Методика решения тригонометрических уравнений

Слово «тригонометрия» греческого происхождения. В переводе на русский язык оно означает «измерение треугольников». Как и все разделы математики, зародившиеся в глубокой древности, тригонометрия возникла в результате попыток решить те задачи, с которыми человеку приходилось сталкиваться на практике.

Основы тригонометрии, как и основы алгебры и начал анализа закладываются в школе. Тригонометрические функции начинают изучать в 8 классе на уроках геометрии и продолжают в 10-11 классах.

Тригонометрические уравнения слишком разнообразны для того, чтобы попытаться дать их общую классификацию или общий метод решения. Мы можем указать лишь способы решения некоторых типов таких уравнений.

Решение тригонометрических уравнений

Для тригонометрических уравнений применимы общие методы решения (разложение на множители, замена переменной, функционально-графические) и равносильные преобразования общего характера.

Методы решения тригонометрических уравнений

Основные методы:

- замена переменной,
- разложение на множители,
- однородные уравнения,

прикладные методы:

- по формулам преобразования суммы в произведение и произведения в сумму,
- по формулам понижения степени,
- универсальная тригонометрическая подстановка
- введение вспомогательного угла,
- умножение на некоторую тригонометрическую функцию.

Проблемы ,возникающие при решении тригонометрических уравнений

1.Потеря корней:

- делим на g(x).
- опасные формулы (универсальная подстановка).

Этими операциями мы сужаем область определения.

2. Лишние корни:

- возводим в четную степень.
- умножаем на g(x) (избавляемся от знаменателя).

Этими операциями мы расширяем область определения.

Наша задача:
свести любое
тригонометрическое
уравнение
к простейшему виду.

Решение простейших тригонометрических уравнений

Формулы корней простых тригонометрических уравнений

1.cost = *a* , где |*a*| ≤ 1

$$\left[\begin{array}{l} t = \arccos \boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z \\ t = -\arccos \boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

или

$$t = \pm\arccos \boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z$$

Частные случаи

1)cost=0
t = π/2+πk, kЄZ

2)cost=1
t = 0+2πk, kЄZ

3)cost = -1
t = π+2πk, kЄZ

2.sint = *a*, *где* | *a* |≤ 1

$$\left[\begin{array}{l} t = \arcsin \boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z \\ t = \pi - \arcsin \boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

или

$$t = (-1)^k \arcsin \boldsymbol{a} + \pi k, k \in Z$$

Частные случаи

1)sint=0
t = 0+πk, kЄZ

2)sint=1
t = π/2+2πk, kЄZ

3)sint = - 1
t = - π/2+2πk, kЄZ

3. tgt = *a*, *a*ЄR

t = arctg ***a*** + πk, kЄZ

4. ctgt = *a*, *a*ЄR

t = arcctg ***a*** + πk, kЄZ

- При повторении формул решения уравнений следует обратить внимание на то, что формулы задают множества чисел, которые образованы по закону арифметической прогрессии с разностью 2π или π.

- С другой стороны использование общей формулы серий решений не всегда является удобной при отборе корней, в частности, на числовой окружности. В этом случае как раз удобнее не объединять серии решений тригонометрических уравнений, а представлять их совокупностью, выделяя разность 2π соответствующих прогрессий.

sin x

1. Решения уравнения $\sin x = a$ $(-1 < a < 1)$ можно записать совокупностью двух серий решений

$$x = \left[\begin{array}{l} \arcsin a + 2\pi n, \\ \pi - \arcsin a + 2\pi n, \end{array}\right. \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Уравнения $\sin x = 1$ и $\sin x = -1$ имеют решения $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$ $n \in \mathbf{Z}$, и $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,$ $n \in \mathbf{Z}$, соответственно.

$\sin x = 0, \quad x = \pi n, \quad n \in Z$

cos x

2. Решения уравнения $\cos x = a$ $(-1 < a < 1)$ можно записать совокупностью двух серий решений

$$x = \left[\begin{array}{l} \arccos a + 2\pi n, \\ -\arccos a + 2\pi n, \end{array}\right. n \in \mathbf{Z}.$$

Уравнения $\cos x = 1$ и $\cos x = -1$ имеют решения $x = 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$ и $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ соответственно.

$$\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$$

tg x и ctg x

3. Решения уравнения $\mathrm{tg}x = a$ можно записать совокупностью двух серий

$$x = \left[\begin{array}{l} \mathrm{arctg}a + 2\pi n, \\ \pi + \mathrm{arctg}a + 2\pi n, \end{array}\right. \quad n \in \mathbf{Z}.$$

4. Решения уравнения $\mathrm{ctg}x = a$ можно записать совокупностью двух серий

$$x = \left[\begin{array}{l} \mathrm{arcctg}a + 2\pi n, \\ \pi + \mathrm{arcctg}a + 2\pi n, \end{array}\right. \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Решение простейших уравнений

1) **$tg2x = -1$**

$2x = arctg(-1) + \pi k, k \in Z$

$2x = -\pi/4 + \pi k, k \in Z$

$x = -\pi/8 + \pi k/2, k \in Z$

Ответ: $-\pi/8 + \pi k/2, k \in Z$.

2) **$\cos(x+\pi/3) = ½$**

$x+\pi/3 = \pm\arccos 1/2 + 2\pi k, k \in Z$

$x+\pi/3 = \pm\pi/3 + 2\pi k, k \in Z$

$x = -\pi/3 \pm \pi/3 + 2\pi k, k \in Z$

Ответ: $-\pi/3 \pm \pi/3 + 2\pi k, k \in Z$

3) **$\sin(\pi – x/3) = 0$**

упростим по формулам приведения

$\sin(x/3) = 0$

частный случай

$x/3 = \pi k, k \in Z$

$x = 3\pi k, k \in Z$.

Ответ: $3\pi k, k \in Z$.

РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ РАЗЛОЖЕНИЕМ НА МНОЖИТЕЛИ.

Метод разложения на множители заключается в следующем: если

$$f(x) = f_1(x) f_2(x) \cdots f_n(x),$$

То всякое решение уравнения $f(x) = 0$

Является решением совокупности уравнений

$$f_1(x) = 0, f_2(x) = 0, \ldots, f_n(x) = 0.$$

Обратное утверждение, неверно: не всякое решение совокупности уравнений (2) является решением уравнения (1). Это объясняется тем, что решения отдельных уравнений (2) могут не входить в область определения функции $f(x)$

.Поэтому, если при решении тригонометрического уравнения методом разложения на множители, функции,
входящие в уравнение, определены не для всех значений аргумента, после нахождения решения должна быть сделана проверка,
чтобы исключить лишние корни. Можно поступать другим способом: находить область допустимых значений исходного уравнения и выбирать только те корни, которые входят в найденную область допустимых значений

РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ РАЗЛОЖЕНИЕМ НА МНОЖИТЕЛИ.

$$(2sinx - cosx)(1 + cosx) = sin^2 x.$$

$$(2sinx - cosx)(1 + cosx) = (1 - cosx)(1 + cosx)$$

$$\frac{1}{sinx} - 1 = ctgx - cosx$$

$$(1 - cosx)\left(\frac{1}{sinx} - 1\right) = 0.$$

РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ , СВОДЯЩИХСЯ К КВАДРАТНЫМ.

<u>Уравнения сводимые к квадратным</u>

$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x + c = 0$

Пусть $\sin x = p$, где $|p| \leq 1$, тогда

$a \cdot p^2 + b \cdot p + c = 0$

Найти корни, вернуться к замене и решить простые уравнения.

При решении уравнений указанного типа в основном применяются следующие тригонометрические тождества:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$tg^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$$

$$ctg^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}, x \neq \pi n, n \in Z.$$

РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ , СВОДЯЩИХСЯ К КВАДРАТНЫМ.

Пример 1. Решить уравнение

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$$

Решение.

Введём новую переменную **t = sinx.** Тогда данное уравнение примет вид **$2t^2 + t - 1 = 0$.**

Решим его: D = 1 + 8 = 9,

$$t_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2},$$

$$t_2 = \frac{-1-3}{4} = -1.$$

Следовательно,

sinx = 1/2 или **sinx = -1.**

1) sinx = 1/2,

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + \pi \cdot k, k \in Z,$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi \cdot k, k \in Z.$$

2) sinx = -1,

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n, n \in Z.$$

$$Ответ: (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi \cdot k, k \in Z, \quad -\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n, n \in Z.$$

Решение уравнений, однородных относительно синуса и косинуса

Однородными относительно $\sin x$ и $\cos x$ называют уравнения вида,

$$a_n \sin^n x + a_{n-1} \sin^{n-1} x \cos x + \ldots + a_1 \sin x \cos^{n-1} x + a_0 \cos^n x = 0,$$

в которых сумма показателей степеней у sinx и cosx (степень уравнения) во всех членах уравнения одинакова. Например,

- $a \sin x + b \cos x = 0$ – однородное уравнение первой степени,
- $a \sin^2 x + c \sin x \cos x + b \cos^2 x = 0$ – однородное уравнение второй степени,
- $a \sin^3 x + c \sin^2 x \cos x + d \sin x \cos^2 x + b \cos^3 x = 0$ – однородное уравнение третьей степени.

Делением обеих частей уравнения на $\cos^k x$ или $\sin^k x$, где k – степень уравнения, однородные уравнения сводятся к

алгебраическим относительно $t = \operatorname{tg} x$ или $t = \operatorname{ctg} x$.

Однако следует иметь в виду, что деление может привести к потере корней. Чтобы избежать этого, сначала требуется установить не являются ли корнями уравнения числа вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\quad n \in \mathbf{Z}$, при делении на $\cos^k x$, и, соответственно, числа вида $x = \pi n,\quad n \in \mathbf{Z}$, при делении на $\sin^k x$. Далее после делим на $\cos^k x$ или $\sin^k x$ ищем другие решение уравнения, отличные от указанных.

ОДНОРОДНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

2.Однородные

1)Первой степени:

$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0$

Т.к. sinx и cosx одновременно не равны нулю, то разделим обе части уравнения на cosx. Получим: простое уравнение

$a \cdot \mathrm{tg} x + b = 0$ или $\mathrm{tg} x = m$

2)Второй степени:

$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \cos^2 x = 0$

Разделим обе части на $\cos^2 x$. Получим квадратное уравнение:

$a \cdot \mathrm{tg}^2 x + b \cdot \mathrm{tg} x + c = 0$.

В частности, уравнения в $a\sin^2 x + c\sin x\cos x + b\cos^2 x = d$

приводятся к однородным путем представления правой части в виде:

$$d = d\cdot(\sin^2 x + \cos^2 x).$$

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ВВЕДЕНИЯ ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА.

Рассмотрим уравнение $a\sin x + b\cos x = c,\ a^2+b^2 \neq 0.$

Разделим левую и правую часть уравнения на $\sqrt{a^2+b^2}$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$ Так как $$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1,$$

то существует угол φ такой, что $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$ при этом

$$\varphi = \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \left(\textit{или}\ \ \varphi = \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$ Тогда уравнение примет вид

$$\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \leftrightarrow \sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

будут не всегда равносильны.

Отметим, что к выбору угла φ в задачах с параметрами нужно относиться внимательно: выбор $\varphi = \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и выбор $\varphi = \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Решите уравнения:

$$\sin x + \cos x = 1.$$

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2\cos 3x.$$

Линейные уравнения вида

$$a\cos x + b\sin x = c$$

Если $a = 0, b \neq 0$ или $a \neq 0, b = 0$, то линейное уравнение $a\cos x + b\sin x = c$ приводится к простейшему уравнению $\sin x = \dfrac{c}{b}$ или $\cos x = \dfrac{c}{a}$.

Если a и b отличны от нуля, то данное линейное уравнение преобразуется к простейшему ***методом введения вспомогательного угла***. Рассмотрим этот метод на примерах.

Пример 35. *Решить уравнение*

$$\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2 .$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующим:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin x - \frac{1}{2}\cdot\cos x = 1 ;$$

$\mathrm{Sin}(\alpha - \beta) = \mathrm{Sin}(\alpha)\cdot\mathrm{Cos}(\beta) - \mathrm{Cos}(\alpha)\cdot\mathrm{Sin}(\beta)$

$$\cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin x - \sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos x = 1;$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 .$$

Отсюда получаем $x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ или $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, где $m \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $m \in \mathbf{Z}$.

Уравнения, линейные относительно sin x и cos x a sin x + в cos x = c.

Если а=в=0, а с не равно 0, то уравнение теряет смысл;
Если а=в=с=0, то х – любое действительное число, то есть уравнение обращается в тождество.
Рассмотрим случаи, когда а,в,с не равны 0.
Примеры:

3 sin 5x - 4 cos 5x = 2

$$2\sin x + \cos x = 2$$

2 sin 3x + 5 cos 3x = 8.
Последнее уравнение не имеет решений, так как левая часть его не превосходит 7. Уравнения, этого вида можно решить многими способами: с помощью универсальной подстановки, выразив sin x и cos x через tgx ; сведением уравнения к однородному; введением вспомогательного аргумента и другими.
Решение этих уравнений существует при $a^2 + b^2 \geq c^2$

Решение уравнений с применением формул понижения степени.

При решении широкого круга тригонометрических уравнений ключевую роль играют формулы понижения степени

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha); \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha);$$

Решение уравнений с применением формул тройного аргумента.

(1)
(2)

При решении ряда уравнений наряду с другими существенную роль играют формулы

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x. \qquad \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x,$$

Решение уравнений методом универсальной подстановки.

Тригонометрическое уравнение вида $R(sinkx, cosnx, tgmx, ctglx) = 0,$

где *R* – рациональная функция, $k, l, m, n \in Z$

с помощью тригонометрических формул двойного и тройного аргумента, а также формул сложения можно свести к рациональному уравнению относительно аргументов $sinx, cosx, tgx, ctgx,$

после чего уравнение может быть сведено к рациональному уравнению относительно

$t = tg\,{}^{x}/_{2}$ с помощью формул универсальной тригонометрической подстановки

$$sinx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}}, \quad cosx = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}}, \quad tgx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 - tg^2\frac{x}{2}}, \quad ctgx = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{2tg\frac{x}{2}}.$$

Следует отметить, что применение формул может приводить к сужению ОДЗ исходного уравнения, поскольку $tg\,{}^{x}/_{2}$ не определен в точках $x = \pi + +2\pi k, k \in Z$

поэтому в таких случаях нужно проверять, являются ли углы $x = \pi + +2\pi k, k \in Z$

корнями исходного уравнения.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ ЗНАК МОДУЛЯ ИЛИ ЗНАК КОРНЯ.

Специфика тригонометрических уравнений, содержащих знак модуля или знак корня, состоит в том, что они сводятся к смешанным системам, где кроме уравнений нужно решать тригонометрические неравенства и из решений уравнений выбирать лишь те, которые удовлетворяют неравенствам.

Решите уравнения:

$$|x+3|\sin x = x+3.$$

$$\begin{cases}(x+3)\sin x = x+3,\\ x+3\ge 0,\end{cases}\quad \begin{cases}(-x-3)\sin x = x+3,\\ x+3<0.\end{cases}$$

$$tgx+\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}=2.$$

$$tgx+\frac{\cos x}{\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}}=2 \leftrightarrow tgx+\frac{\cos x}{|\sin x+\cos x|}=2.$$

$$\begin{cases}tgx+\dfrac{1}{tgx+1}=2,\\ \sin\left(x+\pi/4\right)>0,\end{cases}\quad \begin{cases}tgx-\dfrac{1}{tgx+1}=2,\\ \sin\left(x+\pi/4\right)<0.\end{cases}$$

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОГРАНИЧЕННОСТИ ФУНКЦИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.

При решении некоторых тригонометрических уравнений часто используется свойство ограниченности функций $\sin x$ и $\cos x$, то есть следующие неравенства:

$$|\sin x| \le 1$$

$$|\cos x| \le 1$$

$$|\sin x \pm \cos x| \le \sqrt{2}$$

$$\sin^4 x + \cos^7 x = 1$$

$$\sin^4 x + \cos^7 x = 1 \Leftrightarrow \sin^4 x + \cos^7 x = \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x(\sin^2 - 1) + \cos^2 x(\cos^5 x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} \left[\ \sin^2 x = 0,\ \sin^2 x - 1 = 0, \right. \\ \left[\ \cos^2 x = 0,\ \cos^5 x - 1 = 0. \right. \end{cases}$$

$$\sin^{1994} x + \cos^{1994} x = 1$$

$$\begin{cases} \left[\ \sin^2 x = 0,\ \sin^{1992} x - 1 = 0, \right. \\ \left[\ \cos^2 x = 0,\ \cos^{1992} x - 1 = 0. \right. \end{cases}$$

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ И КОМБИНИРОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ.

Не всякое уравнение *f(x)=g(x)* в результате преобразований может быть сведено к уравнению того или иного стандартного вида, для которого существует определенный метод решения. В таких случаях оказывается полезным использовать такие свойства функций *f(x)* и *g(x)*, как монотонность, ограниченность, четность, периодичность и др. Так, если одна из функций убывает, а вторая возрастает на промежутке *X*, то при наличии у уравнения *f(x)=g(x)* корня на этом промежутке, этот корень единственный, и тогда его, например, можно найти подбором. Если, далее, функция *f(x)* на промежутке *X* ограничена сверху, причем $\max_{x\in X} f(x) = A$, а функция *g(x)* ограничена снизу, причем $\min_{x\in X} g(x) = A$

то уравнение *f(x)=g(x)* равносильно системе уравнении $\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$

Иногда для решения уравнения *f(x)=g(x) можно построить графики функции y=f(x), y=g(x) и определить абсциссы точек пересечения. Также рассматривается применение производной для исследования тригонометрических уравнений.*

$\cos \pi x = x^2 - 4x + 5$ $\begin{cases} \cos \pi x = 1, \\ (x-2)^2 + 1 = 1. \end{cases}$ $x^2 - 3x + 4{,}25 = \cos^2 \pi x - 2\sin \pi x$

Способы отбора корней тригонометрических уравнений на заданном промежутке

- **Арифметический способ**

Перебор значений целочисленного параметра n и вычисление корней

- **Алгебраический способ**

Перебор значений целочисленного параметра *n* и вычисление корней

- **Геометрический способ**

Изображение корней на тригонометрической окружности с последующим отбором с учетом имеющихся ограничений

Арифметический способ

Перебор значений целочисленного параметра n и вычисление корней

$$\cos x = a, |a| \le 1$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \arccos a + 2\pi k, k \in Z \\ x = -\arccos a + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

- Решить уравнение
- Записать корни уравнения
- Разделить виды решения для косинуса; подсчитать значения x при целых n до тех пор, пока значения x не выйдут за пределы данного отрезка.
- Записать ответ.

x　　　k	-2	-1	0	1	2	…
$\arccos a + 2\pi k$						
$-\arccos a + 2\pi k$						

$$\sin x = a, |a| \le 1$$

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in Z$$

x　　　k	-2	-1	0	1	2	…
$(-1)^k \arcsin a + \pi k$						

Алгебраический способ

Решение неравенства относительно неизвестного параметра n и вычисление корней

1. Записать двойное неравенство для неизвестного (x), соответственное данному отрезку или условию; решить уравнение.
2. Для синуса и косинуса разбить решения на два.
3. Подставить в неравенство вместо неизвестного (x) найденные решения и решить его относительно n.
4. Учитывая, что n принадлежит Z, найти соответствующие неравенству значения n.
5. Подставить полученные значения n в формулу корней.

$$\cos x = a, |a| \le 1, [c; d]$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \arccos a + 2\pi k, k \in Z \\ x = -\arccos a + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

$$c \le \arccos a + 2\pi k \le d$$

$$c \le -\arccos a + 2\pi k \le d$$

Т.к. $k \in Z$, то $k_1 = \ldots;\ x_1 = \ldots$
$k_2 = \ldots;\ x_2 = \ldots$

$$\sin x = a, |a| \le 1, [c; d]$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi k, k \in Z \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

$$c \le \arcsin a + 2\pi k \le d$$

$$c \le \pi - \arcsin a + 2\pi k \le d$$

Т.к. $k \in Z$, то $k_1 = \ldots;\ x_1 = \ldots$
$k_2 = \ldots;\ x_2 = \ldots$

Геометрический способ

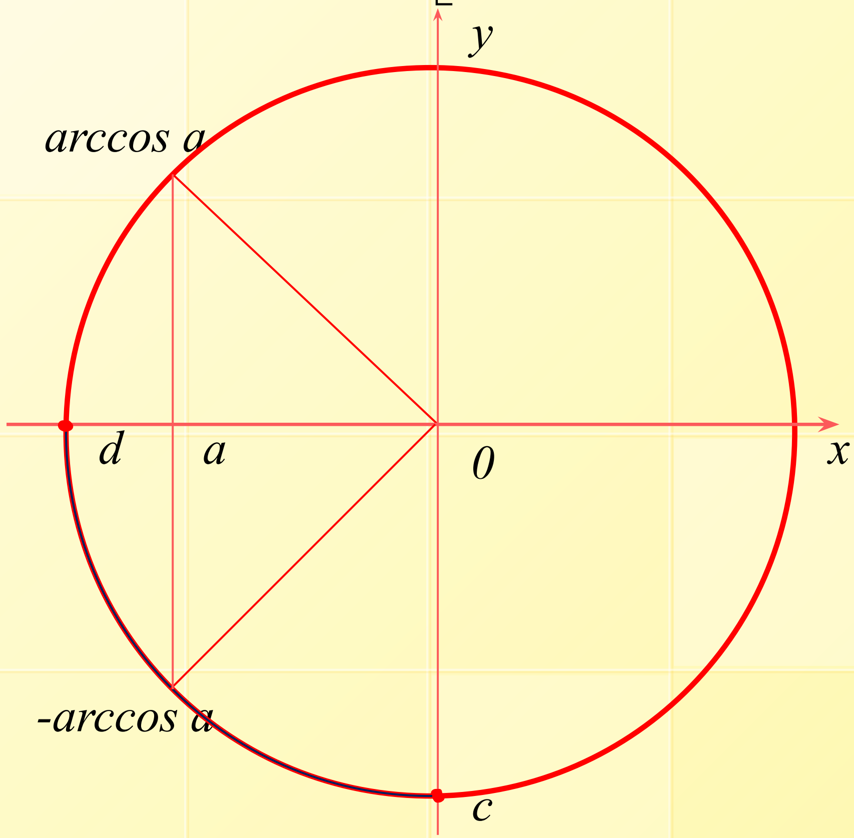
Изображение корней на тригонометрической <u>окружности</u> с последующим отбором с учетом имеющихся ограничений

$$\cos x = a, |a| \le 1, [c; d]$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \arccos a + 2\pi k, k \in Z \\ x = -\arccos a + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

На окружности

1. Решить уравнение.
2. Обвести дугу, соответствующую данному отрезку на окружности.
3. Разделить виды решений для синуса и косинуса.
4. Нанести решения уравнения на окружность.
5. Выбрать решения, попавшие на обведенную дугу.



Геометрический способ

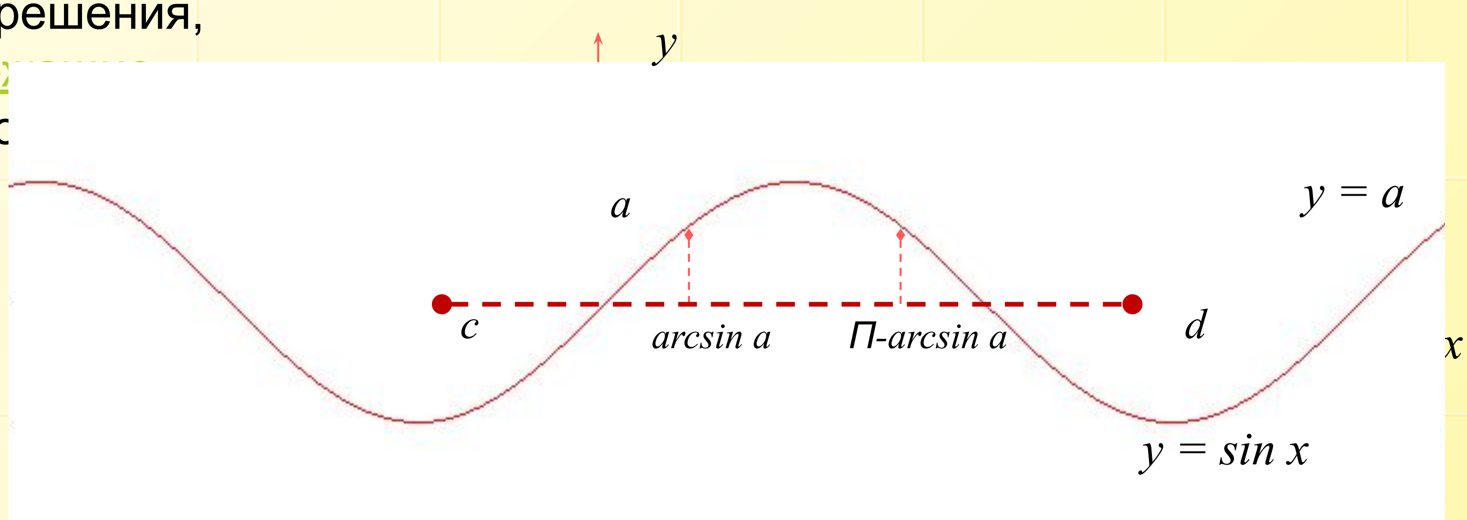
Изображение корней <u>на графике</u> с последующим отбором с учетом имеющихся ограничений

На графике

1. Решить уравнение.
2. Построить график данной функции, прямую $y = a$, на оси x отметить данный отрезок.
3. Найти точки пересечения графиков.
4. Выбрать решения, принадлеж
данному о

$$\sin\ x = a, |a| \le 1, [c; d]$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi k, k \in Z \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$



Пример: Найти все корни уравнения $10\cos^2(\frac{\pi}{2}+x)=\sin(\frac{7\pi}{2}+2x)+3,$ которые удовлетворяют условию $x\in[-\frac{2\pi}{3};\frac{19\pi}{12}].$

Решение.

$10\sin^2 x = -\cos 2x + 3;$

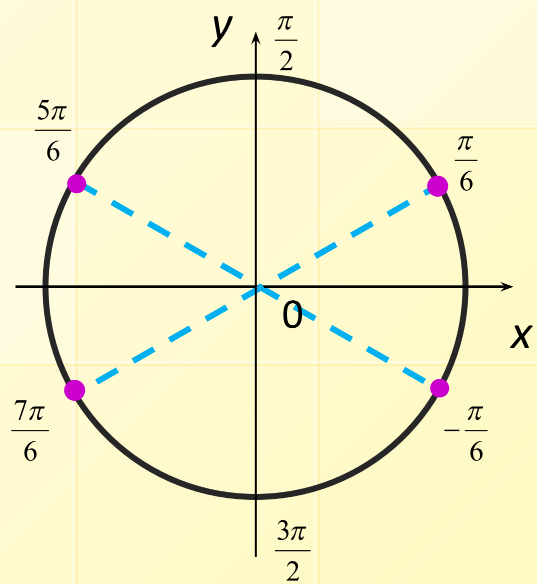
$10\sin^2 x = 2\sin^2 x - 1 + 3,$

$8\sin^2 x = 2;$

$$\sin^2 x=\frac{1}{4};$$

$$\sin x=\pm\frac{1}{2};$$

$$\left[\begin{array}{l} x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z,\\ x=(-1)^m\cdot(-\frac{\pi}{6})+\pi m, m\in Z;\end{array}\right.$$



С помощью числовой окружности получим:

$$x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z;$$

Выберем корни, удовлетворяющие условию задачи.

Из первой серии:

$$-\frac{2\pi}{3} \le \frac{\pi}{6} + \pi n \le \frac{19\pi}{12}, n \in Z;$$

$$-8\pi \le 2\pi + 12\pi n \le 19\pi, n \in Z;$$

$$-10 \le 12n \le 17, n \in Z.$$

Следовательно n=0 или n=1, то есть

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6}, \\ x = \frac{7\pi}{6}. \end{array}\right.$$

Из второй серии:

$$-\frac{2\pi}{3} \le -\frac{\pi}{6} + \pi n \le \frac{19\pi}{12}, n \in Z;$$

$$-8\pi \le -2\pi + 12\pi n \le 19\pi, n \in Z;$$

$$-6 \le 12n \le 21, n \in Z.$$

Следовательно n=0 или n=1, то есть

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6}, \\ x = \frac{5\pi}{6}. \end{array}\right.$$

$$\textit{Ответ}: \{\pm\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\}.$$

Спасибо за внимание!