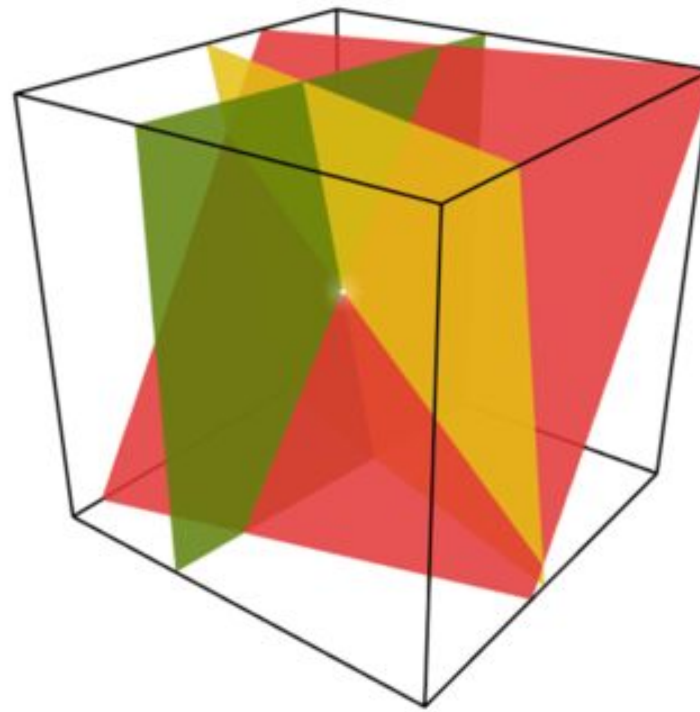
Алгоритмы решения систем линейных алгебраических уравнений

Система линейных уравнений

Система линейных алгебраических уравнений (*линейная система*, также употребляются аббревиатуры *СЛАУ*, *СЛУ*) — система уравнений, каждое уравнение в котором является линейным — алгебраическим уравнением первой степени.

В классическом варианте коэффициенты при переменных, свободные члены и неизвестные считаются вещественными числами, но все методы и результаты сохраняются (либо естественным образом обобщаются) на случай любых полей, например, комплексных чисел.

Решение систем линейных алгебраических уравнений — одна из классических задач линейной алгебры, во многом определившая её объекты и методы. Кроме того, линейные алгебраические уравнения и методы их решения играют важную роль во многих прикладных направлениях, в том



$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Система линейных уравнений

Общий вид системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Здесь **m** — количество уравнений, а n — количество переменных, $\mathbf{x_1, x_2, .., x_n}$ — неизвестные, которые надо определить, коэффициенты $\mathbf{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}}$ и свободные члены $\mathbf{b_1, b_2, \dots, b_m}$ предполагаются известными. Индексы коэффициентов в системах линейных уравнений ($\mathbf{a_{ij}}$) формируются по следующему соглашению: первый индекс (**i**) обозначает номер уравнения, второй (**j**) — номер переменной, при которой стоит этот коэффициент.

Система называется ***однородной***, если все её свободные члены равны нулю ($\mathbf{b_1, b_2, \dots, b_m = 0}$), иначе — ***неоднородной***.

Квадратная система линейных уравнений — система, у которой количество уравнений совпадает с числом неизвестных (**m=n**). Система, у которой число неизвестных больше числа уравнений является **недоопределённой**, такие системы линейных алгебраических уравнений также называются ***прямоугольными***. Если уравнений больше, чем неизвестных, то система является **переопределённой**.

Система линейных уравнений

Решение системы линейных алгебраических уравнений — совокупность **n** чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, таких что их соответствующая подстановка вместо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в систему обращает все её уравнения в тождества.

Система называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если у неё нет ни одного решения. Решения считаются **различными**, если хотя бы одно из значений переменных не совпадает. Совместная система с единственным решением называется **определённой**, при наличии более одного решения — **недоопределённой**.

В матричной форме система линейных алгебраических уравнений может быть представлена в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$Ax = b$$

Здесь **A** — это матрица системы, **x** — столбец неизвестных, а **b** — столбец свободных членов. Если к матрице **A** приписать справа столбец свободных членов, то получившаяся матрица называется расширенной

Система линейных уравнений

Пример

Система из двух уравнений с двумя неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 6, \\ 4x_1 + 9x_2 = 15. \end{cases}$$

Чтобы найти неизвестные $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ нужно решить верхнее уравнение относительно $\mathbf{x_1}$:

$$x_1 = 3 - \frac{3}{2}x_2,$$

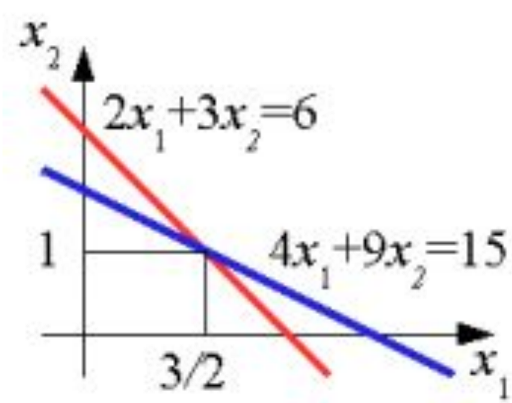
Затем подставить полученное решение в нижнее уравнение:

$$4\left(3 - \frac{3}{2}x_2\right) + 9x_2 = 15.$$

Получено решение:

$$x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 1$$

Данную систему можно наглядно изобразить на графике в виде двух прямых



Система линейных уравнений

Пример

Швейная фабрика в течении трех дней производила костюмы, плащи и куртки. Известны объемы выпуска продукции за три дня и денежные затраты на производство за эти три дня. Найти себестоимость единицы продукции каждого вида.

Знаая затраты на каждый день и количество произведенной продукции за день, составим систему линейных уравнений:

50x+10y+30z=176;
35x+25y+20z=168;
40x+20y+30z=184.

День	Объем выпуска продукции(единиц)			Затраты (тыс.усл.ед)
	Костюмы	Плащи	Куртки	
I	50	10	30	176
II	35	25	20	168
III	40	20	30	184

Себестоимость **1,8 тыс.усл.ед** для производства одного костюма, **2,6 тыс.усл.ед**- для производства одного плаща и **2 тысячи усл.ед.** - для производства одного плаща.

Методы решения СЛАУ

Прямые методы дают алгоритм, по которому можно найти точное решение систем линейных алгебраических уравнений. **Итерационные методы** основаны на использовании повторяющегося процесса и позволяют получить решение в результате последовательных приближений.

Некоторые прямые методы:

- Метод Гаусса
- Метод Гаусса — Жордана
- Метод Крамера
- Матричный метод
- Метод прогонки

Итерационные методы:

- Метод Якоби (метод простой итерации)
- Метод Гаусса — Зейделя
- Метод релаксации
- Многосеточный метод

Метод Гаусса

Наиболее распространенным методом решения систем линейных алгебраических уравнений является **метод Гаусса**, в основе которого лежит идея последовательного исключения неизвестных.

Метод Гаусса включает в себя **2 стадии**:

- последовательное (прямое) исключение;
- обратная подстановка.

Последовательное исключение

Исключения Гаусса основаны на идее последовательного исключения переменных по одной до тех пор, пока не останется только одно уравнение с одной переменной в левой части. Затем это уравнение решается относительно единственной переменной. Таким образом, систему уравнений приводят к треугольной (ступенчатой) форме. Для этого среди элементов первого столбца матрицы выбирают ненулевой (а чаще максимальный) элемент и перемещают его на крайнее верхнее положение перестановкой строк. Затем нормируют все уравнения, разделив его на коэффициент a , где i– номер столбца.

$$\begin{cases} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} \cdot x_n = \frac{y_1}{a_{11}} \\ x_1 + \frac{a_{22}}{a_{21}} \cdot x_2 + \cdots + \frac{a_{2n}}{a_{21}} \cdot x_n = \frac{y_2}{a_{21}} \\ \qquad \qquad \qquad \dots \\ x_1 + \frac{a_{n2}}{a_{n1}} \cdot x_2 + \cdots + \frac{a_{nn}}{a_{n1}} \cdot x_n = \frac{y_n}{a_{n1}} \end{cases}$$

Метод Гаусса

Затем вычитают получившуюся после перестановки первую строку из остальных строк:

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}} \cdot x_2 + \cdots + \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \cdot x_n = \dfrac{y_1}{a_{11}} \\ 0 + \left(\dfrac{a_{22}}{a_{21}} - \dfrac{a_{12}}{a_{11}}\right) \cdot x_2 + \cdots + \left(\dfrac{a_{2n}}{a_{21}} - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}\right) \cdot x_n = \left(\dfrac{y_2}{a_{21}} - \dfrac{y_1}{a_{11}}\right) \\ \cdots \\ 0 + \left(\dfrac{a_{n2}}{a_{n1}} - \dfrac{a_{12}}{a_{11}}\right) \cdot x_2 + \cdots + \left(\dfrac{a_{nn}}{a_{n1}} - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}\right) \cdot x_n = \left(\dfrac{y_n}{a_{n1}} - \dfrac{y_1}{a_{11}}\right) \end{cases}$$

Получают новую систему уравнений, в которой заменены соответствующие коэффициенты.

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12} \cdot x_2 + \cdots + a'_{1n} \cdot x_n = y'_1 \\ 0 + a'_{22} \cdot x_2 + \cdots + a'_{2n} \cdot x_n = y'_2 \\ \cdots \\ 0 + a'_{n2} \cdot x_2 + \cdots + a'_{nn} \cdot x_n = y'_n \end{cases}$$

Метод Гаусса

После того, как указанные преобразования были совершены, первую строку и первый столбец мысленно вычёркивают и продолжают указанный процесс для всех последующих уравнений пока не останется уравнение с одной неизвестной:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12} \cdot x_2 + a'_{13} \cdot x_3 + \cdots + a'_{1n} \cdot x_n = y'_1 \\ 0 + x_2 + a''_{23} \cdot x_3 + \cdots + a''_{2n} \cdot x_n = y''_2 \\ 0 + 0 + x_3 + \cdots + a'''_{3n} \cdot x_n = y'''_3 \\ \cdots \\ 0 + 0 + 0 + \cdots + x_n = y_n^{n\prime} \end{cases}$$

Метод Гаусса

Обратная подстановка

Обратная подстановка предполагает подстановку полученного на предыдущем шаге значения переменной $\boldsymbol{x_n}$ в предыдущие уравнения:

$$x_{n-1} = y_{n-1}^{(n-1)'} - a_{(n-1)n}^{(n-1)'} \cdot x_n$$

$$x_{n-2} + a_{(n-2)(n-1)}^{(n-2)'} \cdot x_{n-1} = y_{n-2}^{(n-2)'} - a_{(n-2)n}^{(n-2)'} \cdot x_n$$

...

$$x_2 + a''_{23} \cdot x_3 + \cdots + a''_{2(n-1)} \cdot x_{n-1} = y''_2 - a''_{2n} \cdot x_n$$

$$x_1 + a'_{12} \cdot x_2 + a'_{13} \cdot x_3 + \cdots + a'_{1(n-1)} \cdot x_{n-1} = y'_1 - a'_{1n} \cdot x_n$$

Эта процедура повторяется для всех оставшихся решений:

Метод Гаусса

Эта процедура повторяется для всех оставшихся решений:

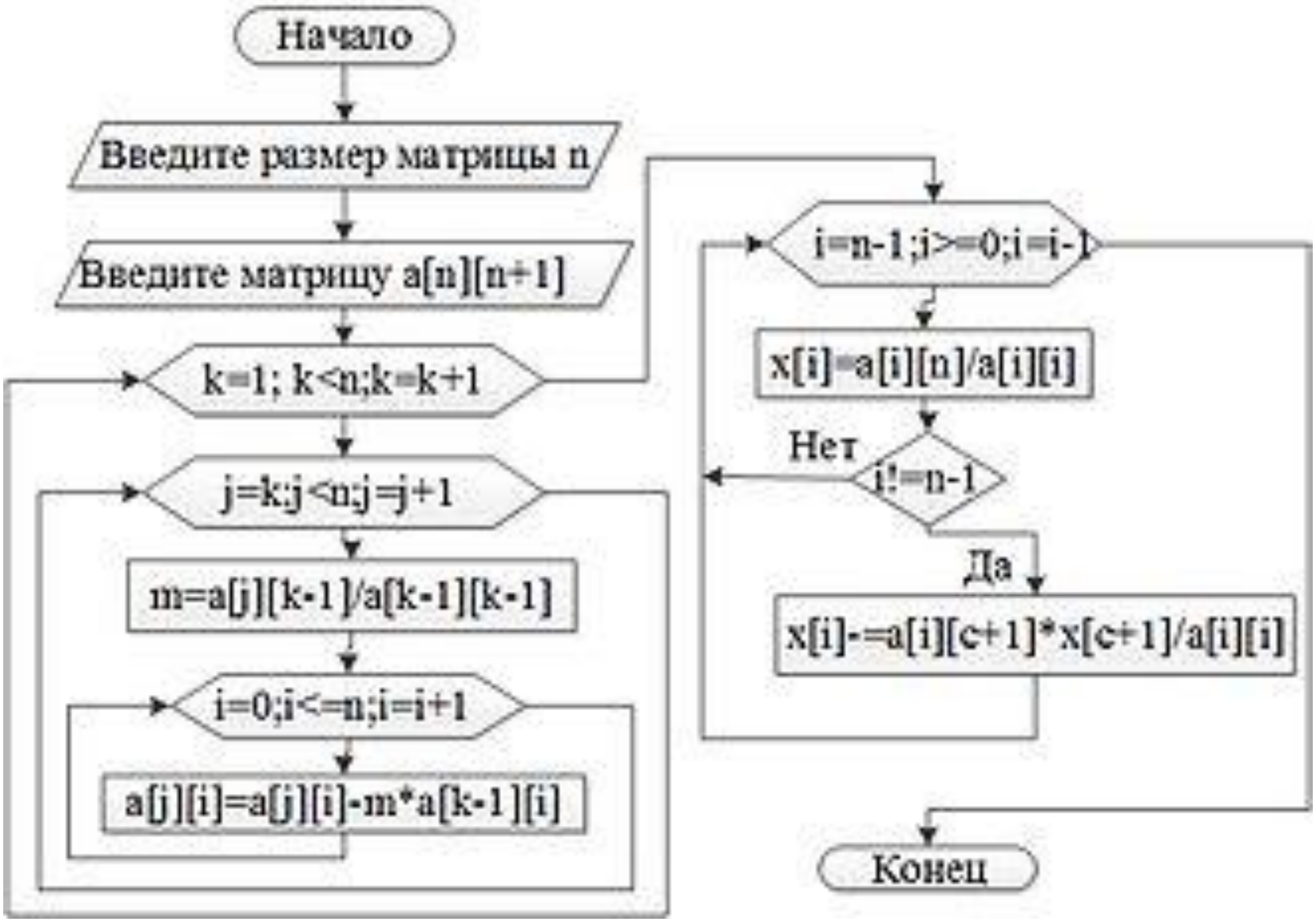
$$x_{n-2} = \left(y_{n-2}^{(n-2)'} - a_{(n-2)n}^{(n-2)'} \cdot x_n\right) - a_{(n-2)(n-1)}^{(n-2)'} \cdot x_{n-1}$$

...

$$x_2 + a''_{23} \cdot x_3 + \cdots = (y''_2 - a''_{2n} \cdot x_n) - a''_{2(n-1)} \cdot x_{n-1}$$

$$x_1 + a'_{12} \cdot x_2 + a'_{13} \cdot x_3 + \cdots = (y'_1 - a'_{1n} \cdot x_n) - a'_{1(n-1)} \cdot x_{n-1}$$

Метод Гаусса



Метод Гаусса

Приме
р

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 36 \\ 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 47 \\ 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = 37 \end{cases}$$

Дана система уравнений

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 47 \\ 37 \end{bmatrix}$$

В матричной форме

$$\begin{bmatrix} \boxed{5} & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 \\ 36 \\ 37 \end{bmatrix}$$

Выбираем строку с максимальным коэффициентом $\boldsymbol{a_{i1}}$ и меняем ее с первой.

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 1 & \frac{4}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{47}{5} \\ \frac{36}{2} \\ \frac{37}{2} \end{bmatrix}$$

Нормируем уравнения относительно коэффициента при $\boldsymbol{x_1}$

Метод Гаусса

Приме

Вычитаем 1 уравнение из 2 и 3

$$\begin{bmatrix}1 & 0.4 & 0.2\\0 & 1.6 & 0.3\\0 & 1.1 & 1.8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9.4\\8.6\\9.1\end{bmatrix}$$

Выбираем строку с наибольшим коэффициентом при $\boldsymbol{a_{i2}}$ (уравнение 1 не рассматривается) и перемещаем ее на место 2.

$$\begin{bmatrix}1 & 0.4 & 0.2\\0 & \boxed{1.6} & 0.3\\0 & 1.1 & 1.8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9.4\\8.6\\9.1\end{bmatrix}$$

Нормируем 2 и 3 уравнения относительно коэффициента при $\boldsymbol{x_2}$

$$\begin{bmatrix}1 & 0.4 & 0.2\\0 & 1 & 0.1875\\0 & 1 & 1.636\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9.4\\5.375\\8.272\end{bmatrix}$$

Вычитаем уравнение 2 из 3

$$\begin{bmatrix}1 & 0.4 & 0.2\\0 & 1 & 0.1875\\0 & 0 & 1.4489\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9.4\\5.375\\2.897\end{bmatrix}$$

Метод Гаусса

Приме р

$$\begin{bmatrix}1 & 0.4 & 0.2\\0 & 1 & 0.166\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9.4\\5.333\\2\end{bmatrix}$$

Нормируем уравнение 3 относительно коэффициента при x_3

Откуда получаем x_3=2. Подставляем полученное значение в уравнения 2 и 1 получаем

$$x_2 = 5.333 - 0.1666\cdot 2 = 5.333 - 0.333 = 5$$

$$x_1 + 0.4\cdot x2 = 9.4 - 0.2\cdot 2 = 9.4 - 0.4 = 9$$

Подставляя полученное значение x_2=5 в уравнение 1, найдем

$$x_1 = 9 - 0.4\cdot 5 = 9 - 2 = 7$$

Таким образом, решением системы уравнений будет вектор $\boldsymbol{X} = [7 \quad 5 \quad 2]^T$

Метод Гаусса

```
#include <stdio.h>
#define N   3
#define N1   N+1

float matrix[N][N1]={{2,4,1,36},
                  {5,2,1,47},
                  {2,3,4,37}
                 };

 //точность
float epsilon=0.1;

 // вывод матрицы
void ShowMatrix(void)
{ printf("Sistema: \n");
    int i,j;
  for (i=0;i<N;i++)
  {
          printf("|");

    for (j=0;j<N;j++)

     printf("%+3.0fx%d",matrix[i][j],j+1);
    printf("=%3.0f\n",matrix[i][N]);
  }
}
```

```
int main()
{
  float tmp,xx[N1];
  short int i,j,k;
  ShowMatrix();
  /*Реализация метода Гаусса*/
 for (i=0;i<N;i++)
  {
    tmp=matrix[i][i];
    for (j=N;j>=i;j--) matrix[i][j]/=tmp;
    for (j=i+1;j<N;j++)
    {
      tmp=matrix[j][i];
      for (k=N;k>=i;k--)
        matrix[j][k]-=tmp*matrix[i][k];
    }
  }
  xx[N-1]=matrix[N-1][N];
  for (i=N-2;i>=0;i--)
  {
    xx[i]=matrix[i][N];
    for (j=i+1;j<N;j++) xx[i]-=matrix[i][j]*xx[j];
  }
printf("\nMetod Gaussa:\n");
  for (i=0;i<N;i++)
    printf("x%d=%3.1f\n",i+1,xx[i]);
 system("pause");
 return 0;
}
```