Математика 2 семестр.

Лекция № 2.

Функции нескольких переменных.

Понятие о функции нескольких переменных.

Пусть дано некоторое множество D упорядоченных пар чисел (x,y). В плоскости, отнесенной к прямоугольной декартовой системе координат OXY, каждой паре чисел (x,y) соответствует точка $M(x,y)$ и наоборот, каждой точке $M(x,y)$ соответствует пара чисел (x,y). Таким образом, геометрически множество D представляет собой некоторое множество точек плоскости OXY.

Определение.

Если в силу некоторого закона каждой паре чисел (x,y) из множества D ставится в соответствие определенное значение переменной z, то z называется **функцией** двух переменных x и y, определенной на множестве D, и записывается в виде $z = f(x,y)$ или $z = f(M)$.

Понятие о функции нескольких переменных.

- Множество $D=D(f)$ тех точек (x,y) для которых $f(x,y)$ принимает действительные значения называется **областью определения функции**.
- Переменные x и y называются **аргументами** (независимыми переменными), а z – зависимой переменной (функцией).
- Множество $E=E(f)$ тех значений z, которые эта переменная принимает в области определения функции, называется **областью изменения функции**, при этом $z \in \boldsymbol{R}$ ($\boldsymbol{R}$ - множество действительных чисел).

Пример.

Областью определения D функции $z = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ является множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $1 - x^2 - y^2 > 0$ или неравенству $x^2 + y^2 < 1$, т.е. это круг, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = 1$, исключая эту окружность (открытый круг), а областью значений $E(f)$ является промежуток $[1, +\infty)$.

Геометрическое изображение функции 2-х переменных.

Каждая пара значений аргументов (x,y) геометрически определяет точку M на плоскости, а значение функции в этой точке есть аппликата z пространственной точки $P(x,y,z)$.

Геометрическое место точек P есть поверхность, которая взаимно однозначно проектируется в область D плоскости $0XY$. Эта поверхность служит геометрическим изображением функции $z=f(x,y)$.

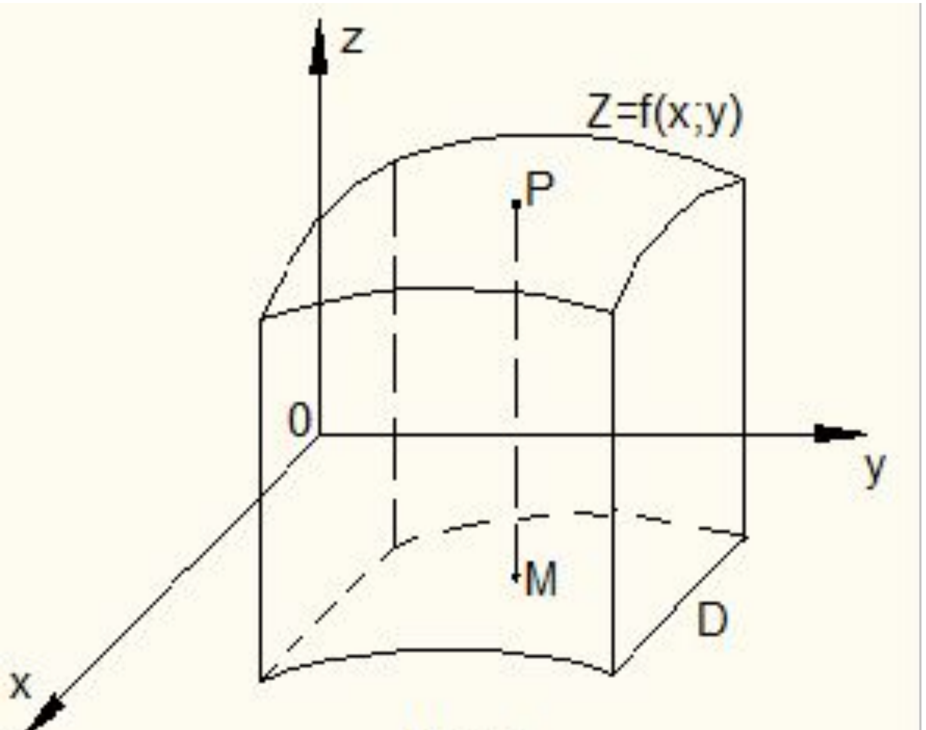

Рис.1

Функции двух переменных могут быть как однозначными, так и многозначными. Мы в дальнейшем рассматриваем, как правило, функции однозначные, т.е. такие, для которых каждой паре значений (x,y) соответствует только одно значение z. Однозначность функции $z = (x,y)$ геометрически выражается в том, что прямые, параллельные оси Oz, пересекают график функции не более, чем в одной точке.

Евклидово *n* – мерное пространство.

Упорядоченную совокупность n действительных чисел $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ назовем точкой, а сами числа – ее координатами. Запись $M(x_1, x_2, x_3 \dots x_n)$ означает, что точка M имеет координаты $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$. Множество всех указанных точек называется **евклидовым n-мерным пространством**, если для любых 2-х точек $M_1(x_1', x_2' \dots x_n')$ и $M_2(x_1'', x_2'' \dots x_n'')$ определенно расстояние между ними по формуле:

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{((x_1'' - x_2')^2 + (x_2'' - x_2')^2 + \dots + (x_n'' + x_n')^2)}$$

и обозначается E^n, где n - размерность пространства.

Понятие функции от любого числа переменных.

Если в силу некоторого закона каждой точке $M(x_1, x_2, x_3 \dots x_n)$ из некоторого множества $D \subset E^n$ сопоставлено в соответствие определенное значение переменной *u*, то *u* называют функцией от n переменных $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$, определенной на множестве *D*, и обозначают $U = f(M) = f(x_1, x_2, x_3 \dots x_n)$.При этом множество *D* называют областью определения функции $U = f(M)$.

В случае функции 3-х переменных пишут $u = f(x, y, z)$ и область определения *D* будет некоторым множеством троек чисел (x, y, z), тогда геометрически *D* представляет собой некоторое множество точек пространства 0xyz.

Пример.

Областью D функции $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ является множество точек $M(x, y, z)$, координаты которых удовлетворяют неравенству $1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$ или $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, т.е. это шар радиусом 1 с центром в начале координат, включая ограничивающую его сферу.

Окрестность точки на плоскости.

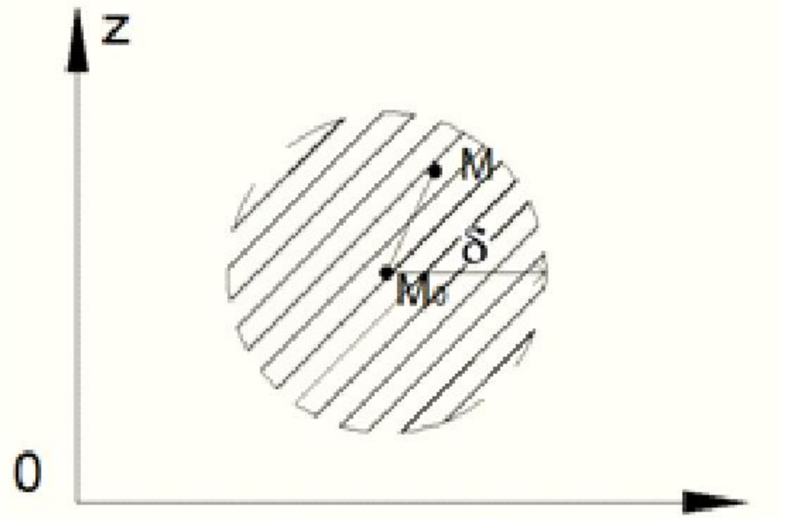

рис. 2

Пусть $M(x_0, y_0)$ – точка плоскости. Будем называть δ- окрестностью (или окрестностью) точки M_0 множество точек плоскости, удаленных от точки M_0 менее чем на δ: $|MM_0| < \delta$ или $\rho(M, M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$.

Геометрической окрестностью точки M_0 будет множество точек, лежащих внутри окружности радиуса δ с центром в точке M_0 (рис. 2).

Предел функции нескольких переменных.

Пусть функция $U = f(M)$, где $M \in E^n$, определена в некоторой окрестности точки $M \in E^n$, исключая, может быть, саму эту точку.

Число A называется **пределом функции** $f(M)$ при стремлении точки M к точке M_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon)$,что для всех точек **M** удовлетворяющих условию $|MM_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(M) - A| < \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$ или $f(M) \to A$ при $M \to M_0$

Важно подчеркнуть, что, по определению, предел функции не зависит от направления движения точки М к точке M_0. Поэтому, если окажется, что при $M \to M_0$ с разных сторон $f(M)$ стремится к разным предельным значениям, то функция $U = f(M)$ предела не имеет.

Функция $u = f(M)$ называется бесконечно малой при $M \to M_0$, если $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = 0$.

Приведенное определение справедливо для функции произвольного числа аргументов.

Для предела функции нескольких переменных справедливы теоремы, аналогичные соответствующим теоремам о пределах функции одного аргумента.

Непрерывность функции нескольких переменных в точке.

Функция $z = f(M) = f(x,y)$ называется **непрерывной в точке** $M_0(x_0, y_0)$, если она:

1) определена в точке M_0 и ее окрестности;

2) имеет конечный предел $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$

3) этот предел равен значению функции z в точке M_0,

т. е. $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$ или $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

Функция $z = f(M)$ непрерывна в области *D*, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Точка M_0 называется **точкой разрыва** функции, если для нее не выполняется хотя бы одно из трех условий в определении непрерывности.

Точки и линии разрыва функции.

Точки разрыва данной функции могут располагаться как отдельно (изолированные точки разрыва), так и образовывать целые линии (линии разрыва).

Например, функция $z = \frac{x^2+2y+4}{y^2-2y}$ имеет линию разрыва $y^2 = 2x$, т.е. точки разрыва расположены на параболе. При приближении точки $M(x;y)$ к какой-либо точке этой параболы данная функция бесконечно возрастает.

Обозначим $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$.

Полным приращением функции $z = f(M) = f(x,y)$ при переходе от точки M_0 к точке M называется разность значений функции в этих точках, а именно

$$\Delta z = f(M) - f(M_0) = f(x,y) - f(x_0,y_0)$$

Условие непрерывности функции в точке M_0 равносильно условию

$$\lim_{M \to M_0} \Delta z = 0 \text{ или } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \Delta z = 0,$$

т.е. функция $z = f(x,y)$ непрерывна в некоторой точке, если достаточно малые изменения координат этой точки вызывают сколь угодно малое изменение значения самой функции.

Частные приращения функции.

Пусть задана функция $z = f(x,y)$, где x и y – независимые переменные. Пусть переменная x получает приращение Δx, сохраняя значение y неизменным. Получим частное приращение z по x:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x,y).$$

Аналогично получаем частное приращение z по y:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x,y).$$

Частные производные первого порядка.

Частной производной функции $z = f(x,y)$ по одной из переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения к приращению рассматриваемой независимой переменной при условии, что последнее стремится к нулю.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \quad \text{(если он существует)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \quad \text{(если он существует)}$$

Используются и другие обозначения частных производных:

z'_x, $\frac{\partial f}{\partial x}$, f'_x и т.д.

Символы $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ как дроби трактовать нельзя (в отличие от случая одной переменной), их рассматривают как одно целое. Частная производная функции нескольких переменных $U = f(M)$ по одному из аргументов равна обычной производной по этому аргументу при условии постоянства значений остальных независимых переменных. Поэтому частные производные находятся по формулам и правилам вычисления производных от функции одной переменной.

Пример.

1) $z = x^2 + y^2$; $z'_x = 2x$; $z'_y = 2y$.

2) $U = \frac{xy}{z}$; $U'_x = \frac{y}{z}$; $U'_z = -\frac{xy}{z^2}$; $U'_y = \frac{x}{z}$.

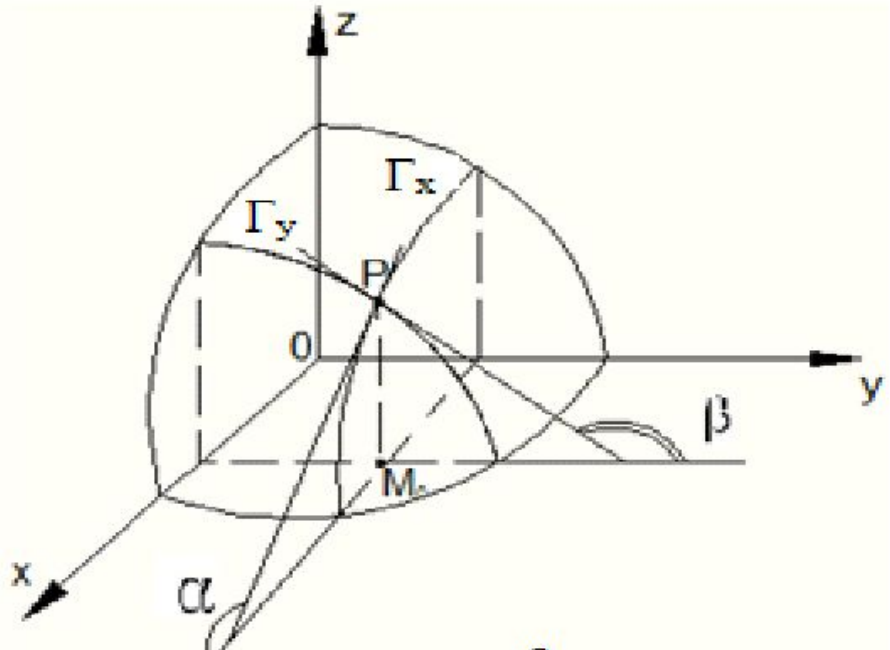

рис. 3

Для функции $z = f(x,y)$ выясним геометрический смысл ее частных производных $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x,y)$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x,y)$. Графиком функции является некоторая поверхность P (рис. 3). Полагая $y = y_0$, мы получим плоскую кривую Γ_x, представляющую собой сечение поверхности P плоскостью $y = y_0$, параллельной координатной плоскости.

Уравнение кривой $\Gamma_x: z = f(x,y_0)$ представляет функцию одной переменной x. Исходя из геометрического смысла производной в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ для функции одной переменной, полагаем, что $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{M_0} = f'_x(x_0,y_0) = \operatorname{tg}\alpha$, где α – угол между касательной, проведенной к кривой $z = f(x,y_0)$ в точке M_0 и осью (рис. 3). Аналогично, если Γ_y есть сечение поверхности P плоскостью $x = x_0$ и β – угол, образованный касательной к кривой Γ_y: z=f(x$_o$;y) в точке M_0 и осью 0y, то $\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{M_0} = f'_y(x_0,y_0) = \operatorname{tg}\beta$.

Геометрический смысл частной производной:

Частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ ($\frac{\partial z}{\partial y}$) – это угловой коэффициент касательной к линии пересечения поверхности $z = f(x,y)$ и плоскости $y = const$ ($x = const$) в точке $M(x,y,z)$.

Физический смысл частной производной:

$\frac{\partial z}{\partial x}$ ($\frac{\partial z}{\partial y}$) – это скорость изменения функции в точке в направлении оси 0x (0y).

Литература.

- Боронина Е.Б. Математический анализ [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Боронина Е.Б.— Электрон. Текстовые данные.— Саратов: Научная книга, 2012.— 159 с.— Режим доступа: http://www. iprbooksho p.ru/6298. — ЭБС «IPRbooks»
- Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс [Текст] : [учебное пособие] / Д. Т. Письменный. - 9-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2010. - 603 с. : ил., табл. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-4073-9
- Шипачев, В. С.   Курс высшей математики [Текст] : учебник для вузов / В. С. Шипачев ; под ред. А. Н. Тихонова ; - 4-е изд., испр. - Москва : Оникс, 2009. - 600 с. : ил. - ISBN 978-5-488-02067-2