Электронное пособие

по теме :

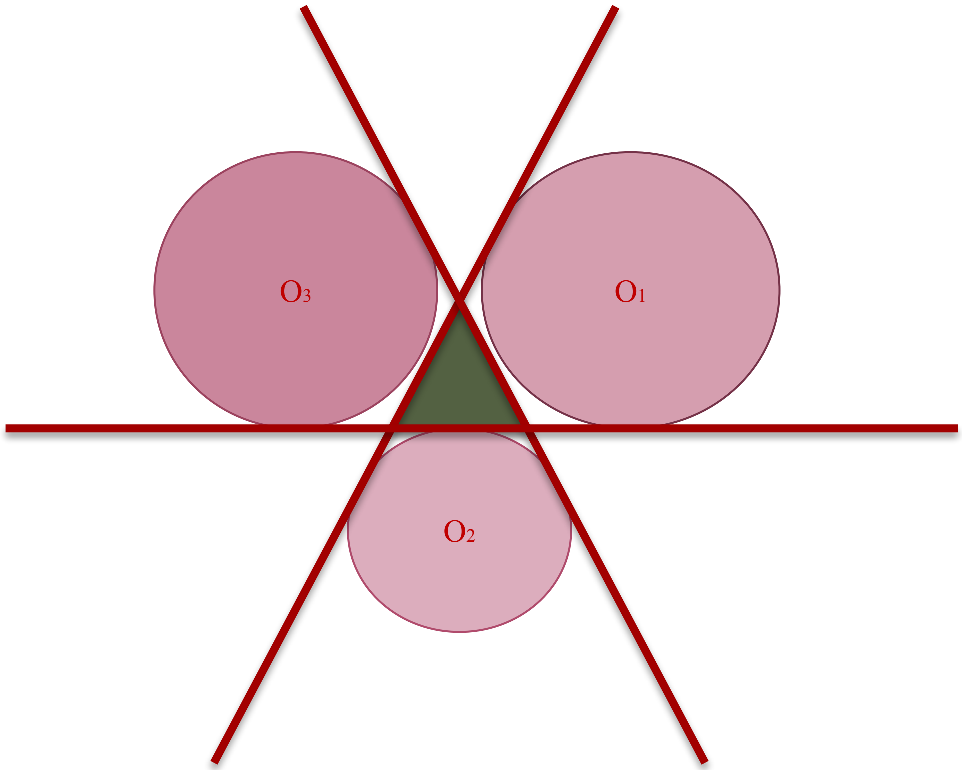
«Вневписанная окружность».

Содержание:

1. Определение вневписанной окружности. Основные теоремы и формулы.

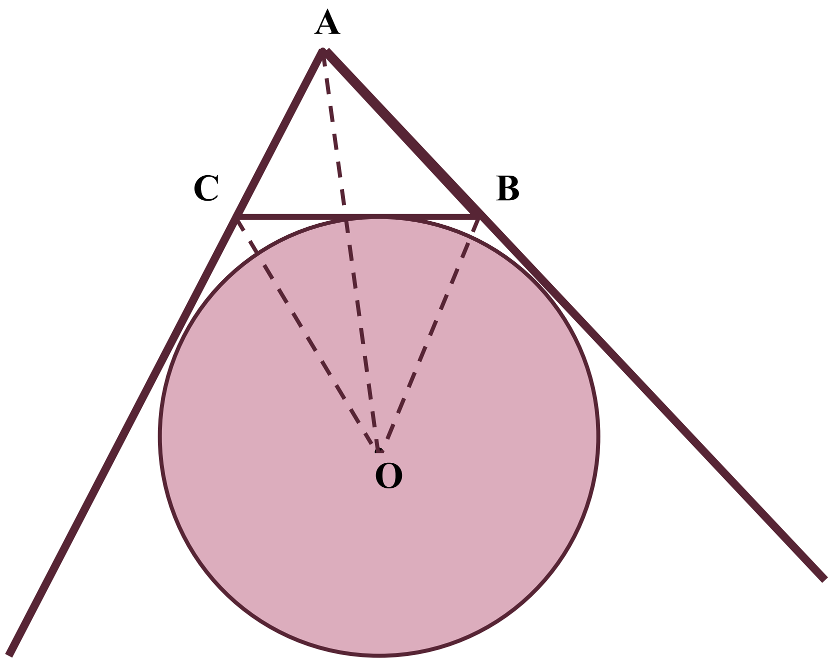
- *Вневписанная окружность.*

Окружность называется ***<u>вневписанной</u>*** для треугольника, если она касается **одной** стороны треугольника и **продолжений** двух других сторон. Для каждого треугольника существует ***<u>три</u>*** вневписанных окружности, которые расположены **вне** треугольника, почему они и получили название *вневписанных*.

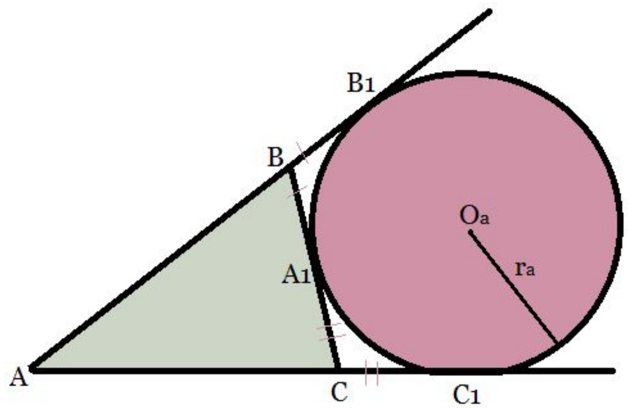


- *Центр вневписанной окружности.*

<u>Центр вневписанной окружности</u> треугольника — точка пересечения **биссектрисы внутреннего угла** треугольника, противолежащего той стороне треугольника, которой окружность касается, и биссектрис **двух внешних углов** треугольника.



I. *Расстояние от вершины угла треугольника до точек касания вневписанной окружности со сторонами этого угла равны полупериметру данного треугольника* $AB_1 = AC_1 = \frac{P}{2}.$

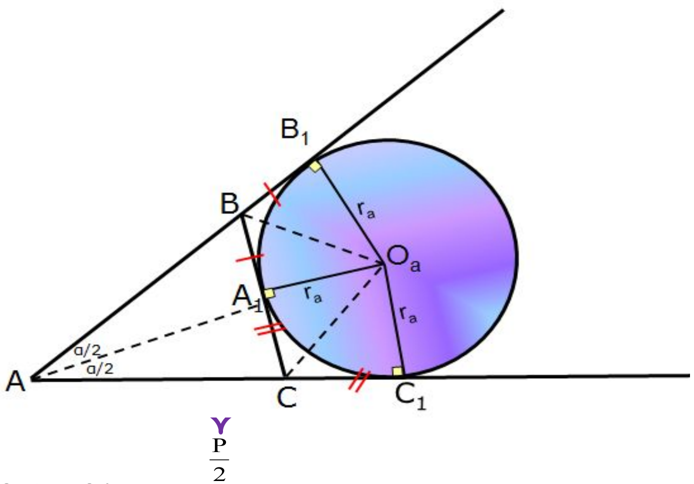


Дано:
ΔABC; Вневписанная окр. $(O_a;r_a)$

Доказать: $AB_1 = AC_1 = \frac{P}{2}.$

Док-во:
Т.к. касательные, проведенные из одной точки, равны ,то $BB_1=BA_1$, $CA_1=CC_1$, $AB_1=AC_1$.
Значит, **P=** $(AC+CA_1)+(AB+BA_1)= (AC+CC_1)+(AB+BB_1)= AC_1+AB_1$**$=2AC_1=2AB_1$**, т.е.
$AB_1 = AC_1 = \frac{P}{2}.$

II. *Радиус вневписанной окружности, касающейся сторон данного внутреннего угла треугольника, равен произведению полупериметра треугольника на тангенс половины этого угла, т. е.* $r_a = \frac{P}{2} * \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, r_b = \frac{P}{2} * \operatorname{tg}\frac{\beta}{2},$ $r_c = \frac{P}{2} * \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$



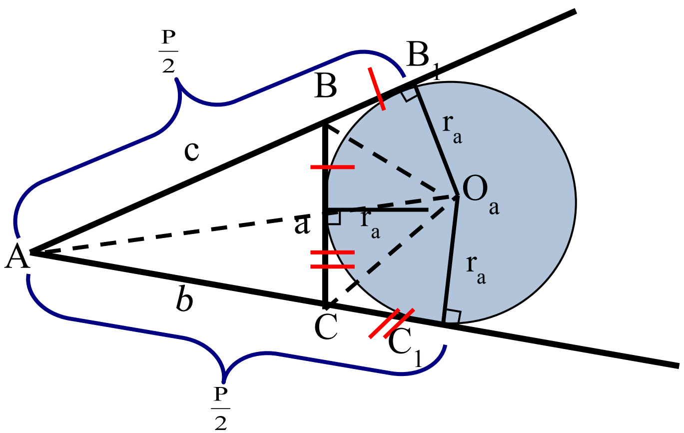
Дано:
ΔABC; Вневписанная окр. $(O_a; r_a)$

Доказать: $\boxed{r_a = \frac{P}{2} * \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.}$

Док-во:
В прямоугольном треугольнике ΔAO_aC_1 r_a и $\frac{P}{2}$ – длины катетов, $\angle O_aAC = \frac{\alpha}{2}$,

поэтому $r_a = \frac{P}{2} * \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, что и требовалось доказать.

III. Радиус вневписанной окружности, касающейся данной стороны треугольника, равен отношению площади треугольника к разности полупериметра и этой стороны. т.е. $r_a=\dfrac{S}{\frac{P}{2}-a}$, $r_b=\dfrac{S}{\frac{P}{2}-b}$, $r_c=\dfrac{S}{\frac{P}{2}-c}$.



Дано:
ΔABC; Вневписанная окр. (O_a;r_a)

Доказать: $\boxed{r_a=\dfrac{S}{\frac{P}{2}-a}.}$

Док-во: $S_{ABC}=S_{AO_aC}+S_{BO_aC}\text{-}S_{BO_aC}=\dfrac{r_a}{2}\times(b+c-a)=r_a\times\left(\dfrac{P}{2}-a\right)$,т.е.

Имеем: $r_a=\dfrac{S}{\frac{P}{2}-a}$, что и требовалось доказать.

3

Задачи

на свойства касательной к вневписанной окружности и ее радиусов:

Задача№1.

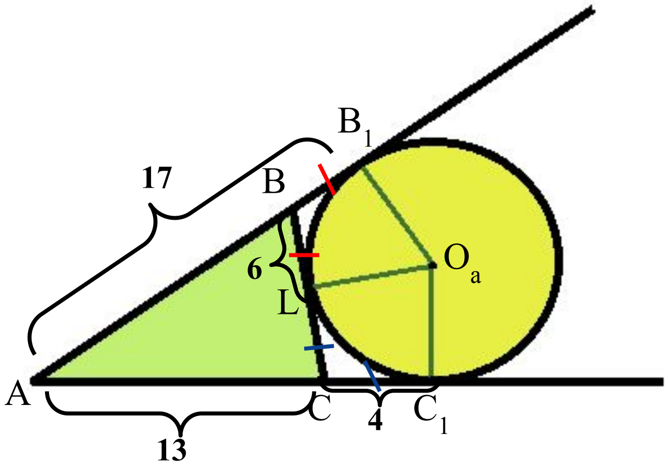
Найдите периметр треугольника АВС, если расстояние от вершины А до точки касания с вневписанной окружностью равно 17 , расстояние от вершины В до точки касания окружности со стороной ВС равно 6, расстояние от вершины С до точки касания окружности со стороной АС равно 4.

(авторская задача)

РЕШЕНИЕ

Решение:

Дано:
Окр(O_a;O_aC_1);∆ABC;AB_1=17, BL=6, CC_1=4.
Найти: *P-?.*



Решение №1:

1) Рассмотрим ∆ABC.

Т.к. BL=BB_1=6 (как отрезки касательных, проведенные из одной точки), то AB=AB_1- BB_1 => **AB**=17-6**=11**.

2) Т.к. CL=CB_1=4 (как отрезки касательных, проведенные из одной точки), то BC=BL + LC => **BC**=6+4**=10**.

3) Т.к. AB_1=AC_1 =17 (как отрезки касательных, проведенные из одной точки), то AC= AC_1- CC_1 => **AC**=17-4**=13**.

4) P=AB+BC+AC **=> P=11+10+13=34**.

Решение №2:

1) Т.к $\mathbf{AB_1 = AC_1} = \dfrac{P}{2}$ *(по теореме о касательной вневписанной окружности)*, то **P= $\mathbf{AB_1}$* 2 =>**
P= 17*2=34.

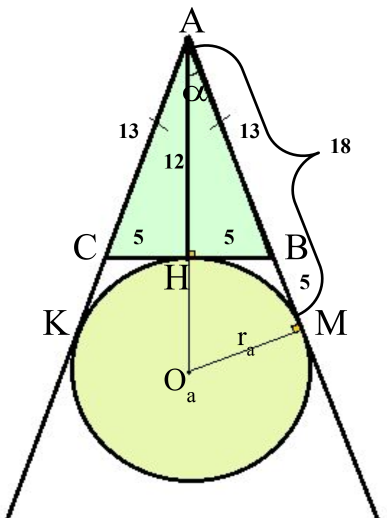
Ответ: P = 34.

Задача№2.

Найдите радиус вневписанной окружности треугольника со сторонами 13, 13, 10.

*(**ЕГЭ-**2015, система задач по геометрии Р.К.Гордина)*

РЕШЕНИЕ



Решение 1:

Дано:
Окр(O_a;r_a);ΔABC;AB=13, AC=13, BC=10.
Найти: r_a -?.

Решение (1 случай) :

1. Пусть стороны AB , AC и BC треугольника ABC равны 13, 13 и 10 соответственно, AH — высота треугольника, r_a — радиус вневписанной окружности, касающейся сторон BC , AC и AB — в точках H , K и M соответственно.

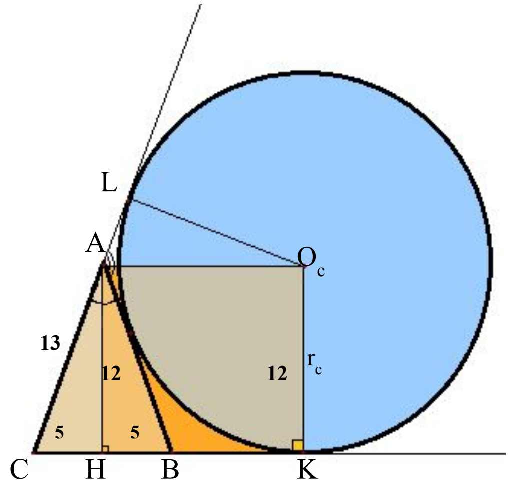
2.Поскольку ΔABC равнобедренный, точка H — высота и середина основания BC. Рассмотрим ΔAHB, где $\angle$H=90°. По теореме Пифагора: $AB^2 = AH^2 + HB^2 \Rightarrow 13^2 = AH^2 + 5^2 \Rightarrow AH = 12.$

3. Пусть O_a — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC и продолжения сторон AC и AB, причём продолжения стороны AB —в точке M. Тогда BM = BH = 5 *(как отрезки касательных, проведенные из одной точки)*; AM = AB + BM = 13 + 5 = 18.

4. Рассмотрим ΔAMO_a, где $\angle$M=90° *(теорема о касательной к окружности).*

По теореме радиусе вневписанной окружности получаем, что $r_a = AM * tg\angle MAH$

(AM= $\frac{P}{2}$ по теореме о расстоянии от вершины угла треугольника до точек касания с вневписанной окружности) $\Rightarrow r_a = 18 * \frac{5}{12} = 7,5.$



Решение 2:

Дано:
Окр(O_c;r_c);ΔABC;AB=13, AC=13, BC=10.
Найти: r_c -?.

Решение (2 случай):

1. Пусть O_c — центр вневписанной окружности, касающейся стороны AB и продолжений сторон BC и AC в точках K и L соответственно. Тогда AO —биссектриса $\angle$BAL, а так как AH — биссектриса смежного с ним $\angle$BAC, то $\angle HAO_c = 90^\circ$.

2. Четырёхугольник AO_cKH — прямоугольник ($\angle HAO_c = \angle AHK = \angle HKO_c = 90^\circ$),поэтому $\mathbf{r_c} = O_cK = AH = \mathbf{12}$.

3. Аналогично найдём, что $\mathbf{r_b} = AH = \mathbf{12}$.

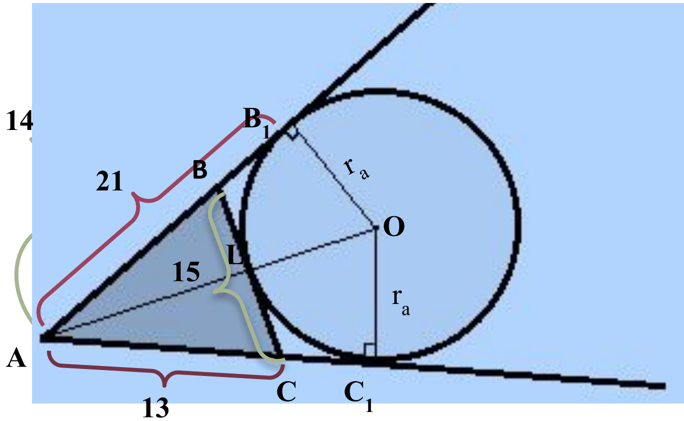
Ответ: $r_a = 7{,}5;\ r_b = 12; r_c = 12.$

Задача№3.

Найдите радиус вневписанной окружности, если расстояние от вершины А до точки касания с окружностью равно 21, ВС=15, АВ=14,АС=13.

(авторская задача)

РЕШЕНИЕ



Решение:

Дано: $AB_1=21$, $AB=14$, $AC=13$, $BC=15$.

Найти: ***r_a-?***.

Решение :

1) Рассмотрим ΔABC : $\frac{P}{2} = AB_1 = AC_1 = 21$(по теореме о касательной к вневписанной окружности)

2) $S_{\Delta ABC} = \sqrt{\frac{P}{2} * \left(\frac{P}{2} - AB\right) * \left(\frac{P}{2} - BC\right) * \left(\frac{P}{2} - AC\right)}$ (по формуле Герона)

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{21*(21-14)*(21-15)*(21-13)}$$

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{21*7*6*8} = 84.$$

3) По теореме о радиусе вневписанной окружности:

$$r_a = \frac{S}{\frac{P}{2} - BC} \Rightarrow r_a = \frac{84}{21-15} = 14.$$

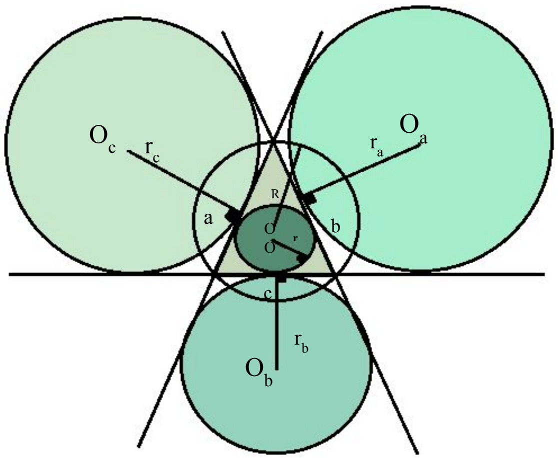
Ответ: $r_a = 14$.

Т ?

2. Соотношения с радиусами вневписанных окружностей.

- *Выражение **суммы радиусов вневписанных окружностей** через **радиус вписанной окружности** и **радиус описанной окружности**.*

$$\boxed{r_a + r_b + r_c - r = 4R}$$



Дано:

ΔABC; Вневписанная окр. $(O_a;r_a)$, $(O_b;r_b)$, $(O_c;r_c)$, вписанная окр.$(O;r)$, описанная окр.$(O;R)$.

Доказать: $r_a + r_b + r_c - r = 4R$

Док-во

Выразим все радиусы через стороны, S и полупериметр треугольника: $r = \dfrac{S}{\frac{P}{2}}, R = \dfrac{abc}{4S}, r_a = \dfrac{S}{\frac{P}{2} - a}, r_b = \dfrac{S}{\frac{P}{2} - b}, r_c = \dfrac{S}{\frac{P}{2} - c}$

Значит, $\mathbf{r_a + r_b + r_c - r = \dfrac{S}{\frac{P}{2} - a} + \dfrac{S}{\frac{P}{2} - b} + \dfrac{S}{\frac{P}{2} - c} - \dfrac{S}{\frac{P}{2}} =}$

$$= S\frac{\frac{P}{2}(\frac{P}{2} - b)(\frac{P}{2} - c) + \frac{P}{2}(\frac{P}{2} - a)(\frac{P}{2} - c) + \frac{P}{2}(\frac{P}{2} - a)(\frac{P}{2} - b) - (\frac{P}{2} - a)(\frac{P}{2} - b)(\frac{P}{2} - c)}{\frac{P}{2}(\frac{P}{2} - a)(\frac{P}{2} - b)(\frac{P}{2} - c)} = S\frac{abc}{S^2} = \frac{abc}{S}$$

=> поскольку радиус описанной окружности удовлетворяет равенству $\mathbf{R = \dfrac{abc}{4S}}$, то справедлива формула

$r_a + r_b + r_c - r = 4R$,что и требовалось доказать.

- *Выражение* ***суммы величин, обратных радиусам вневписанных окружностей****, через величину* ***обратную радиусу вписанных окружностей****.*

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$$

З

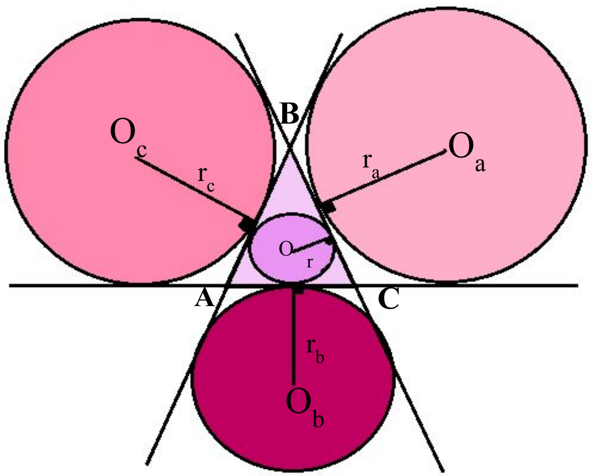
- *Выражение* ***суммы всех попарных произведений радиусов вневписанных окружностей*** *через* ***квадрат полупериметра треугольника.***

$$r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = \left(\frac{P}{2}\right)^2$$

З

- *Выражение* ***произведения радиусов вневписанных окружностей через произведение радиуса вписанной окружности и квадрат полупериметра треугольника***.

$$r_a r_b r_c = r\left(\frac{P}{2}\right)^2$$



Дано:

ΔABC; Вневписанная окр. $(O_a;r_a)$, $(O_b;r_b)$, $(O_c;r_c)$, вписанная окр.$(O;r)$.

Доказать: $r_a r_b r_c = r\left(\frac{P}{2}\right)^2$.

До...

Из ранее доказанных формул для радиусов и формулы Герона $r_a = \dfrac{S}{\frac{P}{2} - a}$, $r_b = \dfrac{S}{\frac{P}{2} - b}$, $r_c = \dfrac{S}{\frac{P}{2} - c}$,

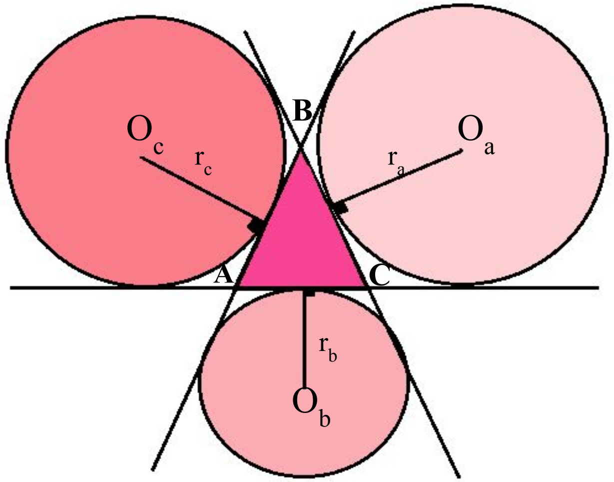
$S = \sqrt{\frac{P}{2} * \left(\frac{P}{2} - AB\right) * \left(\frac{P}{2} - BC\right) * \left(\frac{P}{2} - CA\right)}$. Тогда $r_a r_b r_c = \dfrac{S^3}{(\frac{P}{2} - AB)(\frac{P}{2} - BC)(\frac{P}{2} - CD)} = \dfrac{S^3 \frac{P}{2}}{S^2} = S\frac{P}{2} = \frac{P}{2} r * \frac{P}{2} = r\left(\frac{P}{2}\right)^2$, что и требовалось доказать.

Следствия

1 следствие:

Площадь** треугольника равна **отношению произведения** всех **трех радиусов вневписанных окружностей к полупериметру треугольника.

$$S=\frac{r_a r_b r_c}{\frac{P}{2}}$$



Дано: ∆ABC; Вневписанная окр. (O_a;r_a), (O_b;r_b), (O_c;r_c).

Доказать: $S=\frac{r_a r_b r_c}{\frac{P}{2}}$.

Док-во:

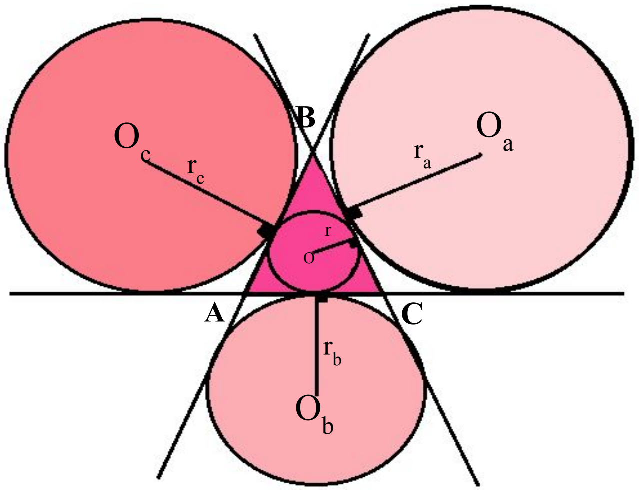
Из $r_a r_b r_c = r\left(\frac{P}{2}\right)^2 = r\frac{P}{2}*\frac{P}{2} = S\frac{P}{2}$. Следовательно $S=\frac{r_a r_b r_c}{\frac{P}{2}}$, что и требовалось доказать.

3

2 следствие:

Площадь треугольника равна квадратному корню из произведения всех трех радиусов вневписанных окружностей и радиуса вписанной окружности.

$$S = \sqrt{r_a r_b r_c r}$$



Дано: ΔABC; Вневписанная окр. $(O_a;r_a)$, $(O_b;r_b)$, $(O_c;r_c)$ вписанная окр.$(O;r)$.

Доказать: $S = \sqrt{r_a r_b r_c r}$

Док-во:

Из *следствия 1* , что $S = \dfrac{r_a r_b r_c}{\frac{P}{2}}$ и равенства, $S = \dfrac{P}{2} * r$ получаем, перемножая их почленно,

$S^2 = \dfrac{r_a r_b r_c}{\frac{P}{2}} * \dfrac{P}{2} r = r_a r_b r_c r$. Значит, $S = \sqrt{r_a r_b r_c r}$, что и требовалось доказать.

Задачи
на соотношения с радиусов вневписанных окружностей:

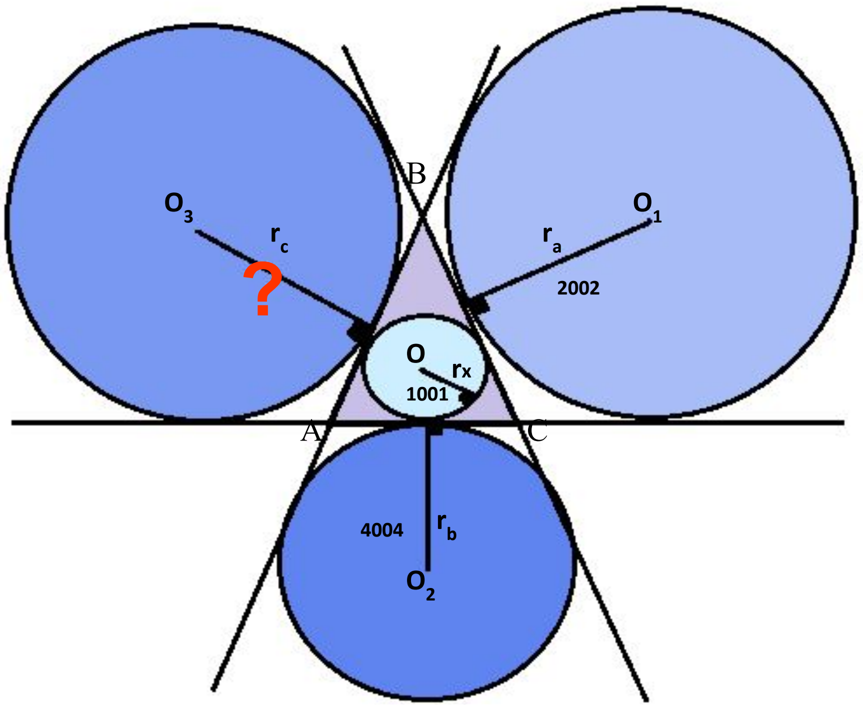
Задачи:

Задача№4.

Найдите радиус вневписанной окружности треугольника, если радиусы двух других вневписанных окружностей равны 2002 и 4004, а радиус вписанной окружности равен 1001.

РЕШЕНИЕ

Решение:



Дано: ΔABC; Окр(O; r_x=1001), Окр(O_3,r_c), Окр(O_1; r_a=2002), Окр(O_2;r_b=4004).

Найти: r_c-?

Решение:

Т.к. сумма величин, обратных радиусам вневписанных окружностей, равна величине, обратной радиусу вписанной окружности, а именно $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$, то составим равенство: $\frac{1}{2002}+\frac{1}{4004}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{1001} \Rightarrow \frac{1}{r_c}=\frac{1}{1001}-\frac{1}{2002}-\frac{1}{4004} \Rightarrow \frac{1}{r_c}=\frac{1}{4004} \Rightarrow r_c=4004.$

Ответ: r_c=4004.

Задачи:

Задача №5.

Найдите произведение сторон треугольника, если известно, что радиусы его вневписанных окружностей равны 9,18 и 21.

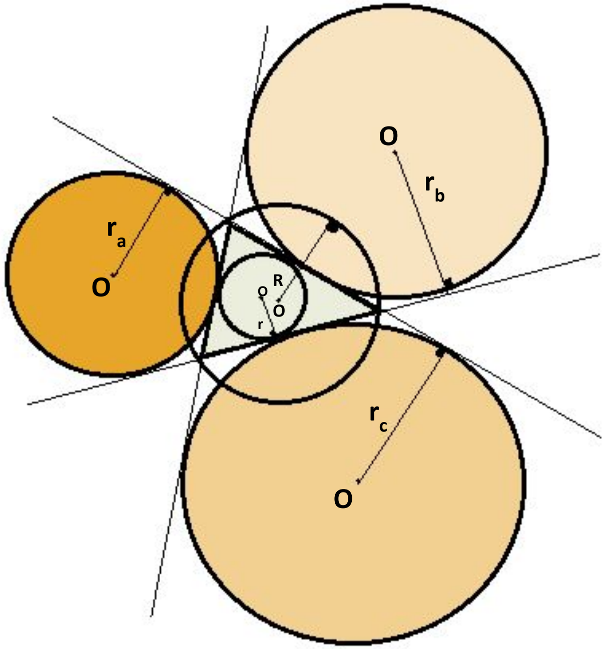
(сборник «Подготовка к ***ЕГЭ****-2010, под редакцией Ф.Ф.Лысенко)*

РЕШЕНИЕ

Решение:

Дано: ΔABC; $r_a=9$, $r_b=18$, $r_c=21$; Окр(O, r_c), Окр(O; r_a), Окр(O; r_b), Окр(O; R).

Найти: $a*b*c-?$



Решение:

$S=\frac{abc}{4R}$, следовательно $abc=S*4R$.

1. Найдем S: $S=\frac{r_a r_b r_c}{\frac{P}{2}}\Rightarrow\left(\frac{P}{2}\right)^2=r_a r_b+r_b r_c+r_c r_a\Rightarrow\frac{P}{2}=\sqrt{9*18+9*21+18*21}=27$, получаем $S=\frac{9*18*21}{27}=126$;

2. Найдем 4R: $4R=r_a+r_b+r_c-r\Rightarrow r=\frac{r_a r_b r_c}{\left(\frac{P}{2}\right)^2}\Rightarrow r=\frac{9*18*21}{27^2}=\frac{14}{3}\Rightarrow 4R=9+18+21-\frac{14}{3}=\frac{130}{3}$;

3. Подставляем: $abc=\frac{126*130}{3}=5460.$

Ответ: 5460.

Задачи:

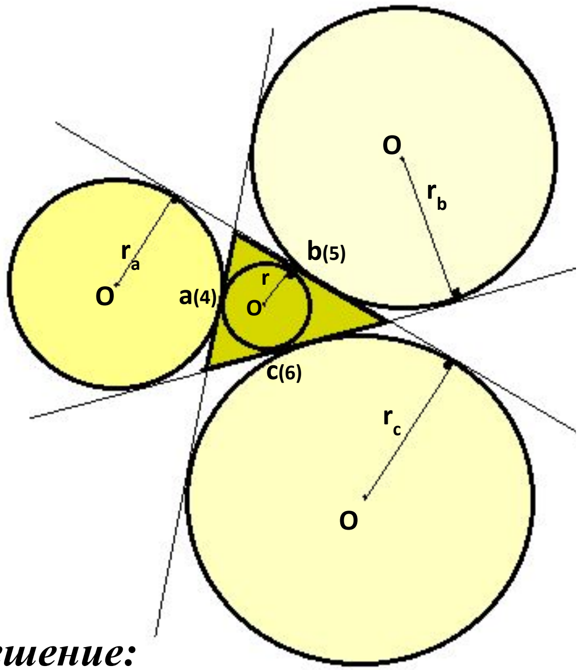
Задача №6.

Найдите произведение радиусов всех вневписанных окружностей треугольника со сторонами 4,5,6.

*(сборник «Подготовка к **ЕГЭ-**2010, под редакцией Ф.Ф.Лысенко)*

РЕШЕНИЕ

Решение:



Дано: ΔABC; a=4, b=5, c=6; Окр(O, r_c), Окр(O; r_a), Окр(O; r_b)

Найти: $r_a * r_b * r_c - ?$

Решение:

1. Так как $r_a r_b r_c = r\left(\frac{P}{2}\right)^2$, где r-радиус вписанной в треугольник окружности, то:

$$P_{\Delta ABC} = 4+5+6 = 15 \Rightarrow \frac{P}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5.$$

2. Так как $\mathbf{r} = \dfrac{S}{\frac{P}{2}} = \dfrac{\sqrt{\frac{P}{2}(\frac{P}{2}-a)(\frac{P}{2}-b)(\frac{P}{2}-c)}}{\frac{P}{2}}$, то $\mathbf{r} = \dfrac{\sqrt{7{,}5(7{,}5-4)(7{,}5-5)(7{,}5-6)}}{7{,}5} = \dfrac{3{,}75\sqrt{7}}{7{,}5} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}.$

Таким образом, $r_a r_b r_c = \dfrac{\sqrt{7}}{2} * (7{,}5)^2 = \dfrac{\sqrt{7}}{2} * 56{,}25 = \dfrac{225\sqrt{7}}{8}.$

Ответ: $\dfrac{225\sqrt{7}}{8}.$

Задачи:

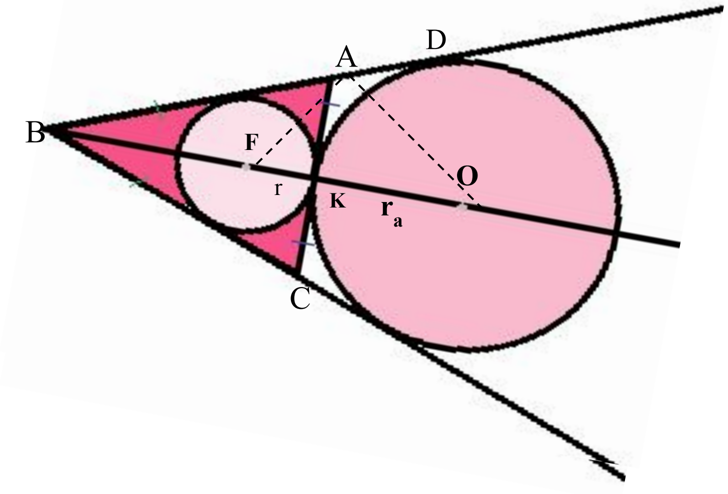
Задача№7.

Основание AC равнобедренного треугольника равно 10. Окружность радиуса 7,5 с центром вне этого треугольника касается продолжения боковых сторон треугольника и касается основания AC в его середине. Найдите радиус окружности вписанной в треугольник ABC.

*(сборник «Подготовка к **ГИА**-2013, под редакцией Д.А. Мальцева)*

РЕШЕНИЕ

Решение:



Дано: ΔABC-равнобедренный; AC= 10; вписанная окр.(F; r), вневписанная окр.(O; r_a=**7,5**).

Найти: r-?

Решение:

1. Так как окружность касается стороны треугольника и продолжения двух других сторон, то это - *вневписанная окружность.*

2. Так как центр вписанной окружности и вневписанной окружности лежит в точке пересечения биссектрис, то AF-биссектриса ∠BAC, а AO – биссектриса ∠CAD => ΔFAO – прямоугольный треугольник, так как биссектрисы смежных углов образуют прямой угол.

3. AK – высота, проведенная к гипотенузе => AK^2=FK*KO *(по теореме о высоте прямоугольного Δ)* =>

$$5^2 = FK * 7{,}5 \Rightarrow FK = \frac{25}{7{,}5} = \frac{10}{3}.$$

Так как FK – радиус вписанной в ΔABC окружности, следовательно $FK = r = \frac{10}{3}$.

Ответ: $\frac{10}{3}$.

Список литературы:

- Блинков А., Блинков Ю. Вневписанная окружность. "Квант", №3, 2009.
- «Геометрия. 9 класс.» Авторы: Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С. «Вентана-Граф» 2014г.
- ЕГЭ 2015. Математика. Решение задачи 18 .Автор: Рафаил Гордин.
- Лысенко Ф.Ф. «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2010» Ростов-на-Дону, «Легион-М» 2009г.
- http://opengia.ru/
- http://reshuege.ru/
- http://reshuoge.ru/
- https://ru.wikipedia.org/wiki/Вневписанная_окружность
- http://www.resolventa.ru/uslugi/uslugischoolsev.htm