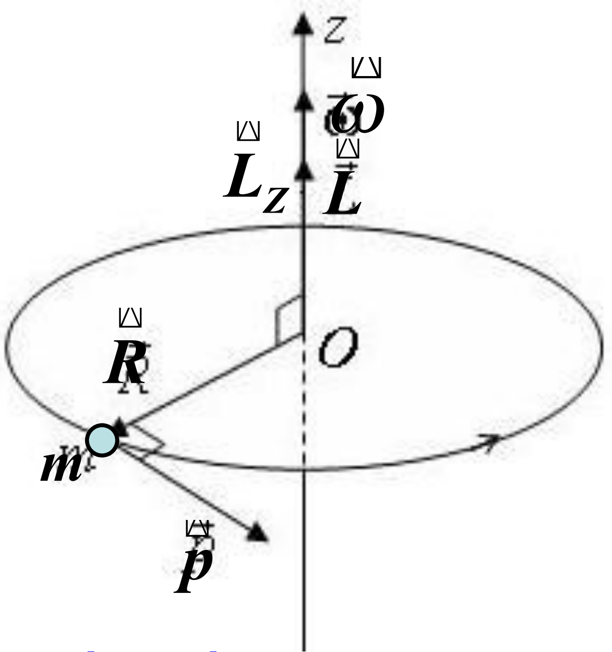
Момент инерции материальной точки относительно оси, перпендикулярной плоскости её обращения



МТ движется по окружности в плоскости, перпендикулярной оси (*z*), проходящей через цент окружности.

Момент импульса МТ относительно точки *O* :

$$\vec{L}_Z = [\vec{R} \times \vec{p}]$$

Проекция момента импульса на ось z

$$L_z = \left|\vec{L}_z\right| = Rp\sin\frac{\pi}{2} = Rm\upsilon = Rm\omega R = mR^2\omega$$

$I_z = mR^2$ **- момент инерции материальной точки относительно оси *z*.**

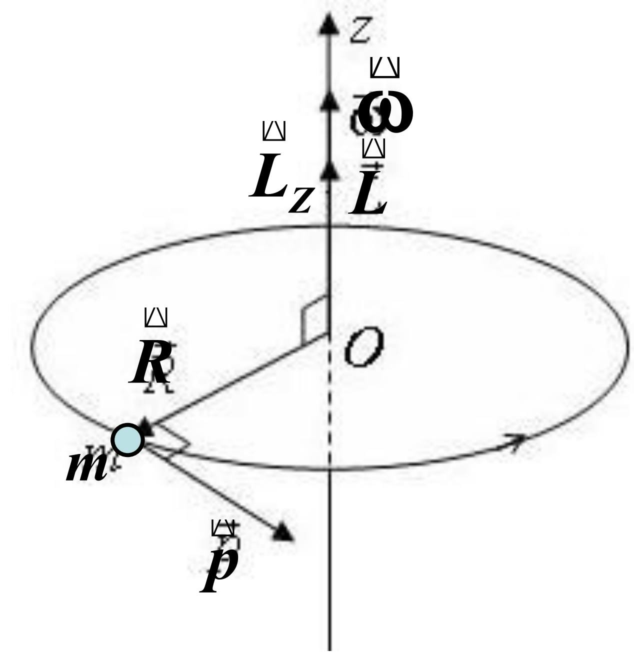
Момент инерции материальной точки относительно оси – это величина, равная произведению массы материальной точки на квадрат расстояния до оси вращения.

Момент инерции материальной точки относительно оси, перпендикулярной плоскости её обращения

$$I_z = mR^2$$

$$L_z = mR^2\omega = I_z\omega$$

$$L_z = I_z\omega$$

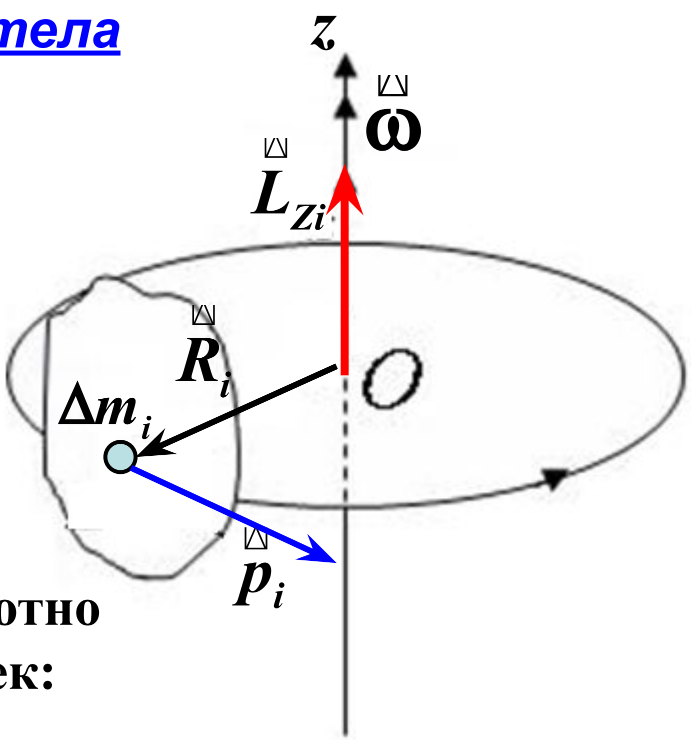


В векторной форме:

$$\boxed{\vec{L}_z = I_z\vec{\omega}}$$

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$$

Момент инерции абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси



Тело как совокупность *N* материальных точек

Δm_i – масса *i* -ой МТ, R_i – расстояние от *i* -ой МТ до оси

Момент импульса относительно оси для абсолютно твердого тела, как системы материальных точек:

$$\vec{L}_z = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_{zi} = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i R_i^2 \vec{\omega} = \vec{\omega} \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i R_i^2 = I_z \vec{\omega}$$

$$I_z = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i R_i^2$$

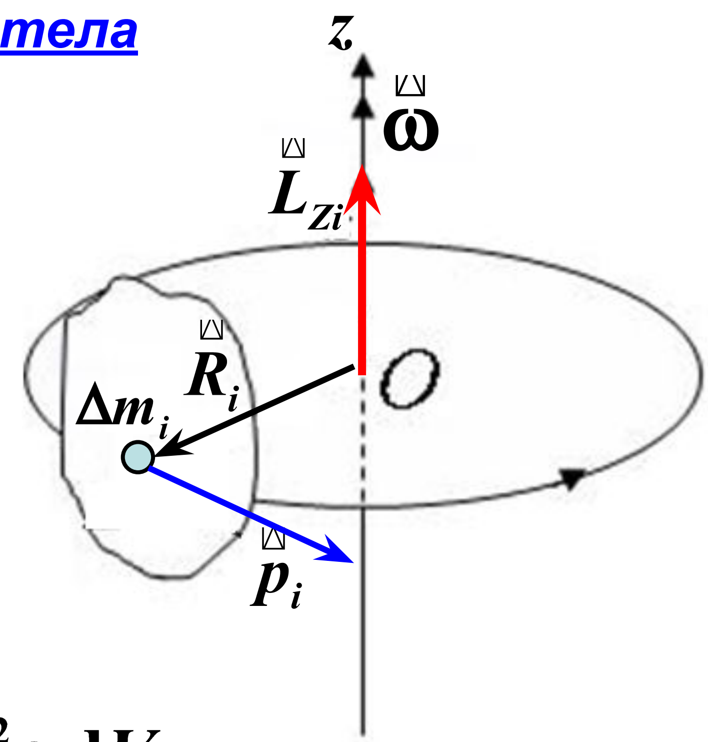
момент инерции абсолютно твердого тела относительно оси *z*

I_z зависит от: 1) массы материальных точек (тела);

2) распределения масс в теле относительно оси (R_i);

3) выбора оси.

Момент инерции абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси



Выражение для момента инерции абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси в интегральном виде

$$\Delta m_i \Longrightarrow \mathrm{d}m \qquad R_i \Longrightarrow r$$

$$I_z = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i R_i^2 \Longrightarrow I_z = \int_m r^2 \mathrm{d}m = \int_V r^2 \rho \, \mathrm{d}V$$

ρ - плотность

Для однородного по объему тела $\rho = const$

$$I_z = \rho \int_V r^2 \, \mathrm{d}V \Longleftarrow$$

Момент инерции твёрдого тела вычисляется интегрированием по объёму.

Момент инерции относительно неподвижной оси

Не абсолютно твердое тело

$$L_z = I_z\omega \Longrightarrow \omega = \frac{L_z}{I_z}$$

Момент инерции зависит от формы тела и может изменяться

Если $M_z = 0$, то $L_z = const$,
и при *изменении момента инерции*, *угловая скорость будет меняться*

$$I_z \downarrow \Leftrightarrow \omega \uparrow \qquad I_z \uparrow \Leftrightarrow \omega \downarrow$$

Примеры: фигурное катание и т. п.

Основное уравнение динамики вращательного движения

Рассмотрим абсолютно твердое тело, вращающееся относительно неподвижной оси.

Момент импульса тела относительно оси

$$\vec{L}_z = I_z \vec{\omega}$$

Под действием внешних сил $\vec{L}_z$ **и** $\vec{\omega}$ **будут меняться.**

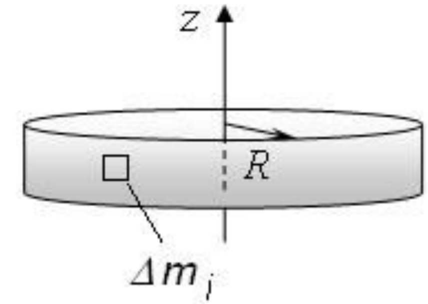
$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = I_z \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = \vec{M}_z \qquad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}_z}{I_z}} \qquad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

основное уравнение динамики вращательного движения

Примеры расчета момента инерции абсолютно твердого тела

1. Тонкое кольцо, полый тонкостенный цилиндр



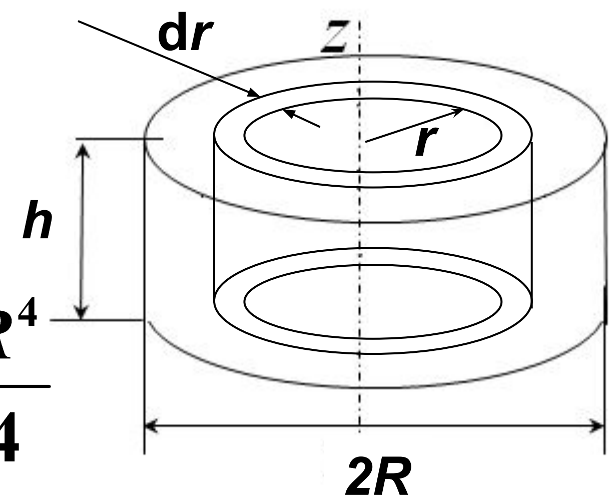
Найдём момент инерции относительно оси симметрии

$$I_z = \sum_i \Delta m_i r_i^2 = \sum_i \Delta m_i R^2 = R^2 \sum_i \Delta m_i = mR^2$$

$$\boxed{I_z = mR^2}$$

2. Однородный диск, сплошной цилиндр

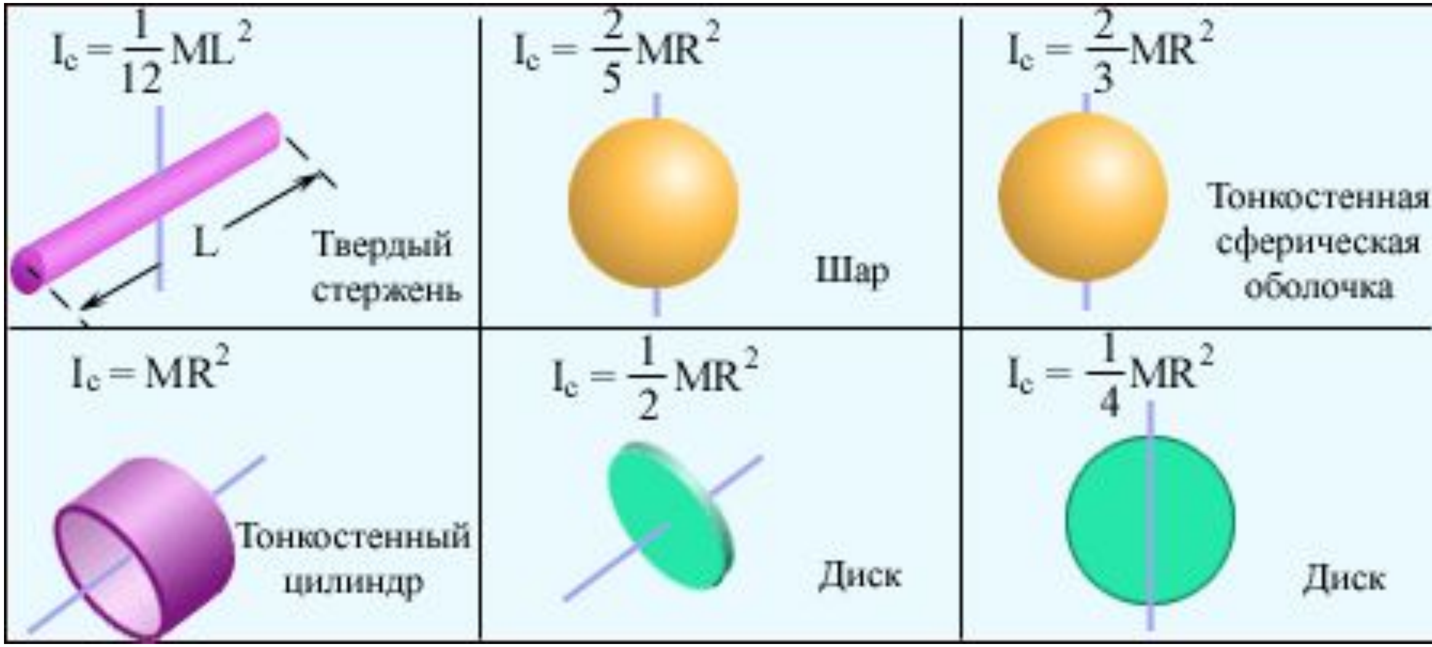
Найдём момент инерции относительно оси симметрии, проходящей через центр масс.



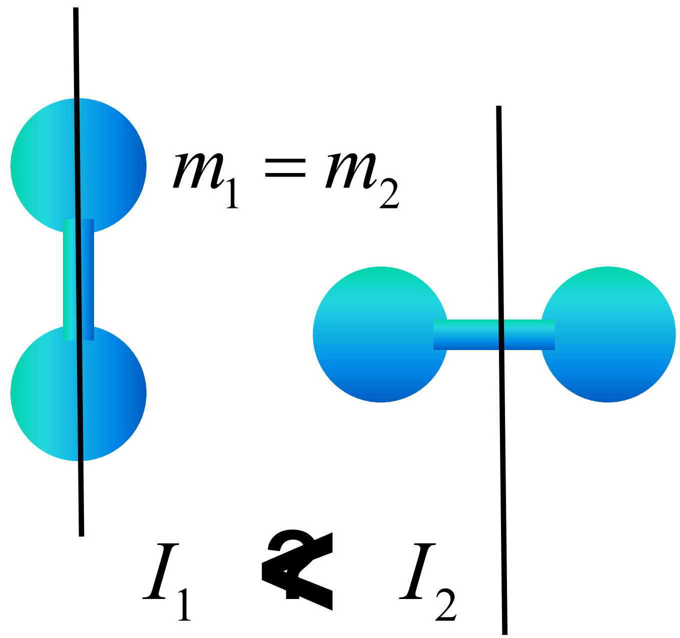
$$I_z = \rho \int_V r^2 \, dV \qquad dV = 2\pi r h dr \Longrightarrow$$

$$I_z = \rho \int_0^R r^2 2\pi r h dr = 2\pi h \rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi h \rho \frac{R^4}{4}$$

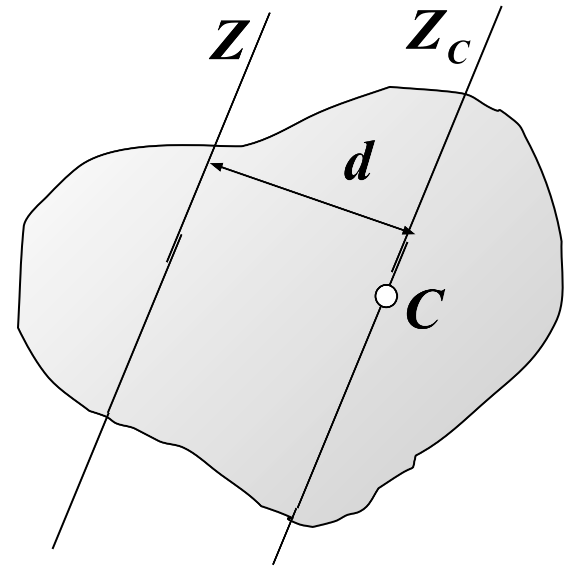
$$\pi R^2 \cdot h = V \quad V \cdot \rho = m \Longrightarrow \boxed{I_z = \frac{mR^2}{2}}$$



$$I_z = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i R_i^2$$



Теорема Штейнера



Момент инерции тела относительно произвольной оси Z равен сумме момента инерции этого тела относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс этого тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями

$$I_Z = I_C + md^2$$

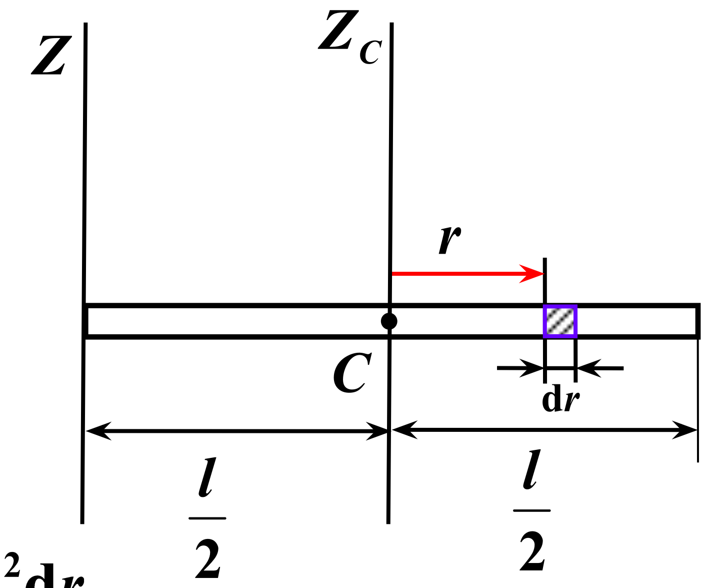
I_z – искомый момент инерции тела относительно оси Z;

I_C - момент инерции тела относительно оси , параллельной оси Z и проходящей через центр масс тела – точку C ;

d – расстояние между осями;

m – масса тела

Момент инерции однородного стержня.



1. *Момент инерции стержня относительно оси Z_C, перпендикулярной стержню и проходящей через его центр (центр масс).*

Разобьем стержень на элементарные участки длиной d*r*.

$$\rho = \frac{m}{l} \Rightarrow \quad dm = \rho dr \qquad dI_c = r^2 dm = \rho r^2 dr$$

$$I_c = 2\int_0^{l/2} dI_C = 2\rho \int_0^{l/2} r^2 dr = 2\rho \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^{l/2} = 2\rho \frac{l^3}{24} = \frac{ml^2}{12}$$

$$\boxed{I_C = \frac{1}{12} ml^2}$$

2. *Момент инерции относительно оси Z, проходящей через конец стержня параллельной оси Z_C.*

Согласно теореме Штейнера

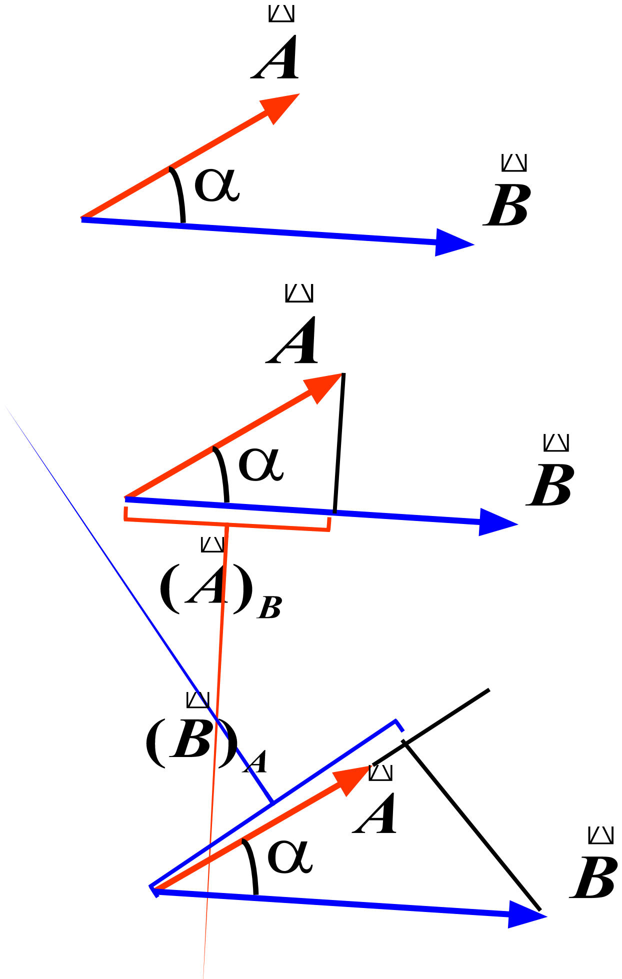
$$I_Z = I_C + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}$$

$$\boxed{I_Z = \frac{1}{3} ml^2}$$

РАБОТА. ЭНЕРГИЯ

Работа силы. Мощность

Скалярное произведение векторов

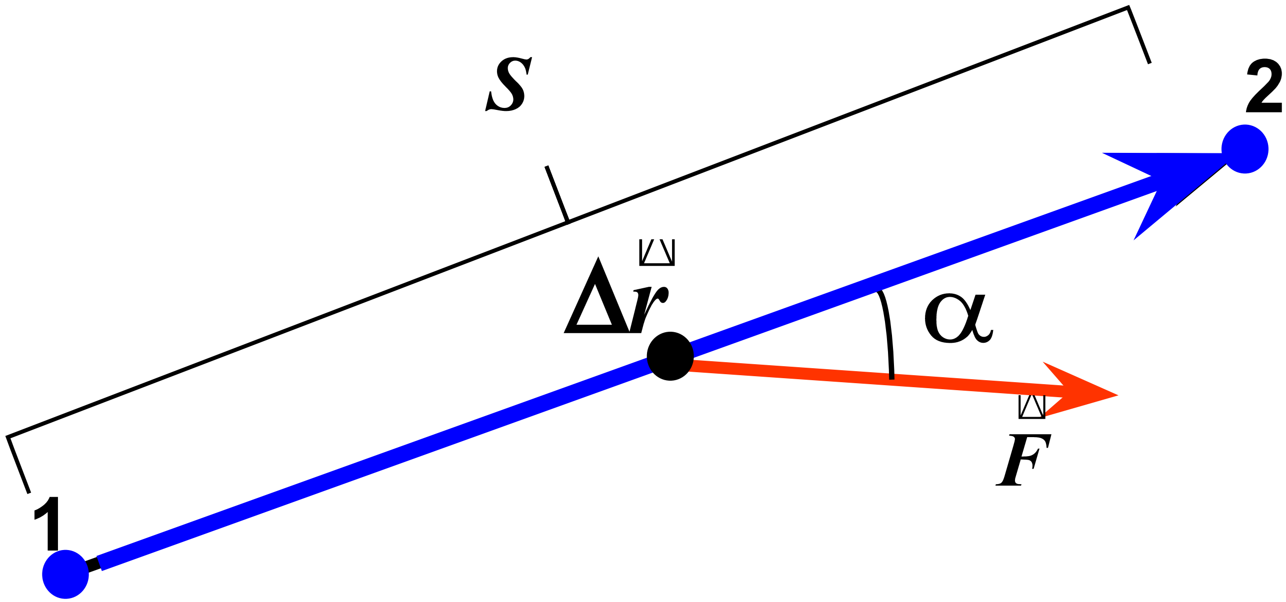


$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = A\,B\cos\alpha}$$

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = (\vec{A})_B\,B = A_B\,B}$$

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = A(\vec{B})_A = A\,B_A}$$

Работа **силы, если сила постоянна**

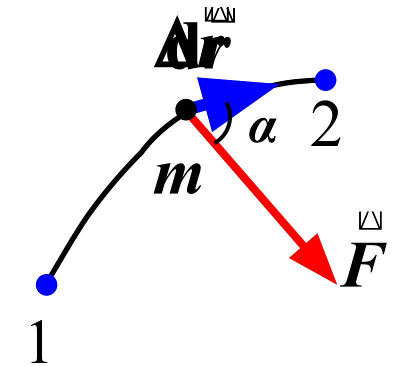


$$A = F \cdot S \cdot \cos\alpha = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

Работа ΔA силы $\vec{F}$ на перемещении $\Delta\vec{r}$:

скалярное произведение

$$\Delta A \cong \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos\alpha$$



Можно представить ΔA в виде

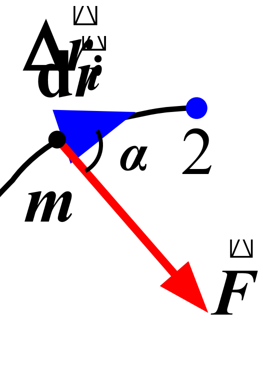
$$\Delta A \cong F \cdot \Delta r_F = F_{\mathrm{d}r} \cdot \Delta r$$

проекция Δr на направление вектора $\vec{F}$

Проекция $\vec{F}$ на направление вектора $\Delta\vec{r}$

Работа силы а пути 1−2

$$\Delta A_i \cong \vec{F}\Delta\vec{r}_i$$



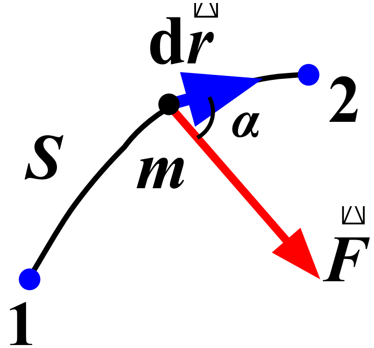
$$A = \sum_{i=1}^{N}\Delta A_i \cong \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\Delta\vec{r}_i$$

$$A = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\Delta A_i = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\Delta\vec{r}_i = \int_{(1)}^{(2)}\vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r}$$

линейный интеграл

Работой силы $\vec{F}$ **при перемещении материальной точки из точки (1) в точку (2) называется:**

Работа силы а пути 1−2



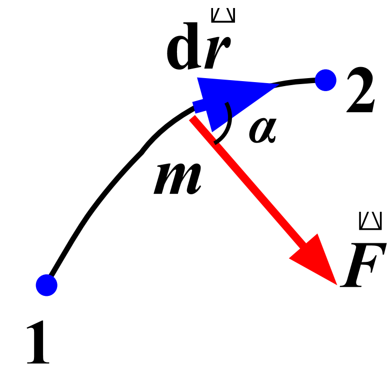
$$A = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{(1)}^{(2)} F_r\, dr = \int_{(1)}^{(2)} F_s\, ds = \int_{S} F_s\, ds$$

$$dr = ds$$

Длина элементарного перемещения

Длина элементарного пути

Элементарная работа **dA силы** $\vec{F}$ **на элементарном перемещении** $\mathrm{d}\vec{r}$ **:**



$$\mathrm{d}A = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = F \cdot \mathrm{d}r \cdot \cos\alpha = F \cdot \mathrm{d}r_F$$

$$= F_{\mathrm{d}r} \cdot \mathrm{d}r = F_s \cdot \mathrm{d}s$$

Мощность

Мощность **характеризует быстроту с которой совершается работа:**

$$P = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}$$

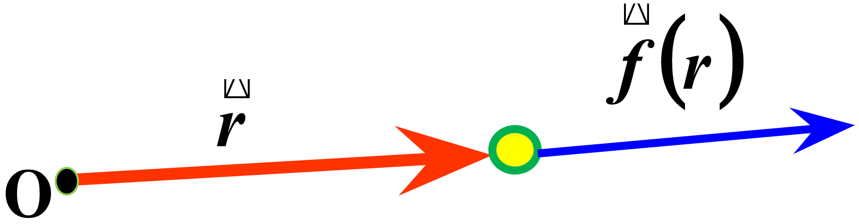
Размерность работы: $[A]=[F]L=MLT^{-2}*L=ML^2T^{-2}$

Единица измерения работы в системе СИ: Дж = кг*м^2/сек^2

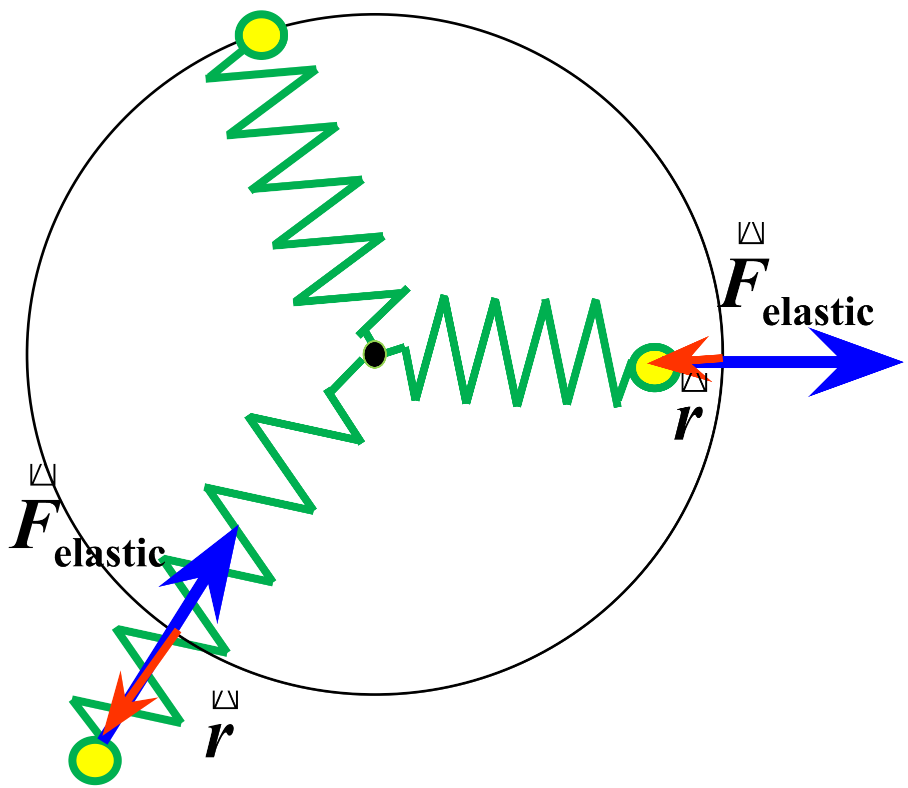
Размерность мощности: $[P]=[A]T^{-1}=ML^2T^{-3}$

Единица измерения мощности в системе СИ: Вт= Дж /с = кг*м^2/сек^3

Работа центральной силы

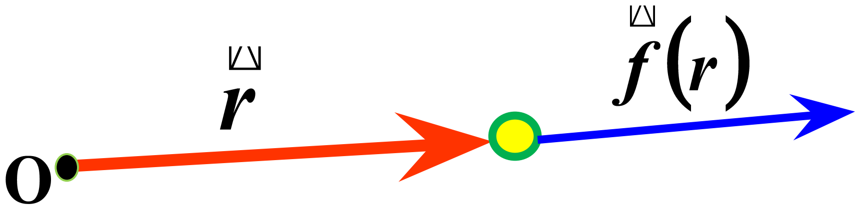


Сила упругости



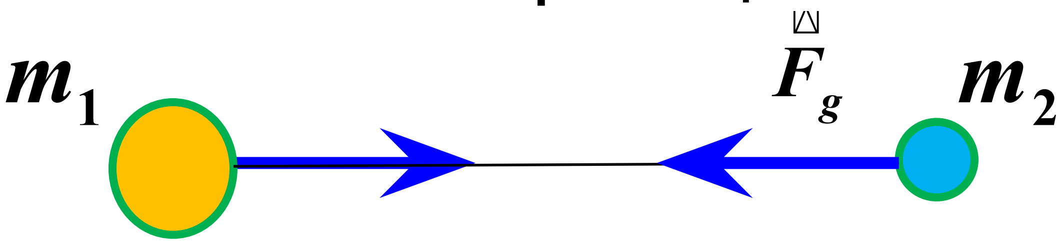
$$\vec{F}_{elastic} = -k\vec{r}$$

Работа центральной силы

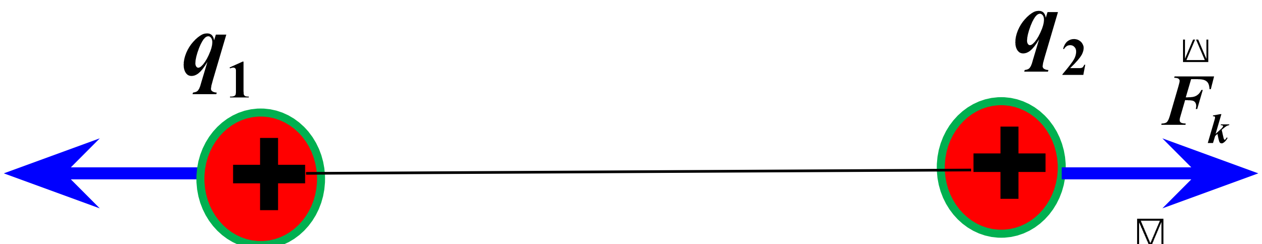


$$\vec{F}_g = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$$

Сила гравитации

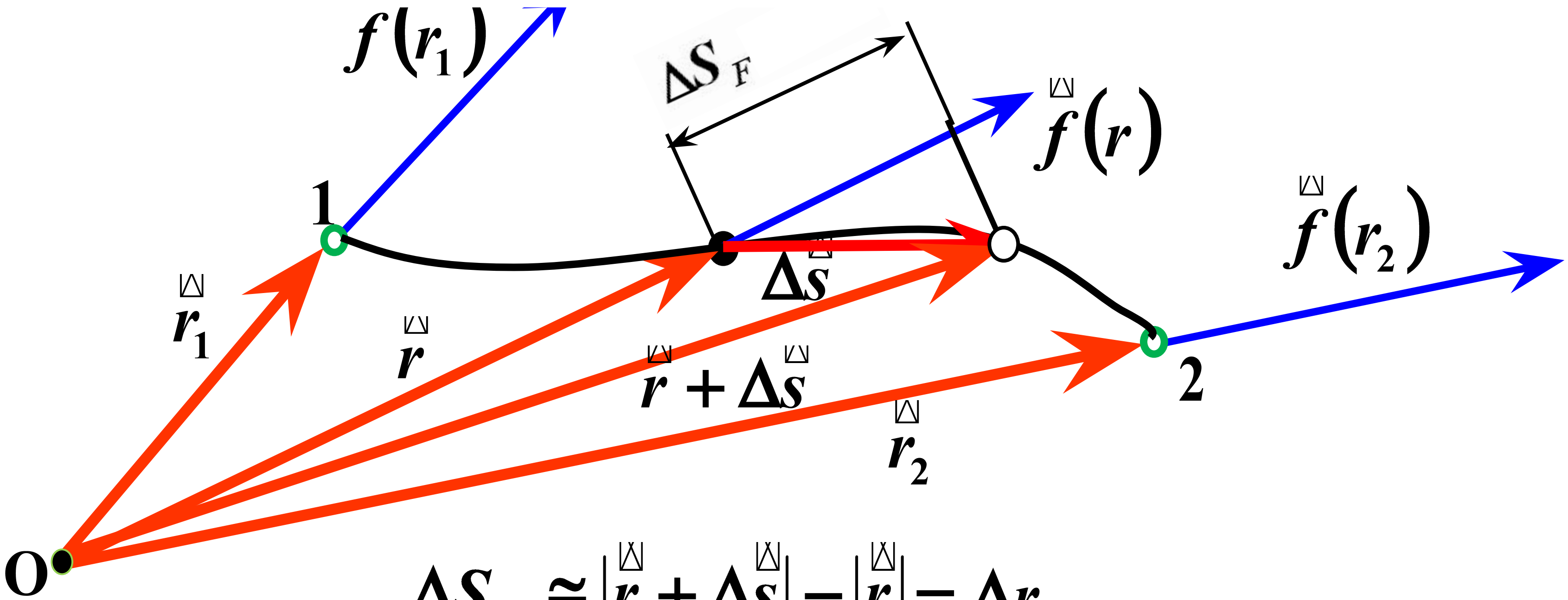


Сила Кулона



$$\vec{F}_K = k\frac{q_1\cdot q_2}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$$

Работа центральной силы



$$\Delta S_F \cong \left|\vec r + \Delta\vec s\right| - \left|\vec r\right| = \Delta r$$

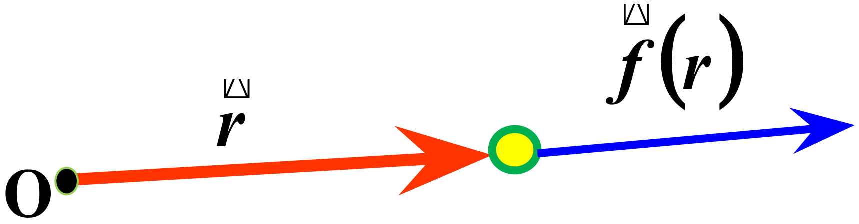
$$\Delta A \cong \vec f(r)\cdot\Delta\vec S = f(r)\cdot\Delta S_F \cong f(r)\cdot\Delta r$$

$$A = \sum \Delta A_i \cong \sum_{r=r_1}^{r=r_2} f(r_i)\cdot\Delta r_i$$

$$A = \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum_{r=r_1}^{r=r_2} f(r_i)\Delta r_i = \int_{r_1}^{r_2} f(r)\,\mathrm{d}r$$

обычный интеграл

Работа центральной силы



$$A = \int_{r_1}^{r_2} f(r)\,\mathrm{d}r$$

Работа центральных сил *не зависит от траектории*, по которой движется материальная точка, а *зависят от начального и конечного положения* материальной точки.

Сила, работа которой зависит от начального и конечного положения материальной точки и не зависит от вида траектории, называется *<u>потенциальной (консервативной)</u>* силой. Следовательно, силы упругости, гравитации и кулоновского взаимодействия *являются консервативными силами*.

Работа силы гравитации

$$A = \int_{r_1}^{r_2} f(r)\,\mathrm{d}r$$

$$\vec{F}_g = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$$

$G = 6,67\cdot 10^{-11}$ м³/(кг с²)

$$A_g = \int_{r_1}^{r_2} F_g(r)\,\mathrm{d}r = \int_{r_1}^{r_2}\left(-G\frac{m_1 m_2}{r^2}\right)\mathrm{d}r =$$

$$= G\frac{m_1 m_2}{r}\bigg|_{r_1}^{r_2} = -G\frac{m_1 m_2}{r_1} - \left(-G\frac{m_1 m_2}{r_2}\right)$$

Работа силы Кулона

$$A = \int_{r_1}^{r_2} f(r)\,\mathrm{d}r$$

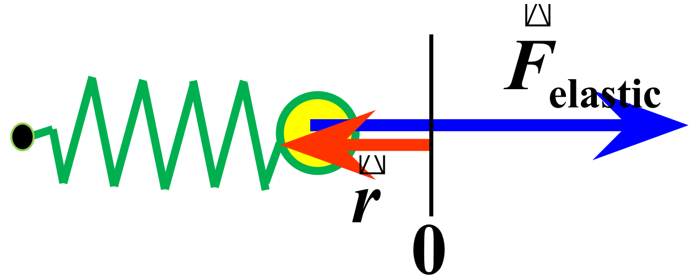
$$\vec{F}_K = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r} \qquad k = 9\cdot 10^9 \text{ Н·м}^2/\text{Кл}^2$$

$$A_K = \int_{r_1}^{r_2} F_K(r)\,\mathrm{d}r = \int_{r_1}^{r_2} k\frac{q_1 q_2}{r^2}\,\mathrm{d}r =$$

$$= -k\frac{q_1 q_2}{r}\Bigg|_{r_1}^{r_2} = k\frac{q_1 q_2}{r_1} - k\frac{q_1 q_2}{r_2}$$

Работа силы упругости

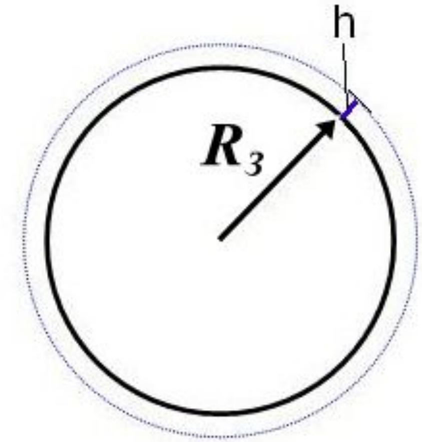
$$A = \int_{r_1}^{r_2} f(r)\,\mathrm{d}r \qquad \vec{F}_{elastic} = -k\vec{r}$$



$$A_{elastic} = \int_{r_1}^{r_2} F_{elastic}(r)\,\mathrm{d}r = -\int_{r_1}^{r_2} k\,r\,\mathrm{d}r =$$

$$= -k\frac{r^2}{2}\Bigg|_{r_1}^{r_2} = k\frac{r_1^{\,2}}{2} - k\frac{r_2^{\,2}}{2}$$

Работа силы тяжести (работа в однородном поле)



$$\left|\vec{F}_g\right| = F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

сила тяжести

Вблизи поверхности Земли h<<R

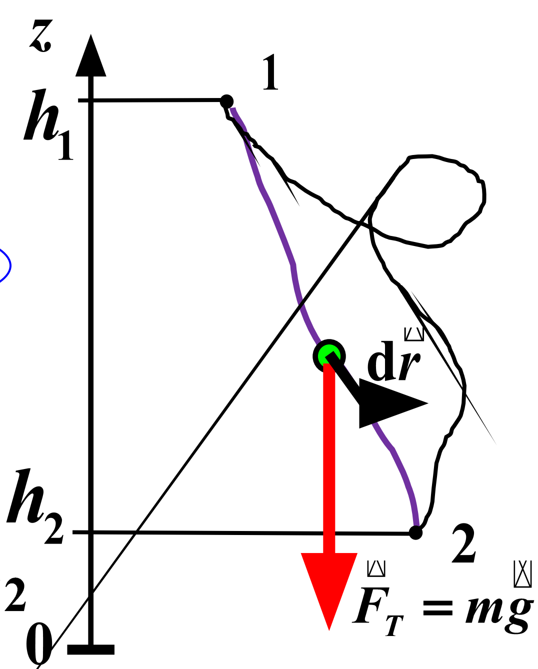
$$F_g \approx \underbrace{G\frac{M_З}{R_З^2}}_{=g} m = gm \equiv F_т = const(h)$$

Элементарная работа силы тяжести на элементарном перемещении $d\vec{r}$

$$dr_F = -dz$$

$$dA_T = \vec{F}_T d\vec{r} = F_T dr_F = -F_T dz = -mg\,dz$$

$$A_T = \int_{h_1}^{h_2} (-mg)\,dz = -mg\int_{h_1}^{h_2} dz = mgh_1 - mgh_2$$

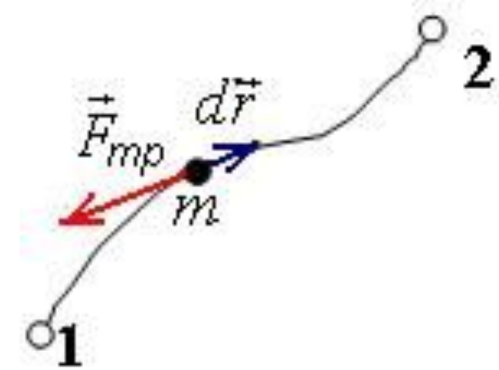


Сила тяжести – консервативная сила

Не зависит от траектории

Работа силы трения

Сила трения: **Сила, возникающая при относительном перемещении соприкасающихся тел и направленная в сторону, противоположную относительному перемещению.**

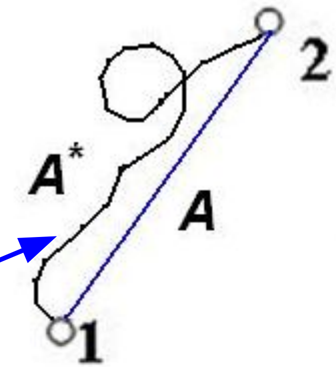


Элементарная работа силы трения

$$dA_{friction} = \vec{F}_{friction} d\vec{r} = -F_{friction} dr = -F_{friction} dS$$

Работа силы трения при перемещении МТ из точки 1 в точку 2

$$A_{friction} = -\int_{(1)}^{(2)} F_{friction} dS$$



$A^* > A$

$$F_{friction} = const \longrightarrow A_{friction} = -F_{friction} \cdot \int_{(1)}^{(2)} dS = -F_{friction} S$$

Сила трения – неконсервативная

Диссипативная сила: **сила, работа которой сопровождается выделением теплоты, разрушением и т.п.**

Сила трения – диссипативная сила

Потенциальная энергия

Примеры потенциальных полей и работы сил этих полей

$$A_g = -G\frac{m_1 m_2}{r_1} - \left(-G\frac{m_1 m_2}{r_2}\right)$$

$$A_K = k\frac{q_1 q_2}{r_1} - k\frac{q_1 q_2}{r_2}$$

$$A_T = mgh_1 - mgh_2$$

$$A_{elastic} = \frac{kr_1^2}{2} - \frac{kr_2^2}{2}$$

Работа консервативной силы:

$$A_{\text{КС}} = W_{\text{п}1} - W_{\text{п}2}$$

Работа консервативной силы = **разность значений функции, зависящая от относительного положения взаимодействующих тел (или от координат тела в потенциальном поле).**

Обозначим эти значения функции $W_{\text{п}1}$ и $W_{\text{п}2}$ и назовем их <u>потенциальными энергиями взаимодействия</u>.

Потенциальная энергия

$$A_{kc} = W_{n1} - W_{n2} = -\Delta W_n$$

Работа консервативной силы равна взятому со знаком минус изменению потенциальной энергии тела.

$$A_{kc} = W_{n1} - W_{n2} = -\Delta W_n$$

$$A_{kc} = (W_{n1} + C) - (W_{n2} + C) = -\Delta W_n$$

$$A_g = -G\frac{m_1 m_2}{r_1} - \left(-G\frac{m_1 m_2}{r_2}\right) \Longrightarrow W_g = -G\frac{m_1 m_2}{r} + C$$

$$A_k = k\frac{q_1 q_2}{r_1} - k\frac{q_1 q_2}{r_2} \Longrightarrow W_k = k\frac{q_1 q_2}{r} + C$$

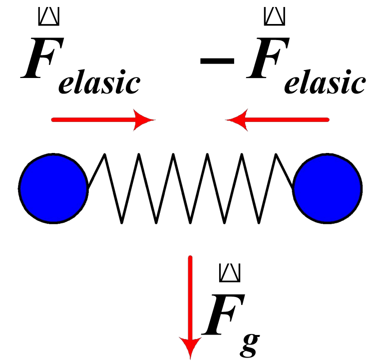
$$A_T = mgh_1 - mgh_2 \Longrightarrow W_T = mgh + C$$

$$A_{elastic} = \frac{kr_1^2}{2} - \frac{kr_2^2}{2} \Longrightarrow W_{elastic} = \frac{k \cdot r^2}{2} + C$$

Потенциальная энергия системы в данном ее положении численно равна работе, которую совершают действующие на систему консервативные силы при перемещении системы из этого положения в то, где потенциальная энергия условно принимается равной нулю.

Потенциальная энергия системы МТ

Потенциальная энергия - часть механической энергии системы, зависящая от взаимного расположения материальных точек, составляющих эту систему, и от их положения во внешнем силовом поле.



$W_{n\ ik}$ – **потенциальная энергия взаимодействия** i**-й МТ с** k**-й МТ.**

$\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} W_{n\,ik}$ – **потенц. энергия взаимодействия** i**-й МТ со всеми МТ системы.**

$\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} W_{n\,ik}$ – **полная потенциальная энергия взаимодействия МТ друг с другом**

$W_{n\ i}$ – **потенц. энергия взаимодействия** i**-й МТ с внешними телами (полями).**

$\sum\limits_{i=1}^{N} W_{n\,i}$ – **полная потенциальная энергия взаимодействия системы с внешними телами (полями)**

$$W_n = \sum_{i=1}^{N} W_{n\ i} + \frac{1}{2}\sum_{i-1}^{N}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} W_{n\ ik}$$

– **полная потенциальная энергия системы МТ**

Потенциальная энергия <u>системы</u> МТ

Взаимодействие с внешними телами (полями)

Взаимодействие между МТ системы

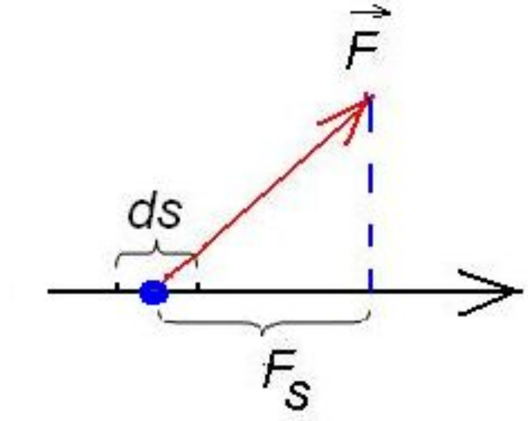
$$W_n = \sum_{i=1}^{N} W_{n\,i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} W_{n\,ik}$$

Изменение потенциальной энергии системы МТ

$$A_{кс} = W_{n1} - W_{n2} = -\Delta W_n$$

Работа всех консервативных сил (*включая внутренние*), действующих на систему, равна взятому со знаком минус изменению потенциальной энергии системы.

Связь консервативной силы с потенциальной энергией тела



Работа консервативной силы на элементарном перемещении в произвольном направлении

$$\mathrm{d}A = F_s\,\mathrm{d}s$$

С другой стороны $\quad \mathrm{d}A = -\mathrm{d}W_n$

$$\Rightarrow \quad F_s\,\mathrm{d}s = -\mathrm{d}W_n$$

Проекция консервативной силы на произвольное направление

$$F_s = -\frac{\mathrm{d}W_n}{\mathrm{d}s}$$

В частности для проекций на оси координат

$$F_x = -\frac{\partial W_n(x,y,z)}{\partial x};\quad F_y = -\frac{\partial W_n(x,y,z)}{\partial y};\quad F_z = -\frac{\partial W_n(x,y,z)}{\partial z}$$

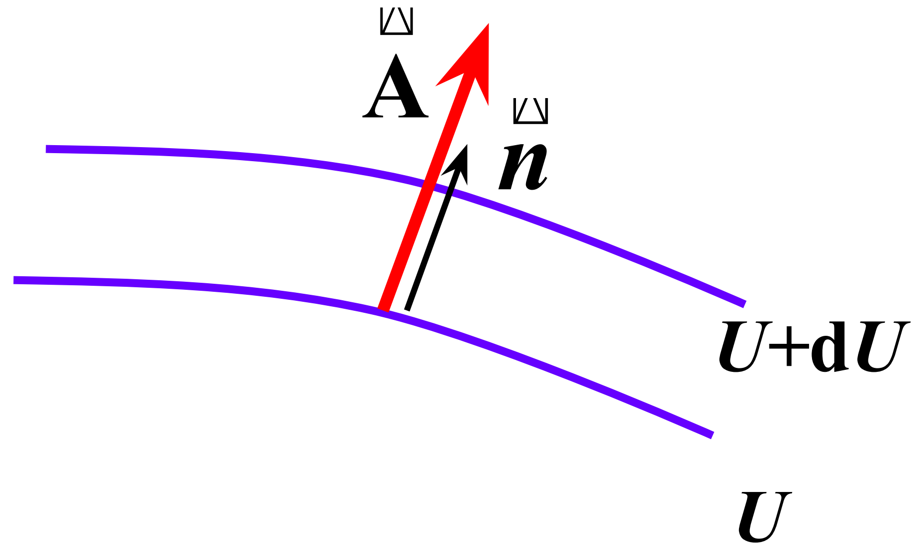
$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = -\left(\frac{\partial W_n}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial W_n}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial W_n}{\partial z}\vec{k}\right) = -\mathrm{grad}\,W_n$$

$$\boxed{\vec{F} = -\mathrm{grad}\,W_n}$$

$$\vec{A} = \mathrm{grad}\,U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

Вектор, направленный по нормали к эквипотенциальной поверхности

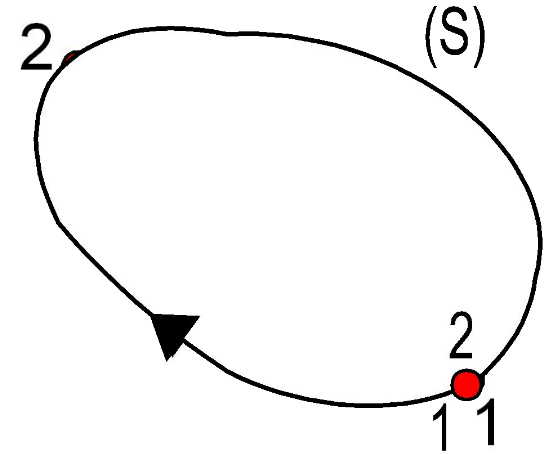
Эквипотенциальная поверхность – поверхность, на которой скалярная функция (потенциальная энергия) остаётся постоянной.



В направлении нормали к эквипотенциальной поверхности (т.е. в направлении градиента) скалярная функция меняется наиболее быстро.

Работа консервативных сил по замкнутому пути

$$A_{\text{к.с.}} = \int_{(1)}^{(2)} F_s \mathrm{d}s = W_{п1} - W_{п2}$$



Если точки 1 и 2 совпадают → **Замкнутая траектория**

$$A_{k.c.} = \oint_{(s)} F_s \mathrm{d}s = W_{п1} - W_{п1} = 0$$

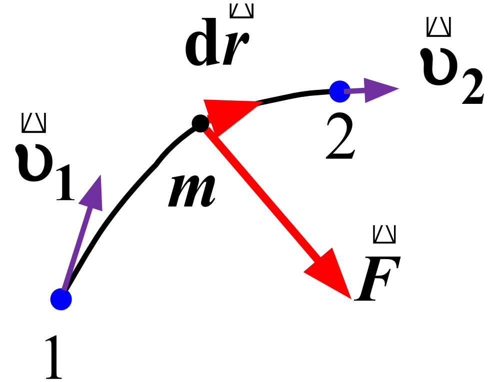
Работа потенциальных сил по замкнутому пути равна нулю.

$$A_{k.c.} = \oint_{(s)} F_s \mathrm{d}s = \oint_{(s)} \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = 0$$

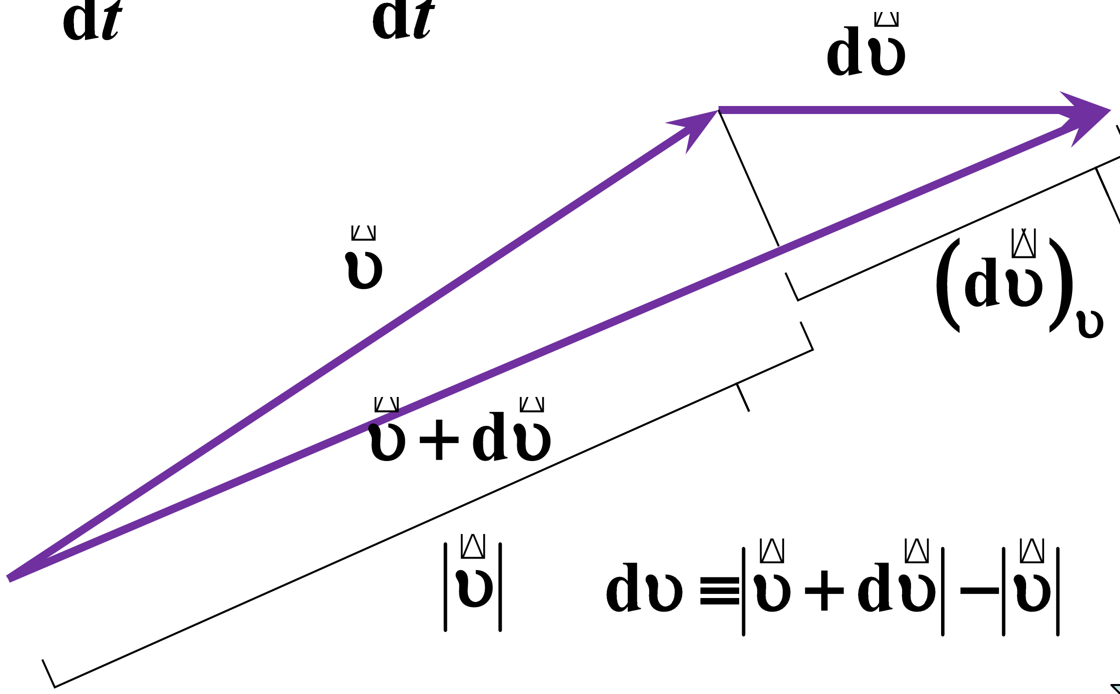
Циркуляция вектора по контуру

Циркуляция вектора консервативной силы по контуру равна нулю.

Кинетическая энергия материальной точки



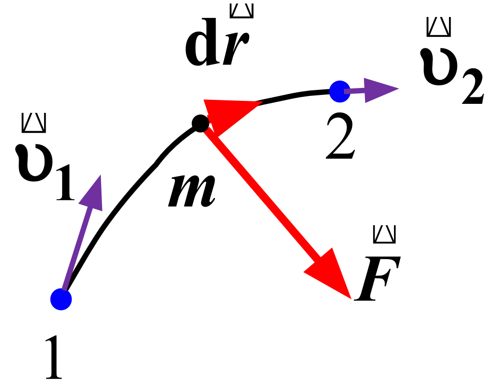
$$dA = \vec{F}d\vec{r} = \frac{d\vec{p}}{dt}d\vec{r} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}d\vec{r} = m\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon} = m\upsilon(d\vec{\upsilon})_{\upsilon} = m\upsilon d\upsilon$$



$$d\upsilon \equiv |\vec{\upsilon}+d\vec{\upsilon}| - |\vec{\upsilon}| = (d\vec{\upsilon}$$

$$(d\vec{\upsilon})_{\upsilon} = d\upsilon$$

Кинетическая энергия материальной точки



$$\mathrm{d}A = \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}\vec{r} = m\,\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}\vec{r} = m\vec{\upsilon}\,\mathrm{d}\vec{\upsilon} = m\upsilon(\mathrm{d}\vec{\upsilon})_{\upsilon} = m\upsilon\,\mathrm{d}\upsilon$$

*Работа **результирующей** всех сил, при перемещении м.т. из (1) в (2)*

Кинетическая энергия

$$A_{\mathrm{F}} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{(1)}^{(2)} m\upsilon\,\mathrm{d}\upsilon = \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} m\upsilon\,\mathrm{d}\upsilon = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2}$$

$$A = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2}$$

Изменение кинетической энергии МТ равно работе результирующей всех сил, действующих на МТ (*теорема об изменении кинетической энергии МТ*).

Кинетическая энергия поступательного движения системы материальных точек

Система *N* материальных точек

Кинетическая энергия i-ой МТ W_K^i

$$W_K = \sum_{i=1}^{N} W_K^i = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \upsilon_i^2}{2}$$

Суммарная кинетическая энергия

Работа всех сил: внешних и сил взаимодействия с другими МТ системы

Теорема об изменении кин.энергии МТ: $A^i = W_{K2}^i - W_{K1}^i$

$A \quad W_{K2} \quad W_{K1}$

Просуммируем обе части уравнения по всем МТ: $\sum_{i=1}^{N} A^i = \sum_{i=1}^{N} W_{K2}^i - \sum_{i=1}^{N} W_{K1}^i$

$$\Longrightarrow \boxed{A = W_{K2} - W_{K1}}$$

Изменение кинетической энергии системы МТ равно работе всех сил, действующих на каждую МТ (как внутренних так и внешних).

Отличие от закона изменения импульса

Кинетическая энергия поступательного и вращательного движения <u>абсолютно твёрдого тела</u>

<u>Поступательное движение АТТ</u>

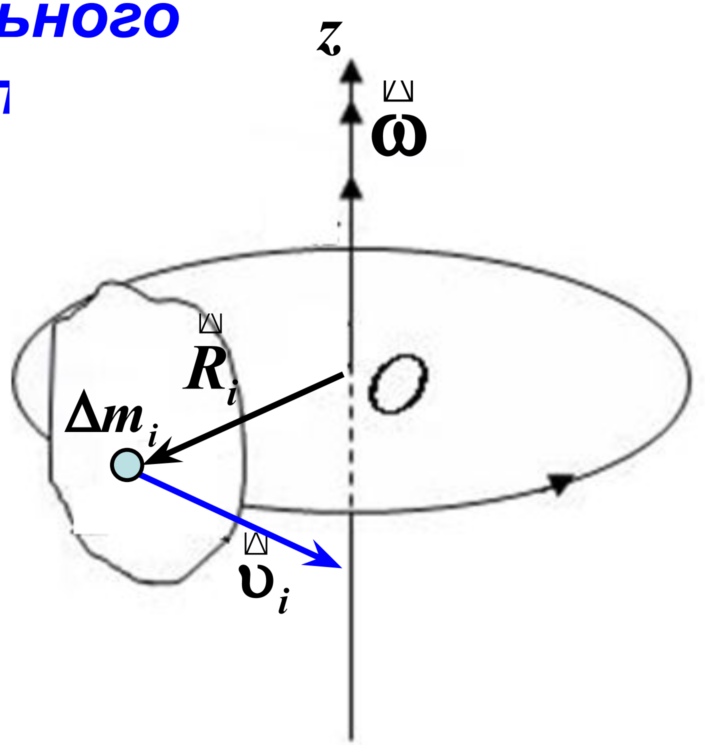
Разобьём тело массой m на кусочки с массами Δm_i **, которые можно считать материальными точками.**

$$W_k = \sum_i \frac{\Delta m_i \upsilon^2}{2} = \frac{\upsilon^2}{2}\sum_i \Delta m_i = \frac{m\upsilon^2}{2}$$

$$W_k = \frac{m\upsilon^2}{2}$$

Кинетическая энергия вращательного движения абсолютно твёрдого тел

АТТ вращается вокруг неподвижной оси z



Разобьём тело на маленькие фрагменты Δm_i

Кинетическая энергия тела равна сумме кинетических энергий его фрагментов

$$\upsilon = \omega R$$

$$W_k = \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta m_i \upsilon_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta m_i}{2} (\omega R_i)^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i R_i^2 = \frac{\omega^2 I_z}{2}$$

$$W_k = \frac{I_z \omega^2}{2} \quad \longleftrightarrow \quad W_k = \frac{m\upsilon^2}{2}$$

Вращательное движение — Поступательное движение

Работа при вращательном движении

$$A = W_{K2} - W_{K1} \quad \Rightarrow dA = dW_K$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = \frac{dW_K}{dt} = \frac{d\left(\dfrac{I_Z\omega^2}{2}\right)}{dt} = \frac{I_Z}{2}2\omega\frac{d\omega}{dt} = I_Z\omega\varepsilon$$

$$\omega\, dt = d\varphi$$

$$I_Z\varepsilon = M_Z$$

$$\Rightarrow dA = I_Z\varepsilon\,\omega\, dt = I_Z\varepsilon\, d\varphi = M_Z\, d\varphi$$

$$\int_{(1)}^{(2)} dA = \boxed{A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi}$$

$$A = \int_{(1)}^{(2)} F_s ds$$

Поступательное движение	Вращательное движение
m — Масса	I — Момент импульса
$\vec{v}$ — скорость	$\vec{w}$ — угловая скорость
$\vec{a}$ — ускорение	$\vec{\varepsilon}$ — угловое ускорение
$\vec{p}$ — импульс $\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{L}$ — момент импульса $\vec{L}_Z = \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\vec{R}_i \times \vec{v}_{\tau i}\right]$ $\vec{L}_Z = I_z \vec{w}$
$\vec{f}$ — сила	$\vec{M}$ — момент силы $\vec{M}_Z = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{R}_i \times \vec{f}_{\tau i}\right]$
$m\vec{a} = \vec{f}$	$I_z \vec{\varepsilon} = \vec{M}_z$
$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f}$	$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = \vec{M}_z$
$\frac{mv^2}{2}$ кинетическая энергия	$\frac{I w^2}{2}$
работа силы $A = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F} d\vec{r} = \int_{(1)}^{(2)} F_s ds$	работа момента сил $A = \int_{(1)}^{(2)} M_z \, d\varphi$

Закон сохранения полной механической энергии

Полная механическая энергия системы

=

сумма кинетических энергий тел, входящих в систему $\sum_{i=1}^{N} W_i^{кин}$

+

сумма потенциальных энергий, обусловленных их взаимодействием друг с другом и внешними телами (полями)

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} W_{ik}^{пот} + \sum_{i=1}^{N} W_i^{пот}$$

$$\boxed{W = W^{кин} + W^{пот} = \sum_{i=1}^{N} W_i^{кин} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} W_{ik}^{пот} + \sum_{i=1}^{N} W_i^{пот}}$$

Закон сохранения полной механической энергии

$$W = W^{кин} + W^{пот} = \sum_{i=1}^{N} W_i^{кин} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} W_{ik}^{пот} + \sum_{i=1}^{N} W_i^{пот}$$

$$\Delta W = ?$$

Теорема об изменении кинетической энергии для системы МТ

$$\Delta W^{кин} = A$$ – работа всех сил, приложенных к МТ системы

$$A = A_{к.с.} + A_{н.к.с.}$$

$$\Delta W^{кин} = A_{к.с.} + A_{н.к.с.}$$

По определению потенциальной энергии

$$A_{к.с.} = -\Delta W^{пот}$$

$$\Delta W = \Delta W^{кин} + \Delta W^{пот} =$$

$$= A_{к.с.} + A_{н.к.с.} - A_{к.с.} = A_{н.к.с.}$$

Закон сохранения полной механической энергии

$$\Delta W = \Delta W^{кин} + \Delta W^{пот} = A_{н.к.с.}$$

Что такое неконсервативные силы?

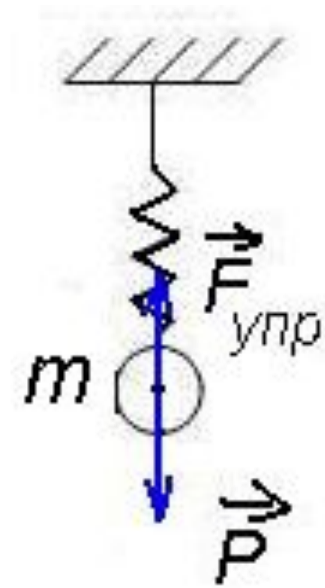
- Силы трения (диссипативные силы), действующие между телами системы
- Внешние неконсервативные силы, например, мускульная сила, силы со стороны каких-либо механизмов и т.п.
- Силы вихревых полей

В системе с одними только консервативными силами полная механическая энергия остаётся постоянной.

Закон сохранения полной механической энергии

Отличия законов сохранения импульса (момента импульса) и полной механической энергии:

1. Роль внешней силы



Чтобы сохранялся импульс, *результирующая внешняя сила должна быть равна 0*.

Полная механическая энергия *сохраняется при действии внешних консервативных сил.*

Примеры: тело на пружине, свободное падение

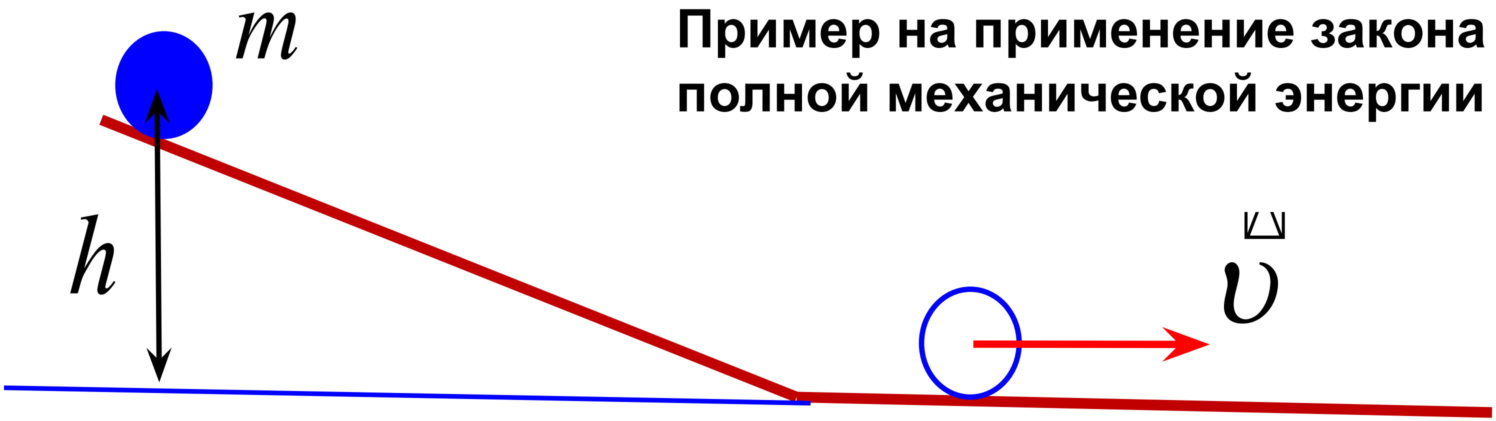
2. Роль диссипативных сил

Импульс сохраняется независимо от вида внутренних сил, в том числе, *это могут быть силы трения между телами системы*.

Полная механическая энергия *не сохраняется при действии сил трения (*она переходит в тепло, полная энергия сохраняется).

Пример: неупругие столкновения.

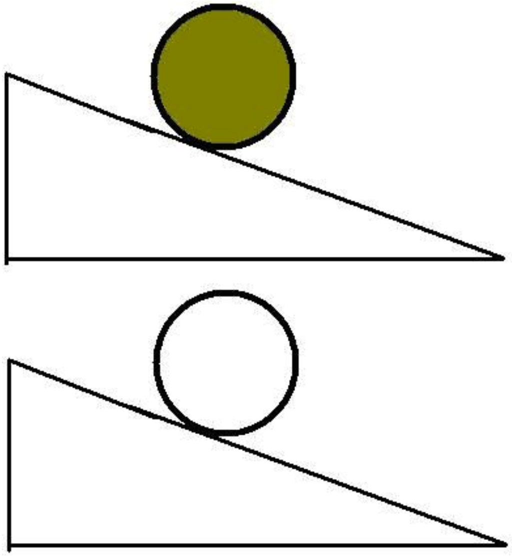
Пример на применение закона сохранения полной механической энергии



$$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I_z\omega^2}{2} \qquad \upsilon = \omega R$$

$$mgh = \frac{\upsilon^2}{2}\left(m + I_z\frac{1}{R^2}\right)$$

Пример на применение закона сохранения полной механической энергии



$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_z\omega^2}{2}$$

$$I_z^{полый} = mR^2; \quad I_z^{сплошной} = \frac{mR^2}{2}$$

Полый

$$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{2} = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{m\upsilon^2}{2} = m\upsilon^2 \Rightarrow \quad \upsilon = \sqrt{gh}$$

Сплошной

$$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{4} = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{m\upsilon^2}{4} = \frac{3}{4}m\upsilon^2 \Rightarrow \quad \upsilon = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

(1) скорость не зависит ни от массы, ни от радиуса цилиндра,

(2) скорость зависит от того, как распределена масса

Закон сохранения полной механической энергии

Согласно теореме Нётер (Эмми Нётер),

закон сохранения механической энергии является следствием **однородности времени**.

закон сохранения импульса — **однородности пространства**,

закон сохранения момента импульса — **изотропности пространства.**

Закон сохранения и превращения энергии

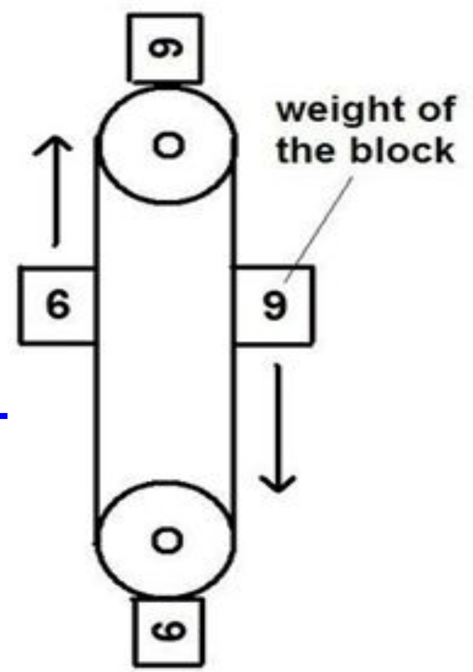
Диссипативные силы:

механическая энергия системы тел уменьшается

внутренняя энергии тел увеличивается (нагрев при трении) на ту же величину.

Виды энергии: механическая, внутренняя, электрическая, магнитная, ядерная и др.

Энергия не исчезает бесследно и не возникает из ничего, она превращается из одного вида энергии в другой, либо передается от одних тел к другим в эквивалентном количестве. При этом суммарное количество энергии остается постоянным.



Следствие закона сохранения и превращения энергии - невозможность создания «вечного двигателя».

Вопросы к коллоквиуму

1. Кинематика материальной точки.
2. Кинематика вращательного движения.
3. Законы Ньютона. Принцип относительности Галилея.
4. Постулаты специальной теории относительности А.Эйнштейна. Относительность одновременности, сокращение продольных размеров, замедление времени.
5. Второй закон Ньютона. Движение центра инерции.
6. Третий закон Ньютона. Закон изменения и сохранения импульса.
7. Момент импульса. Момент силы. Связь между ними.
8. Момент инерции. Моменты инерции тонкостенного кольца и сплошного цилиндра.
9. Теорема Штейнера. Применение для расчета МИ стержня относительно оси, проходящей через его конец.
0. Основное уравнение динамики вращательного движения.
1. Работа силы. Мощность.
2. Работа силы тяготения. Работа сил Кулона.
3. Работа силы тяжести.
4. Работа силы упругости.
5. Поле силы. Потенциальная энергия. Связь поля силы с потенциальной энергией.
6. Кинетическая энергия (мат. точки, системы мат. точек, кинетическая энергия поступательного и вращательного движения АТТ).
7. Полная механическая энергия.