Практикум
по теме «Решение планиметрических задач из банка заданий ОГЭ № 24-25»

Часть 2. Задания части 2 экзаменационной работы направлены на проверку таких качеств геометрической подготовки выпускников, как:

- умение решить планиметрическую задачу, применяя различные теоретические знания курса геометрии;
- умение математически грамотно и ясно записать решение, приводя при этом необходимые пояснения и обоснования;
- владение широким спектром приёмов и способов рассуждений.

Модуль «Геометрия»					
24	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	7	5	П	2
25	Проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений, распознавать ошибочные заключения	7	7	П	2

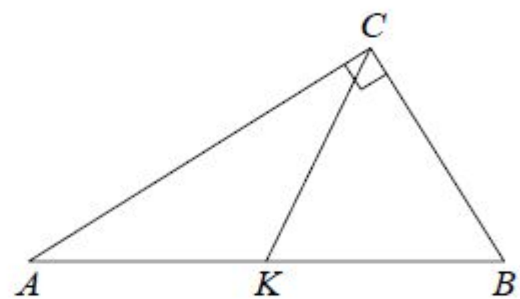
Примеры решение задач (№24-25) из Демо-версии 2018 года

24 В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны катеты: $AC = 6$, $BC = 8$. Найдите медиану CK этого треугольника.

Решение.

$$CK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + BC^2} =$$

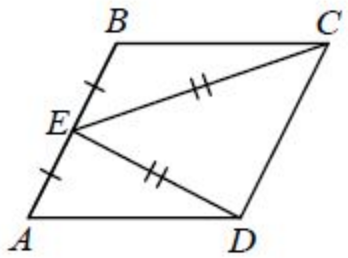
$$= \frac{1}{2}\sqrt{36 + 64} = 5.$$



Ответ: 5.

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

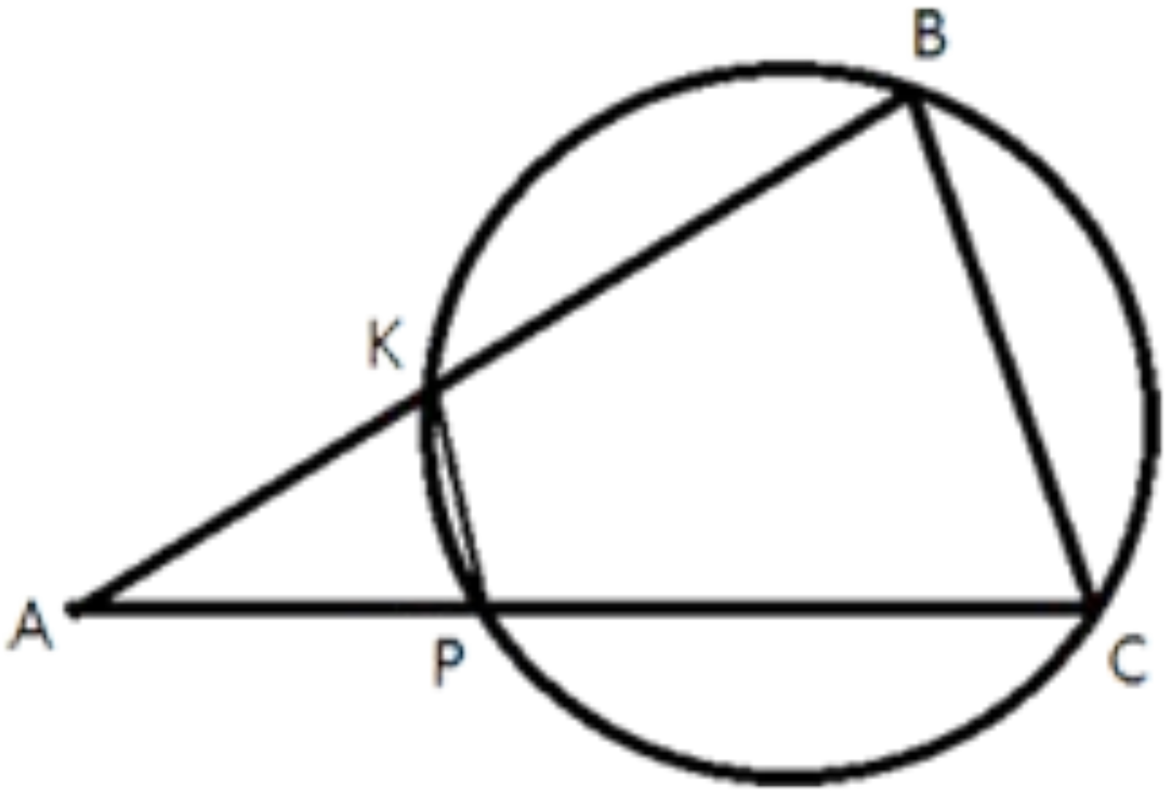
25 В параллелограмме $ABCD$ точка E — середина стороны AB. Известно, что $EC = ED$. Докажите, что данный параллелограмм — прямоугольник.



Доказательство.
Треугольники BEC и AED равны по трём сторонам. Значит, углы CBE и DAE равны. Так как их сумма равна $180°$, то углы равны $90°$. Такой параллелограмм — прямоугольник.

Баллы	Содержание критерия
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

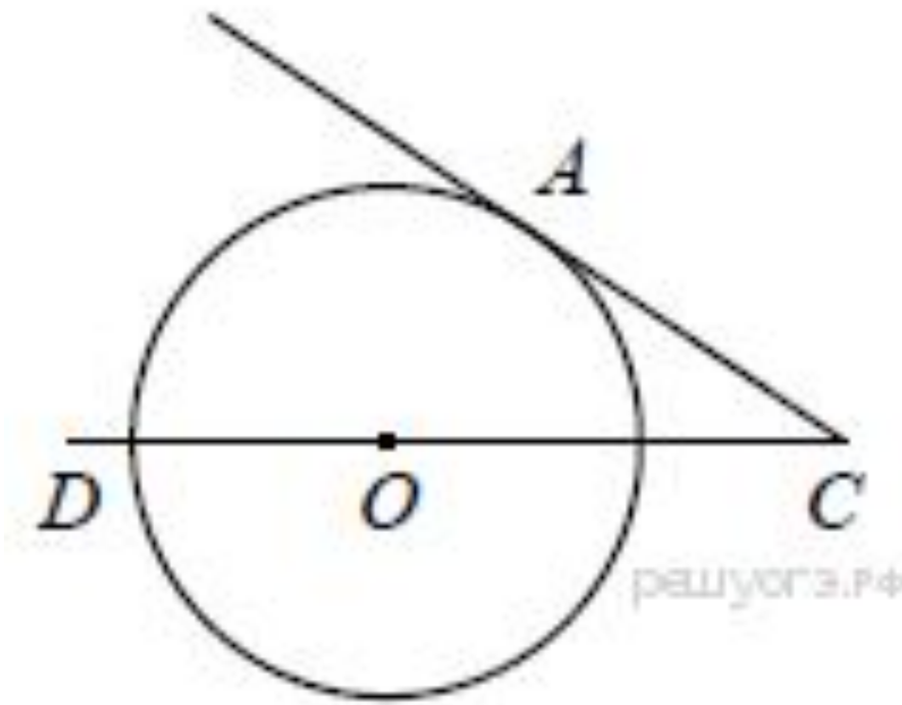
2. Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C. Найдите длину отрезка KP, если $AK = 18$, а сторона AC в 1,2 раза больше стороны BC.



Решение:

Рассмотрим четырехугольник PKBC. PKBC вписан в окружность, следовательно выполняется условие: сумма противоположных углов четырехугольника равна 180° (условие того, что четырехугольник можно вписать в окружность). Т.е. $\angle PKB+\angle BCP=180°$ $\angle PKB+\angle AKP=180°$ (т.к. это смежные углы). Следовательно, $\angle AKP=\angle BCP$ Рассмотрим треугольники ABC и AKP. $\angle AKP=\angle BCP$ (это мы выяснили чуть выше) $\angle A$ - общий, тогда эти треугольники подобны (по признаку подобия). Следовательно, $KP/BC=AK/AC=AP/AB$ (из определения подобных треугольников). Нас интересует равенство $KP/BC=AP/AB$ $KP/BC=18/(1,2BC)$ $KP=18BC/(1,2BC)=15$ Ответ: $KP=15$

3. Найдите угол ACO, если его сторона CA касается окружности, O — центр окружности, а дуга AD окружности, заключённая внутри этого угла, равна 100°.



Решение:

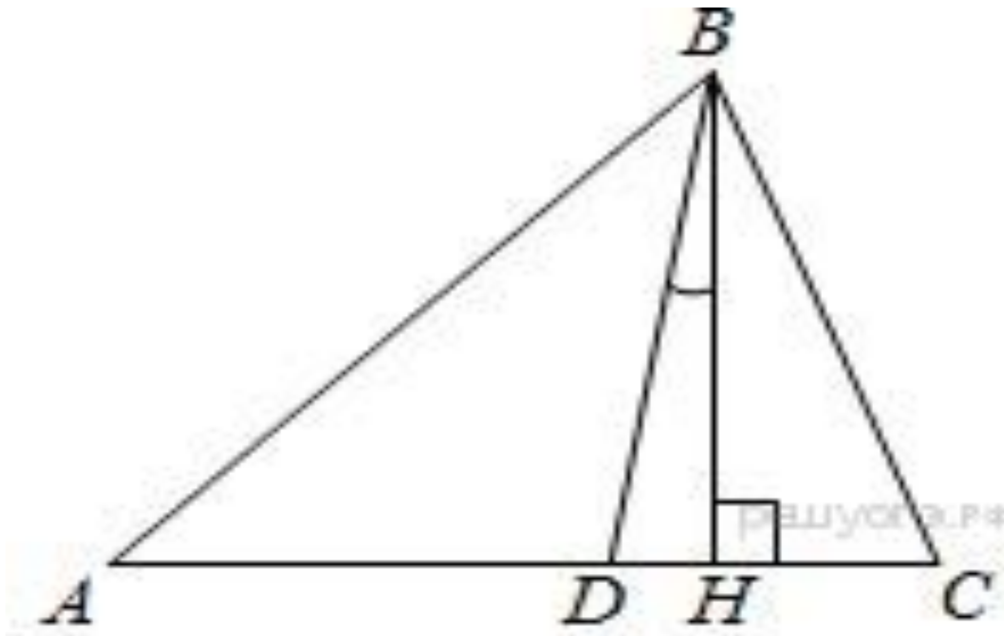
1.Треугольник ACO прямоугольный по свойству касательной (радиус к ней перпендикулярен). Угол AOD центральный и равен градусам (градусной мере дуги AD, на которую он опирается).

2.Он внешний угол треугольника ACO.

Тогда <ACO+ <OAC = 100°, отсюда <ACO = 100°- 90° = 10°

Ответ: 10°

4. В треугольнике *ABC* углы *A* и *C* равны 40° и 60° соответственно. Найдите угол между высотой *BH* и биссектрисой *BD*.



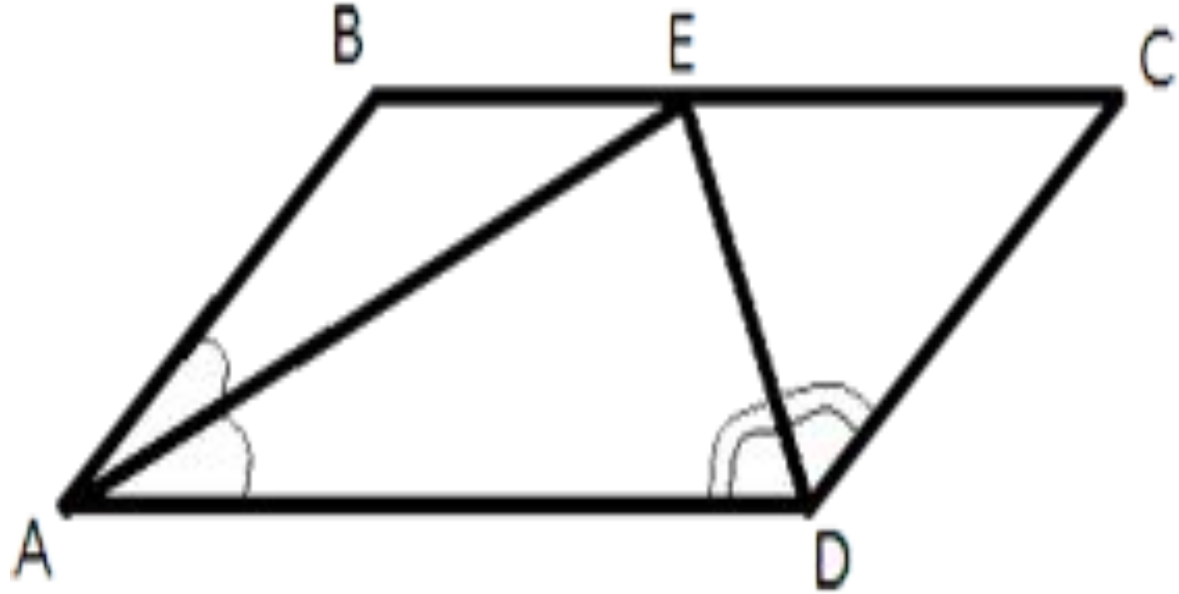
Решение:

1. BD - биссектриса => угол CBD = 1/2 ABC = 1/2 *(180° - (40°+60°)) = 1/2 *(180° - 100°) = 1/2 *80° = 40°
2. Рассмотрим треугольник BCH (угол CHB - прямой по условию). По теореме о сумме острых углов прямоугольного треугольника угол HCB + угол HBC = 90°.
3. По условию угол HCB = 60°. Значит угол HBC = 90° - 60° = 30°
4. Угол между высотой BH и биссектрисой BD - это угол HBD. Он равен: угол HBD = угол CBD - угол HBC= 40° -

- 30° = 10°.

Ответ: 10°.

5. Биссектрисы углов *A* и *D* параллелограмма *ABCD* пересекаются в точке, лежащей на стороне *BC*. Найдите *BC*, если *AB* = 34.

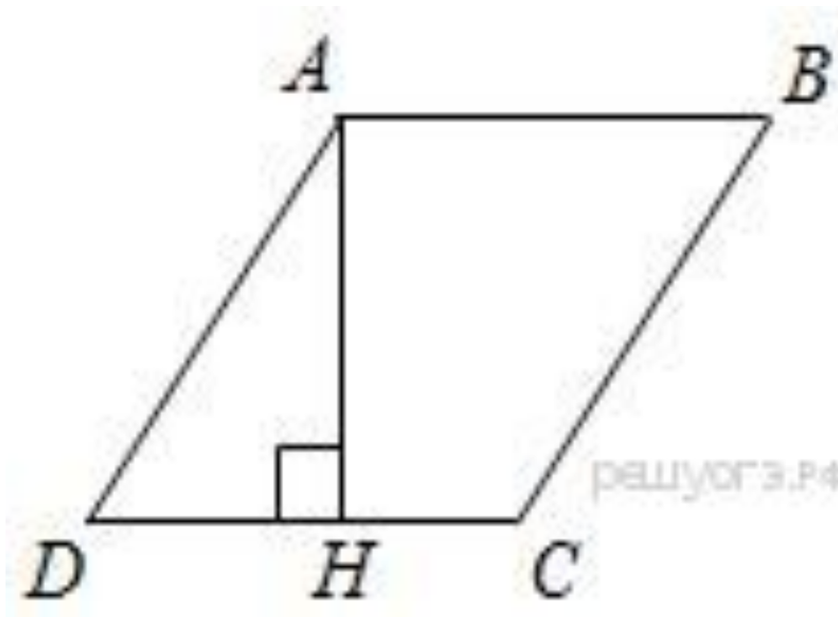


Решение:

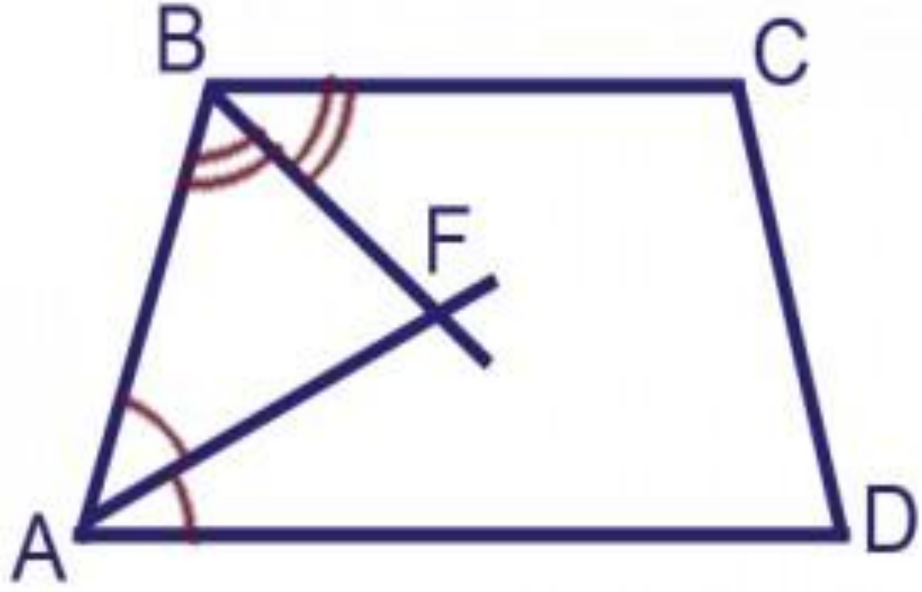
BC||AD (по определению параллелограмма) $\angle BAE = \angle EAD$ (т.к. AE - биссектриса) $\angle EAD = \angle BEA$ (т.к. это накрест-лежащие углы) Следовательно, $\angle BAE = \angle BEA$ Получается, что треугольник ABE - равнобедренный (по свойству), и AB=BE (по определению равнобедренного треугольника). Аналогично с треугольником ECD: $\angle CED = \angle CDE$ EC=CD Так как AB=CD (по свойству параллелограмма), то получается, что AB=BE=EC=CD = 34. Значит, BC = 34 + 34 = 68

Ответ: 68

6. Высота *AH* ромба *ABCD* делит сторону *CD* на отрезки *DH* = 12 и *CH* = 3. Найдите высоту ромба.



7. Биссектрисы углов *A* и *B* при боковой стороне *AB* трапеции *ABCD* пересекаются в точке *F*. Найдите *AB*, если *AF* = 24, *BF* = 10.

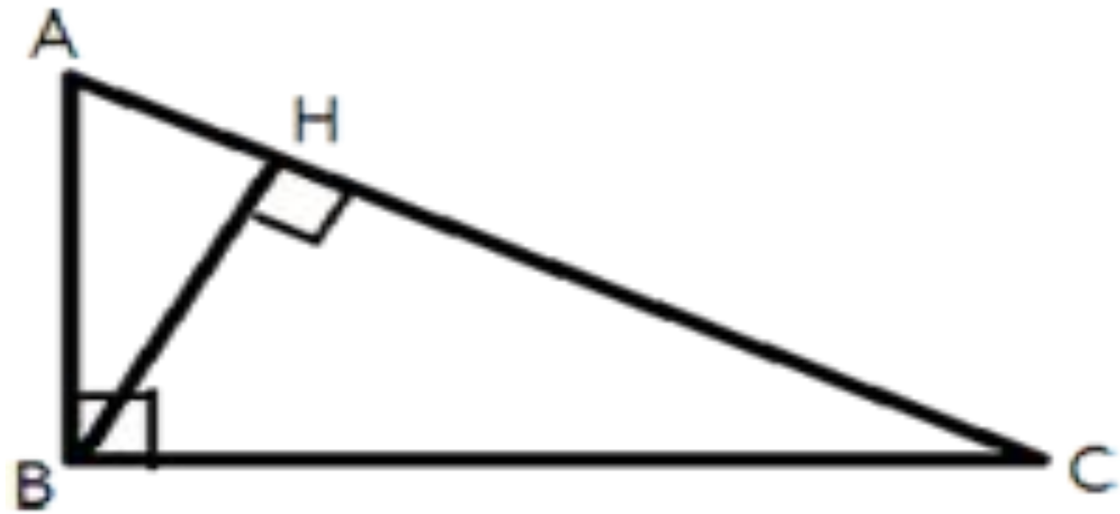


Решение:

1. Углы BAD и ABC — внутренние односторонние при прямых AD || BC и секущей AB,
следовательно, углы BAD+ABC =180°. AF и BF — биссектрисы углов BAD и ABC.
2. Сумма углов BAF и ABF будет равна половине суммы углов BAD+ABC =180°, то есть 180:2=90°.
Треугольник ΔAFB — прямоугольный, тогда по т. Пифагора находим AB:

- $AB^2=BF^2+AF^2$, $AB^2=10^2+24^2$ $AB^2=100+576$ $AB^2=676$ $AB=26$
- **Ответ:** 26.

9. Точка *H* является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла *B* треугольника *ABC* к гипотенузе *AC*. Найдите *AB*, если *AH* = 5, *AC* = 20.



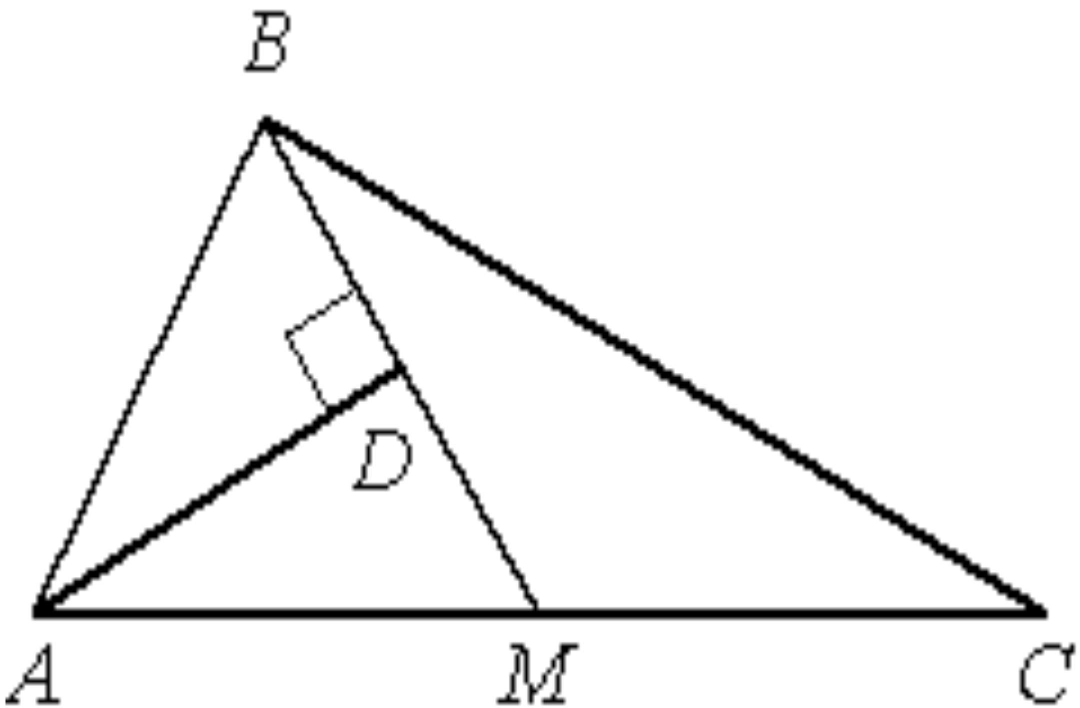
Решение:

1.Рассмотрим треугольники ABC и ABH. ∠A – общий, ∠AHB=∠ABC .Следовательно, эти треугольники подобны (по признаку подобия) 2. Тогда AC/AB=AB/AH (гипотенуза большого треугольника относится к гипотенузе маленького как малый катет большого треугольника к малому катету маленького треугольника) 20/AB=AB/5

$20*5=AB^2$, $100=AB^2$, $AB=10$

Ответ: AB=10

10. Прямая *AD*, перпендикулярная медиане *BM* треугольника *ABC*, делит её пополам. Найдите сторону *AC*, если сторона *AB* равна 4.



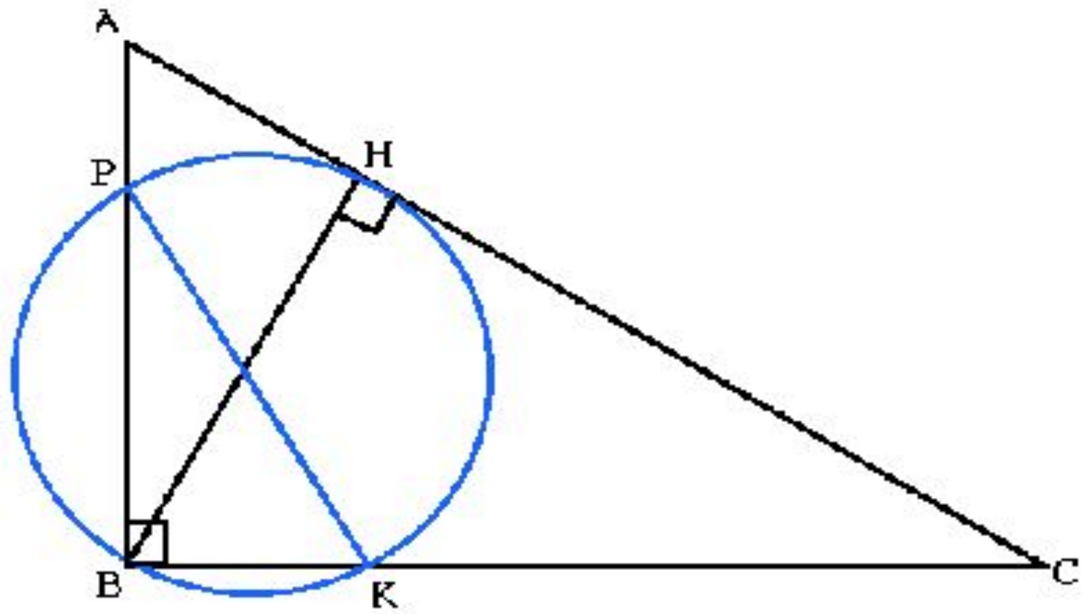
Решение:

1. AD для треугольника ABM является и медианой, и высотой. А это свойство медианы для равнобедренного треугольника. Следовательно, треугольник ABM - равнобедренный с основанием BM.

2. По определению равнобедренного треугольника AB=AM. Т.к. BM - медиана для треугольника ABC, следовательно AM=MC (по определению медианы). Тогда AC=AM*2. Как мы выяснили ранее AM=AB => AC=AB*2=4*2=8.

Ответ: AC=8.

11. Точка *H* является основанием высоты *BH*, проведённой из вершины прямого угла *B* прямоугольного треугольника *ABC*. Окружность с диаметром *BH* пересекает стороны *AB* и *CB* в точках *P* и *K* соответственно. Найдите *PK*, если *BH* = 16.



Решение:

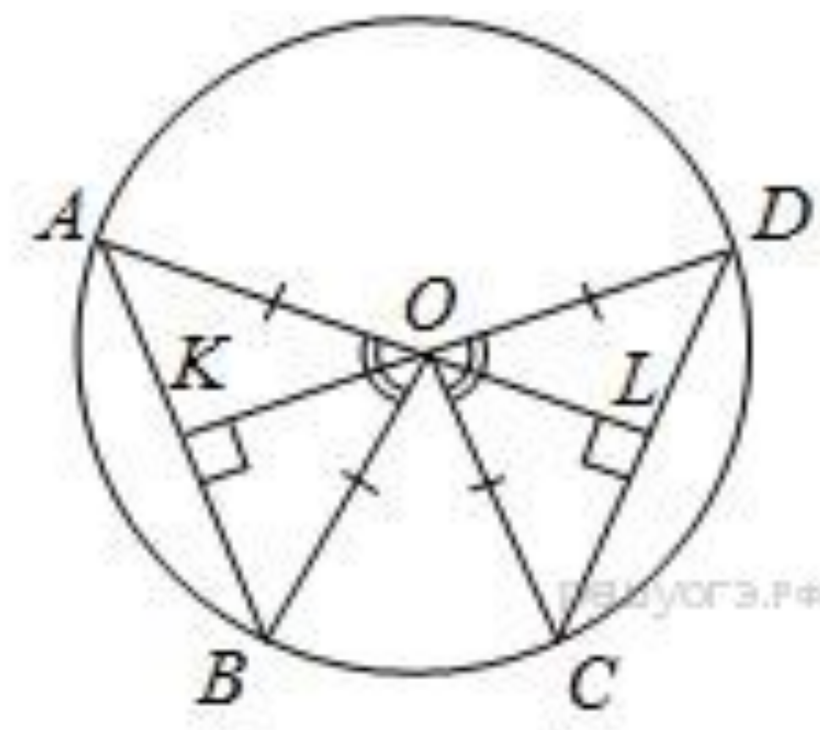
1.Вписанный угол РВК - прямой по условию задачи. Так как центральный угол равен двум прямым углам, т.е. 180°, отрезок РК - диаметр и равен другому диаметру ВН.

РК=16.

Если короче - вписанный угол, если он равен 90°, опирается на диаметр. Отсюда РК - диаметр.

№25

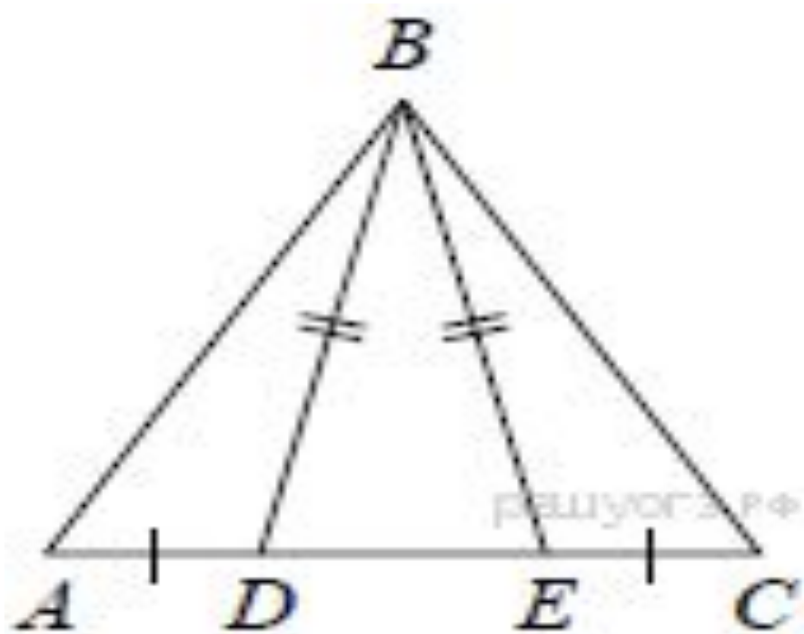
1. В окружности с центром *O* проведены две хорды *AB* и *CD* так, что центральные углы *AOB* и *COD* равны. На эти хорды опущены перпендикуляры *OK* и *OL*. Докажите, что *OK* и *OL* равны.



Доказательство:

Треугольники AOB и COD равны по двум сторонам и углу между ними ($AO = BO = CO = DO$ как радиусы окружности, $\angle AOB = \angle COD$ по условию). Следовательно, высоты OK и OL равны как соответственные элементы равных треугольников.

2. На стороне *AC* треугольника *ABC* выбраны точки *D* и *E* так, что отрезки *AD* и *CE* равны (см. рисунок). Оказалось, что отрезки *BD* и *BE* тоже равны. Докажите, что треугольник *ABC* — равнобедренный.

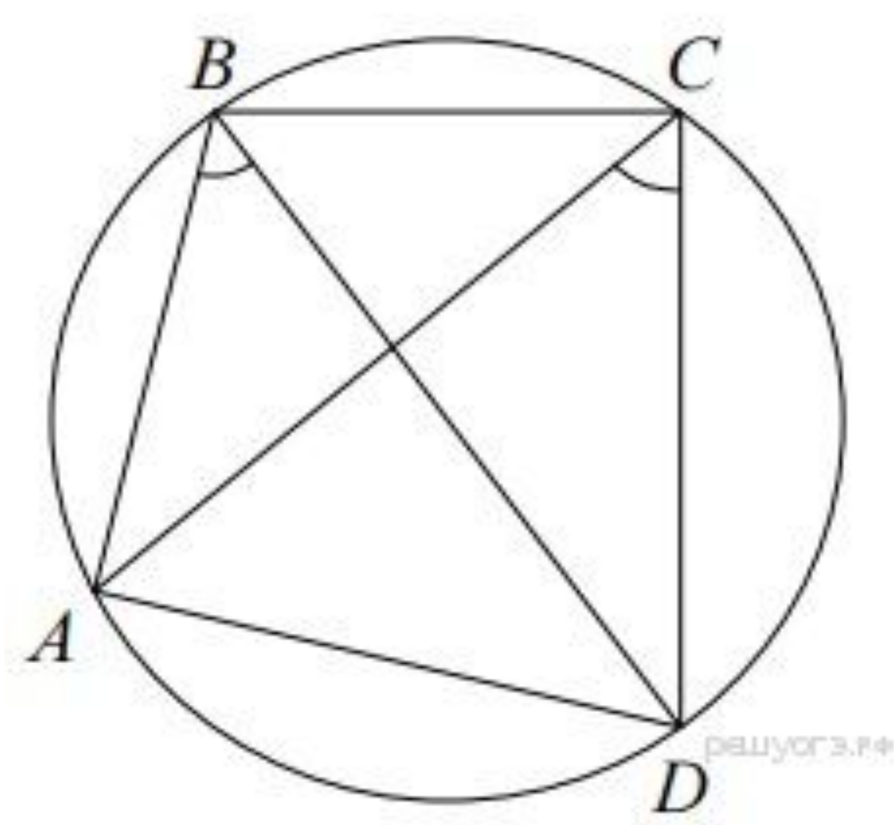


Доказательство:

1) По условию задачи BD=BE, следовательно треугольник BDE - равнобедренный (по определению). По свойству равнобедренного треугольника угол BDE = углу BED. Смежные им углы тоже равны, угол BDA=углу BEC.

2) Рассмотрим треугольники ABD и CBE. AD=CE (по условию), BD=BE (По условию), угол BDA=углу BEC (из п.1), следовательно эти треугольники равны (по первому признаку равенства треугольников), а это значит, что BA=BC. Следовательно треугольник ABC - равнобедренный (по определению).

3. В выпуклом четырёхугольнике *ABCD* углы *ABD* и *ACD* равны. Докажите, что углы *DAC* и *DBC* также равны.

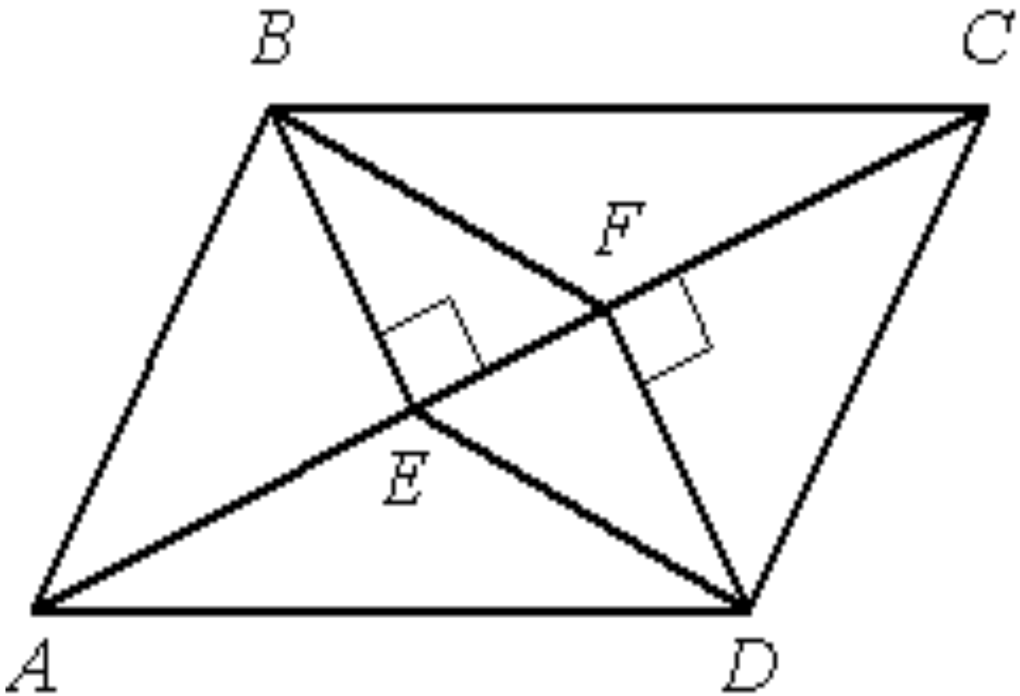


Доказательство:

1. $\angle$ABD и $\angle$ACD опираются на отрезок AD и равны друг другу. Значит мы можем провести окружность через точки AD и вершины этих углов. Эти углы окажутся вписанными в окружность, опирающимися на одну дугу. Получится, что мы описали окружность вокруг четырехугольника.
2. Заметим, что углы DAC и DBC тоже являются вписанными и опирающимися на одну и ту же дугу, т.е., используя теорему о вписанном угле, получаем, что они равны друг другу . ч.т.д.

В параллелограмме *ABCD* проведены перпендикуляры *BE* и *DF* к диагонали *AC*

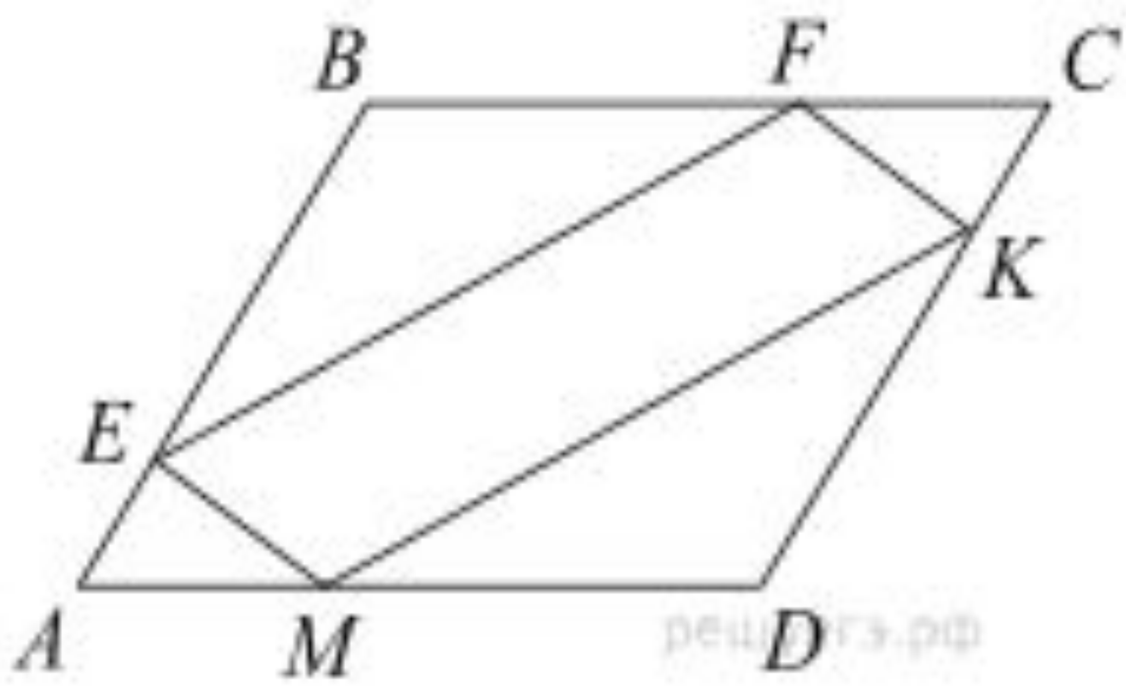
Докажите, что *BFDE* — параллелограмм.



Доказательство:

1) Рассмотрим треугольники ABE и CDF. AB=CD (по свойству параллелограмма). Угол BAE = углу DCF (т.к. это внутренние накрест-лежащие углы для параллельных BC и AD и секущей AC). Угол BEA = углу DFC (т.к. оба эти угла прямые по условию).Значит прямоугольные треугольники равны по гипотенузе и острому углу). Отсюда следует, что BE=FD
2) Рассмотрим треугольники BFE и DEF. BE=FD (из пункта 1), EF- общая сторона, угол BEF = углу DFE (т.к. это прямые углы по условию). Следовательно треугольники BFE и DEF равны (по второму признаку равенства треугольников). Отсюда следует, что BF=ED.
3) В итоге получаем, BF=ED и BE=FD, следовательно BFDE — параллелограмм (по свойству параллелограмма).

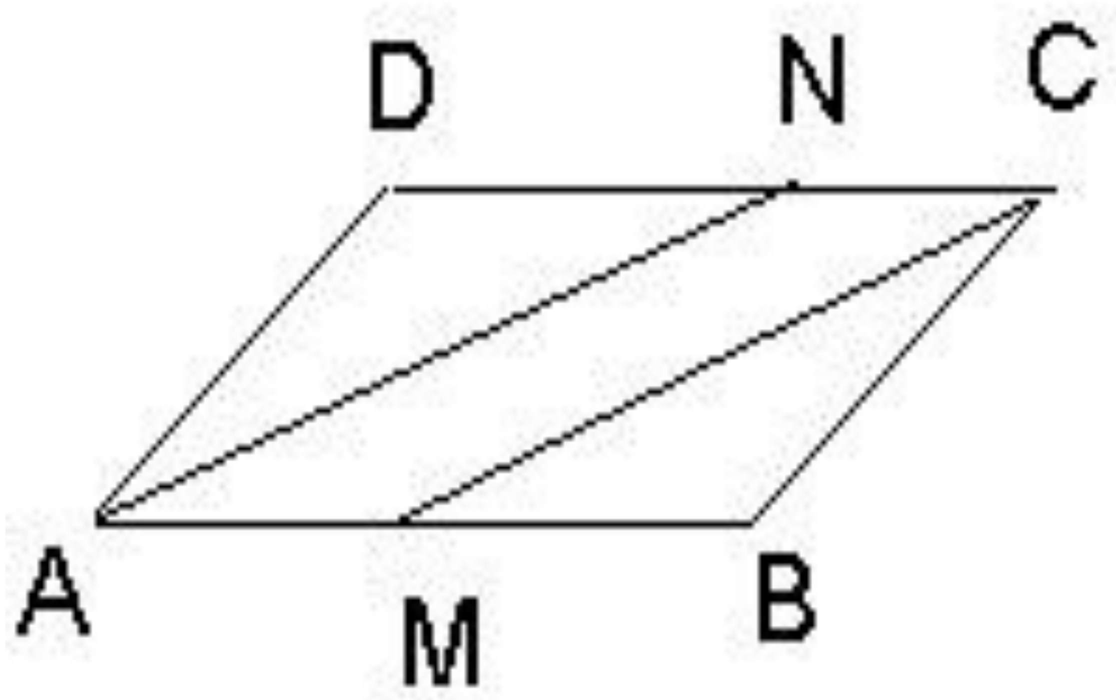
В параллелограмме *ABCD* точки *E, F, K* и *M* лежат на его сторонах, как показано на рисунке, причём *AE = CK, BF = DM*. Докажите, что *EFKM* — параллелограмм.



Доказательство:

1. Угол А= углуС (т.к. АВСД паралелограмм), АЕ=СК, АМ=FC (по условию задачи), значит треугольник AME = треугольнику CFK, значит и EM=FK. Также легко заметить, что MD=BF и KD=EB (покажем для MD=BF. Т.к. AD=AM+MD, BC=BF+FC, а FC=AM , значит и MD=BF, Для KD=EB доказательство аналогично)Тогда мы получили, что MD=BF ,KD=EB , угол В = угол D (т.к. АВСД - парал-мм), значит треугольник EBF = треугольнику KDM, значит MK = EK таким образом мы получили, что четырехугольник EFKM, у которого противолижащие стороны попарно равны.
2. Теперь докажем что противалежащие стороны у четырехугольника параллельны, тогда мы и докажем что он параллелограмм. В EFKM проведем диагональ MF, тогда очевидно, что треугольник MKF = треугольнику FEM (по равенству двух сторон+ одна сторона общаяя) Тогда угол FMK = углу MEF , а они внутренние накрест лежащие углы при прямых MK и EF и секущей MF, значит EF параллельна MK.Теперь аналогичным образом, проводим диагональ EK, также получаем 2 равных треугольника MEK=FKE (тоже по трем сторонам), тогда углы KEM=EKF (а они накрест лежащие при прямых FK и EM при секущей KE), значит FK параллельна EMП получили что стороны четырехугольника попарно параллельны друг другу, значит это параллелограм.

8. В параллелограмме проведены биссектрисы противоположных углов. Докажите, что отрезки биссектрис, заключенные внутри параллелограмма, равны.



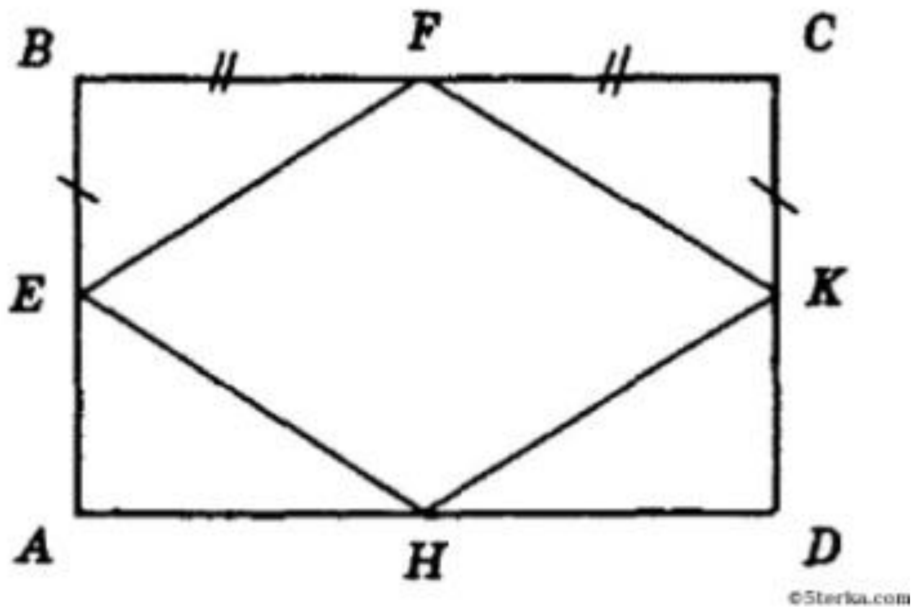
Доказательство:

1. Рассмотрим треугольники ADN и CBM

AD = DC как противоположные стороны параллелограмма,

2. Угол DAN равен углу BCM как половины равных углов A и B параллелограмма .
3. Угол AND равен углу CBM как противоположные углы параллелограмма
4. Треугольники равны по второму признаку, следовательно AN = MC как соответственные стороны в равных треугольника

9. Середины сторон параллелограмма является вершинами ромба. Докажите, что данный параллелограмм — прямоугольник.



Доказательство:

Рассмотрим треугольники AEH и BEF:

1. BE = BA так как E – середина AB
2. BA = AH как половины равных сторон параллелограмма
3. EF = EH как стороны ромба. Отсюда следует, что данные треугольники равны по третьему признаку.
4. Значит угол B = углу A, а так как они являются внутренними односторонними и в сумме дают 180 градусов, то каждый из них равен 90 градусов. По определению ABCD – прямоугольник.

Удачи на экзаменах !!!