Определение 1.15. Пусть $(X, d), (Y, \rho)$ – метрические пространства. Эти пространства называются ***гомеоморфными***, если существует функция $f: X \to Y$, которая является биективным отображением, и отображения f и f^{-1} являются непрерывными в любой точке X и Y соответственно. f и f^{-1} в этом случае называются ***гомеоморфизмами***.

Пример 1.7. Пусть (X, d) – метрическое пространство, $A \subset X$. Функция

$$f(x) = d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$$

является непрерывной на X.

*

1.3. Неравенства Юнга, Гельдера, Минковского

Лемма 1.4 (неравенство Юнга). Для любых чисел $a, b \geq 0$ и любых p и q таких, что $p > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, выполняется неравенство

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

* **Теорема 1.2 (неравенство Гельдера для интеграла).** Для любых непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $x = x(t), y = y(t)$ и любых p и q таких, что $p > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, выполняется неравенство

$$\int_a^b |x(t)y(t)|dt \le \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

*Теорема 1.3 (неравенство Минковского для интеграла).** Для любых непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $x = x(t), y = y(t)$ и любых p и q таких, что $p \geq 1$ выполняется неравенство

$$\left(\int_a^b |x(t) + y(t)|^p dt\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Теорема 1.4 (дискретное неравенство Гельдера). Пусть $p > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Если числовые ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q$$

сходятся, то справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{1/q}$$

Теорема 1.5 (дискретное неравенство Минковского). Пусть $p \geq 1$. Если числовые ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p$$

сходятся, то справедливо неравенство

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\right)^{1/p}$$

1.4. Дальнейшие примеры метрических пространств и сходимости в них.

Пример 1.8. Охарактеризовать сходимость в пространствах: 1) R_n; 2) $C[a, b]$.

Задача 1.5. Показать, что сходимость в пространстве всех числовых последовательностей ***s*** эквивалентна покоординатной сходимости.

Определение 1.16. Метрики d и ρ метрических пространств (X, d) и (X, ρ) называются эквивалентными, если

$$\exists \alpha, \beta > 0 : \forall x_1, x_2 \in X \quad \alpha\rho(x_1, x_2) \le d(x_1, x_2) \le \beta\rho(x_1, x_2).$$

Утверждение 1.4. Если в метрических пространствах (X, d) и (X, ρ) метрики эквивалентны, то пространства (X, d) и (X, ρ) гомеоморфны.

Утверждение 1.5. Если в метрических пространствах (X, d) и (X, ρ) метрики эквивалентны, то сходимость последовательности $\{x_n\}$ по одной метрике влечет сходимость и по другой к одному и тому же элементу.

Утверждение 1.6. В n-мерном пространстве следующие метрики эквивалентны:

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} (p \geq 1),$$

$$d_\infty(x, y) = \max_k |x_k - y_k|$$

Пример 1.9. l_p $(1 \leq p < \infty)$ – пространство всех числовых последовательностей $x = \{x_k\}$, для которых сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$. Метрика в этом случае определяется так:

$$d(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{1/p}$$

Пример 1.10. $l_\infty = m$ - пространство ограниченных числовых последовательностей с метрикой

$$d(x, y) = \sup |x_k - y_k|$$

Пример 1.11. c_0 - пространство сходящихся к нулю последовательностей с той же метрикой, что и в m.

Пример 1.12. Пусть $X = l_p$. В l_p сходимость по координатам не влечёт сходимости последовательности точек в l_p.

Пример 1.13. Выяснить в каких из пространств $m, l_p\ (p \geq 1), s$ сходятся последовательности:

$$1)\ x_n = \{1, 2, \dots, n, 0, 0, \dots\};$$

$$2)\ x_n = \Big\{\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \text{ раз}}\ 0, 0, \dots\Big\};$$

$$3)\ x_n = \Bigg\{\underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}}_{n \text{ раз}}, 0, 0, \dots\Bigg\};$$

$$4)\ x_n = \Bigg\{\underbrace{\frac{1}{n^\alpha}, \frac{1}{n^\alpha}, \dots, \frac{1}{n^\alpha}}_{n \text{ раз}}, 0, 0, \dots\Bigg\}.$$

1.5. Полные метрические пространства.

Определение 1.17. Последовательность $x_n \in X$ называется *фундаментальной* последовательностью, если для $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, N\colon \; d(x_n, x_m) < \varepsilon$, если $n, m \in N$.

Лемма 1.5 (о сходимости последовательностей). Пусть $\{x_\mathrm{n}\}$ – последовательность из метрического пространства X. Следующие условия эквивалентны:

1. $\{x_\mathrm{n}\}$ – сходится к x;

2. Любая подпоследовательность $\{x_\mathrm{n}\}$ сходится x;

3. Для любой подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ существует подпоследовательность $\{x_{n_{k_i}}\}$ сходящаяся к x;

4. $\{x_\mathrm{n}\}$ – фундаментальная и любая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится к x;

5. $\{x_\mathrm{n}\}$ – фундаментальная и существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящаяся к x

Определение 1.18. Метрическое пространство X называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность в этом пространстве сходится к элементу этого пространства.

Пример 1.14. R_n

Пример 1.15. C[0, 1].

Пример 1.16. $$x_n(t) = \begin{cases} 0, t \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right], \\ \frac{n\left(t - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)}{2}, t \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \\ 1, t \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

Определение 1.19. Пусть дано метрическое пространство (X, d) и последовательность замкнутых шаров $S[x_k, r_k]$. Такая система шаров называется *вложенной*, если:

1. $S[x_1, r_1] \supset S[x_2, r_2] \supset \ldots$;

2. $r_n = 0$.

Теорема 1.6 (Критерий полноты пространства). X - метрическое пространство является полным тогда и только тогда, когда любая вложенная система шаров в X имеет не пустое пересечение (существует единственная точка принадлежащая каждому шару системы).