі болмайтын тізбек жинақсыз тізбек деп аталады.

Егер тізбек жинақты болса, оның тек бір ғана шегі болады.

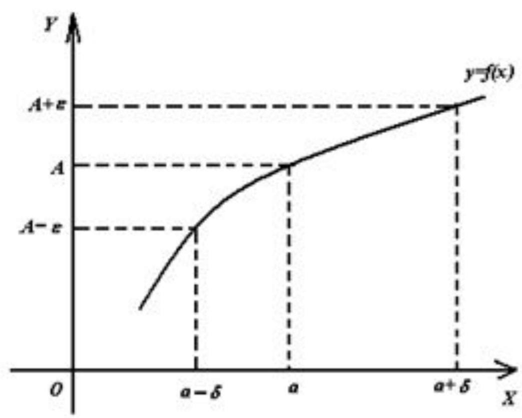
Егер кез келген $\varepsilon>0$ саны үшін x айнымалысының $|x-a|<\varepsilon$ теңсіздігін қанағаттандыратын мәндері табылса, онда a санын x айнымалысының шегі деп атайды. $x\to a$ немесе $\lim x=a$ деп жазады.

Егер оң M саны табылып, $|x| > M$ болса, онда x - шексіз үлкен айнымалы шама деп аталады.

Егер кез келген $\varepsilon > 0$ санына сәйкес $\delta > 0$ саны табылып, $0 < |x-a| < \delta$ шартын қанағаттандыратын барлық x үшін $|f(x) - A| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда A санын f функциясының x- тің a- ға ұмтылғандағы шегі деп атайды және $A = \lim_{x\to a} f(x)$ деп жазады және символдар арқылы:

$$A = \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$$

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon .$$



Шек қасиеттері.

$1^0.\ \lim(u_1+u_2)=\lim u_1+\lim u_2.$ $2^0.\ \lim(u_1\cdot u_2)=\lim u_1\cdot\lim u_2.$

$3^0.\ \lim(C\cdot u_1)=C\cdot\lim u_1.$ $4^0.\ \lim\left(\frac{u_1}{u_2}\right)=\frac{\lim u_1}{\lim u_2},$ $\lim u_2\neq 0.$

1-мысал. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2+5x+2}{2x^2-5x+7}=\frac{4^2+5\cdot 4+2}{2\cdot 4^2-5\cdot 4+7}=\frac{38}{19}=2.$

2-мысал. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{2x^2+5x+3}{4x^2-5x+7}=\frac{2\cdot(-3)^2+5\cdot(-3)+3}{4\cdot(-3)^2-5\cdot(-3)+7}=\left|\frac{0}{58}\right|=0.$

3-мысал. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-6x+5}{3x^2-4x-4}=\frac{2^2-6\cdot 2+5}{3\cdot 2^2-4\cdot 2-4}=\left|\frac{-3}{0}\right|=\infty.$

Енді, $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^\infty$ анықталмағандықтары болған жағдайдағы шектердің есептеу тәсілдерін көрсетейік.

1) $$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_{m-1}x+b_m}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|-$$ екі көпмүшенің қатынасының шегін табу үшін алдын ала бөлшектің алымы мен бөлімін x^N − не бөлеміз (мұндағы $N=\max\{n,m\}$ − көпмүшелердің үлкен дәрежесі).

4-мысал. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{4}.$$

мұндағы $x\to\infty$ − да $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$ бөлшектері нөлге ұмтылады.

5-мысал. $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-5x^2+3x+1}{3x^2+2x+4}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}}=\left|\frac{1}{0}\right|=\infty.$$

6-мысал. $$\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2-5x+4}{4x^4-3x^2+12x+8}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{12}{x^2}-\frac{5}{x^3}+\frac{4}{x^4}}{4-\frac{3}{x}+\frac{12}{x^2}+\frac{8}{x^3}}=\left|\frac{0}{4}\right|=0.$$

2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m}$ –

екі көпмүшенің қатынасының шегін табу керек болсын.

Егер $\boldsymbol{x\to a}$ – да $P_n(x)\to 0,\ Q_m(x)\to 0$ болса, онда $\dfrac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандық аламыз. Мұндай жағдайда бөлшектің алымы мен бөлімін көбейткіштерге жіктеп, сосын қысқартамыз.

7-мысал. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-11x+12}{3x^2-7x-20}=\left|\dfrac{2\cdot 4^2-11\cdot 4+12}{3\cdot 4^2-7\cdot 4-20}=\dfrac{0}{0}\right|=$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)(x-\frac{3}{2})}{3(x-4)(x+\frac{5}{3})}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(2x-3)}{(x-4)(3x+5)}=\lim_{x\to 4}\frac{2x-3}{3x+5}=\frac{8-3}{12+5}=\frac{5}{17}.$$

8-мысал. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+27}{5x^2-6x-63}=\left|\dfrac{-27+27}{45+18-63}=\dfrac{0}{0}\right|=$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x^2-3x+9)}{(x+3)(5x-21)}=\lim_{x\to -3}\frac{x^2-3x+9}{5x-21}=\frac{9+9+9}{-15-21}=-\frac{27}{36}=-\frac{3}{4}.$$

3) Иррационал функцияларды рационалға келтіру үшін кейде жаңа айнымалы енгізу керек.

9-мысал. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\left|\frac{0}{0}\right|=\left|\begin{array}{cc} 1+x=t^6 & \\ x\to 0 & t\to 1\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{t^3-1}{t^2-1}=\left|\frac{0}{0}\right|==\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)t+1)}=$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{t^2+t+1}{t+1}=\frac{3}{2}.$$

4) Иррационалдықтан рационалға көшудің тағы бір жолы – алым мен бөлімді түйіндеске көбейту.

10-мысал. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{x+4}-2)\cdot(\sqrt{x+4}+2)}{x\cdot(\sqrt{x+4}+2)}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{4}.$$

11-мысал. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}=\left|\dfrac{0}{0}\right|$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x})}{(\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x})(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})}{(5-x)-(5+x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})}{-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}}{-2}=\frac{2\sqrt{5}}{-2}=-\sqrt{5}$$