

Статистические методы обработки экспериментальных данных



□ **Математическая статистика** –
раздел математики, посвященный
математическим методам
систематизации, обработки и
использования статистических
данных для научных и
практических выводов

А.Н. Колмогорови Ю.В. Прохоров

Источники изменчивости



действие
известных
причин и
факторов



действие
неизвестных
причин и
факторов



- **Закон больших чисел** – это объективный математический закон, согласно которому совместное действие большого числа случайных факторов приводит к результату, почти не зависящему от случая
- **Статистический подход** – это выявление закономерной изменчивости на фоне случайных факторов и причин

Основные понятия



Генеральная и выборочная совокупности

- **Совокупность** – исходное понятие математической статистики, объединяющее обычно какое-либо множество испытуемых (учащихся) по одному или нескольким интересующим признакам.

Генеральная совокупность



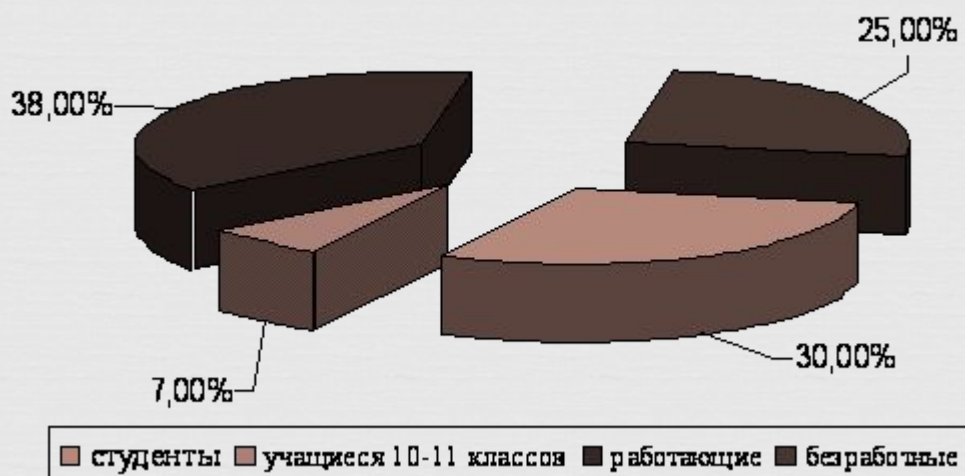
Выборочная совокупность



Выборочная совокупность - уменьшенная копия
генеральной совокупности

Репрезентативность

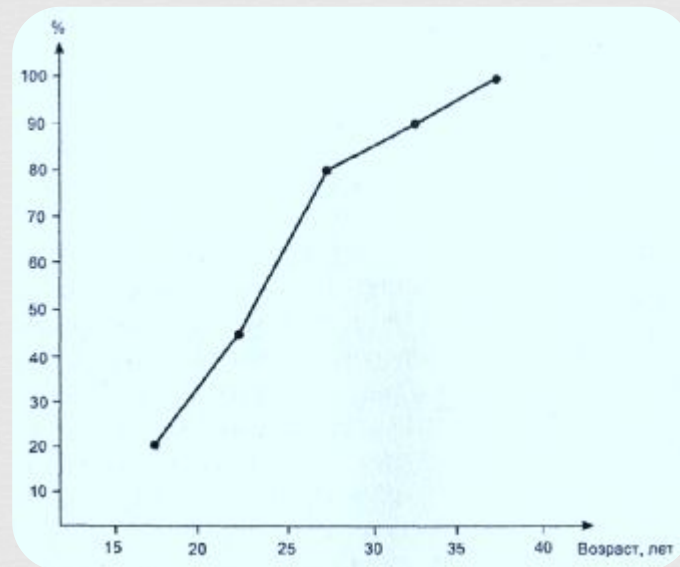
*правильная представимость в
выборке пропорций генеральной
совокупности*



Описательная статистика



□ **Переменная (variable)** - это параметр измерения, который можно контролировать или которым можно манипулировать в исследовании.



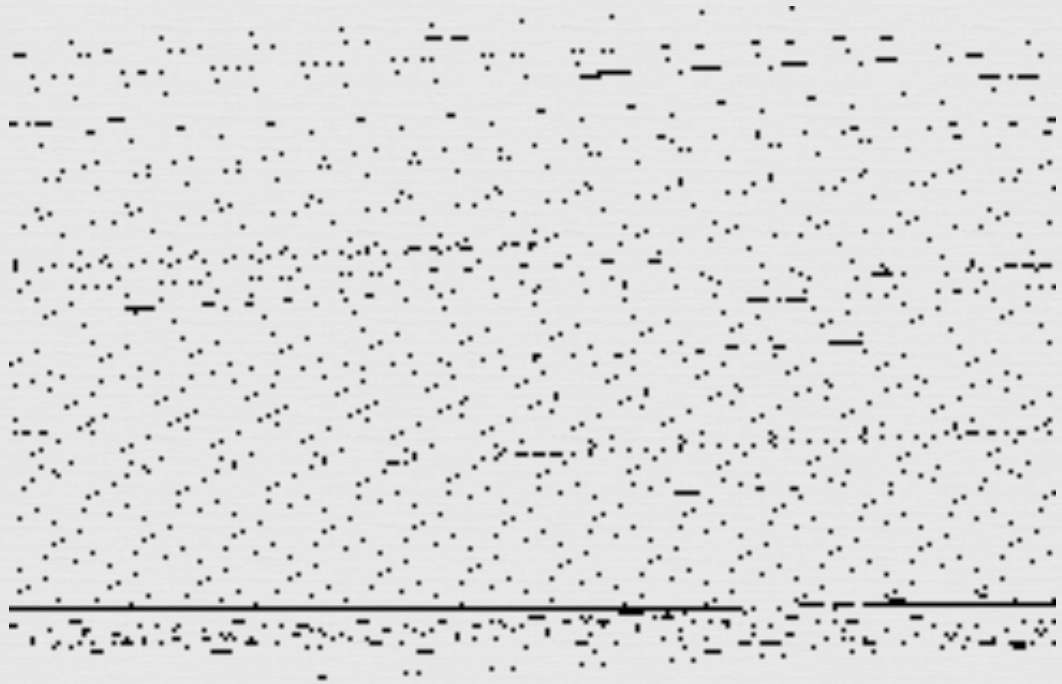
□ *Относительное значение параметра - отношение числа объектов, имеющих этот показатель, к величине выборки. Выражается относительным числом или в процентах (процентное значение)*



□ *Удельное значение данного признака*
- расчетная величина, показывающая
количество объектов с данным
показателем, которое содержалось бы в
условной выборке, состоящей из 10, или
100, 1000 и т. д. объектов.

$$x = \frac{100 * n}{N}$$

□ *Минимум и максимум – минимальное и максимальное значения переменной*



- Среднее (оценка среднего, выборочное среднее) – сумма значений переменной, деленная на n (число значений переменной)

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^N X_i}{N}$$

Пример



Результаты контроля посещаемости внеклассных мероприятий

Классы	1	2	3	4
Экспериментальный (20 чел.)	18	20	20	18
Контрольный (30 чел)	15	23	10	28

□ **Выборочное среднее** является той точкой, сумма отклонений наблюдений от которой равна 0

$$(\bar{x} - x_1) + (\bar{x} - x_2) + \dots + (\bar{x} - x_n) = 0$$

☞ **Дисперсия выборки или выборочная дисперсия** (от английского variance) – *это мера изменчивости переменной*

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

\bar{X} — *выборочное среднее,*

N — *число наблюдений в выборке*

Пример



Результаты контроля посещаемости внеклассных мероприятий

Классы	1	2	3	4		
Экспериментальный (20 чел.)	18	20	20	18	19	1
Контрольный (30 чел)	15	23	10	28	19	48,5

☞ **Стандартное отклонение, среднее квадратическое отклонение** вычисляется как корень квадратный из дисперсии

$$\sigma_{\text{ЭКСП}} = \sqrt{\sigma^2}$$

Пример

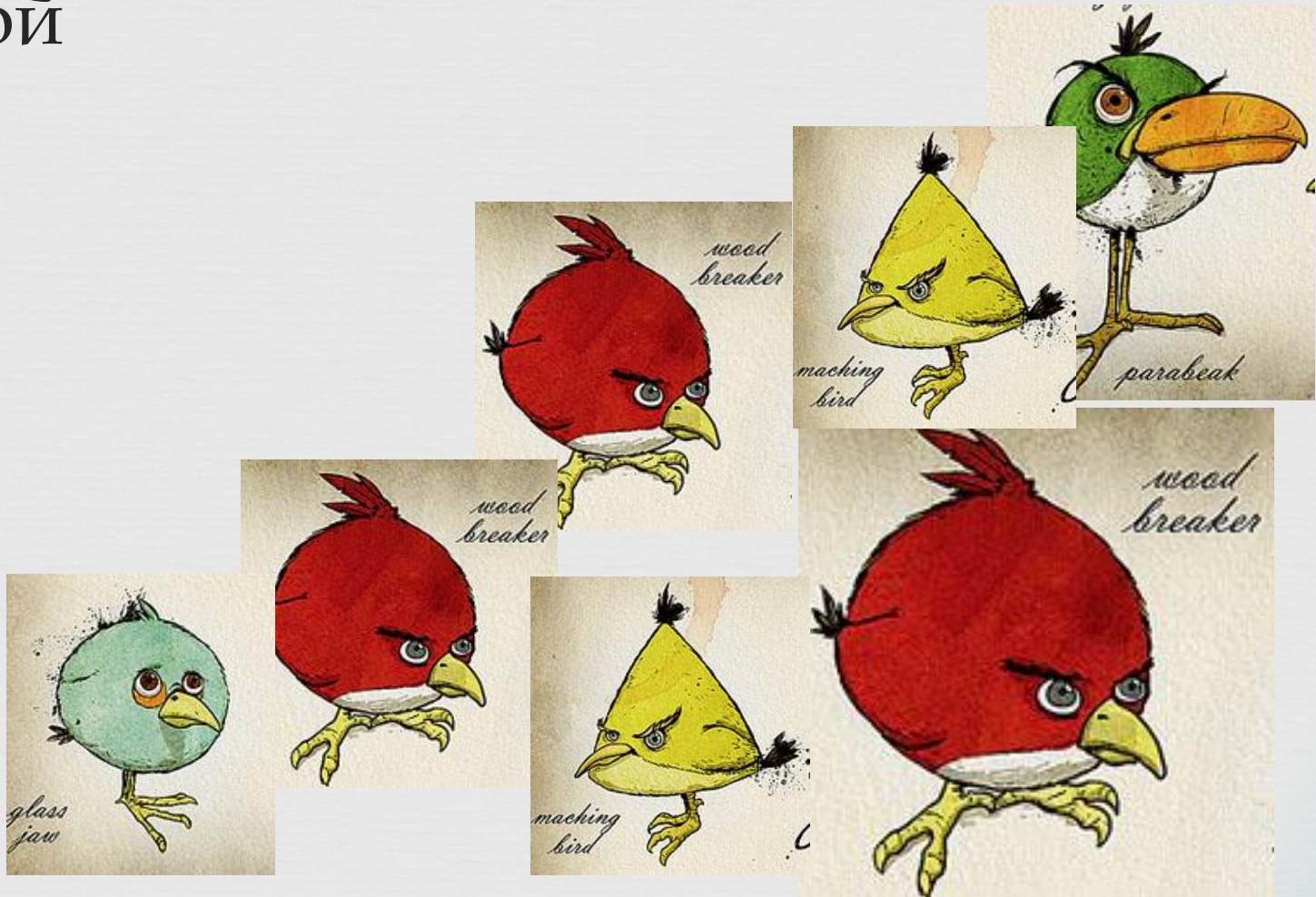


Результаты контроля посещаемости внеклассных мероприятий

Классы	σ		
Экспериментальный (20 чел.)	19	1	1
Контрольный (30 чел)	19	48,5	6,96

- **Медиана** разбивает выборку на две равные части. Половина значений переменной лежит ниже медианы, половина — выше
- **Квартили** представляют собой значения, которые делят две половины выборки (разбитые медианой) еще раз пополам

□ Мода представляет собой максимально часто встречающееся значение переменной



Пример

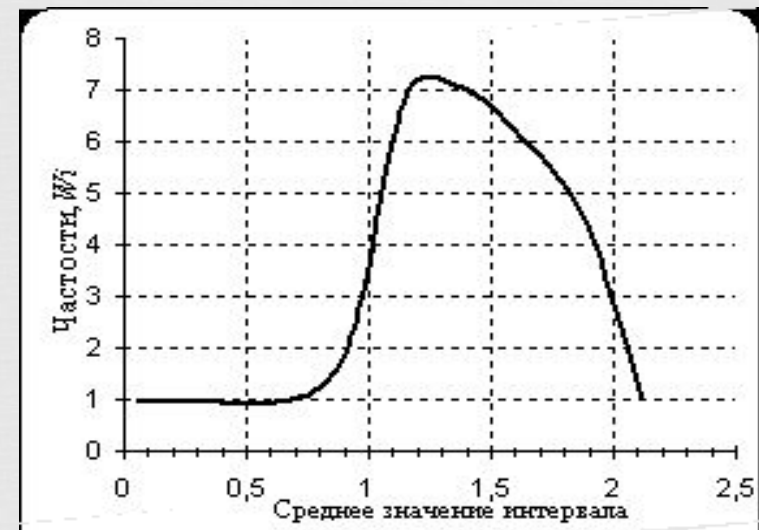
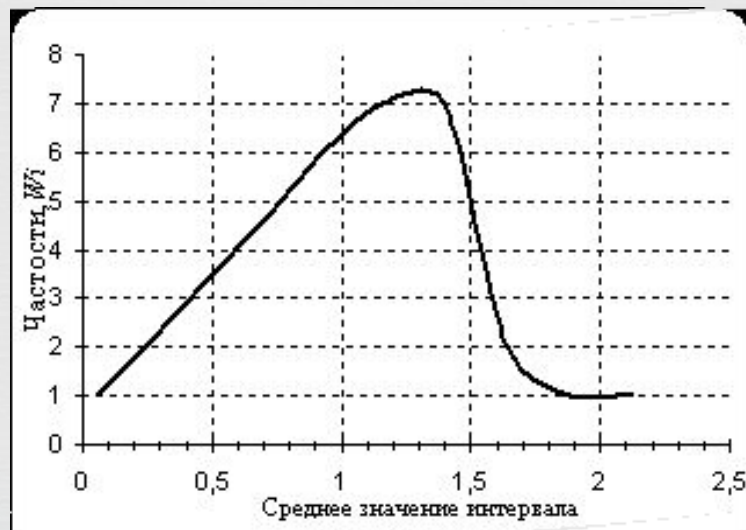


Ряд 1	10	17	21	24	25
-------	----	----	----	----	----

Ряд 2	10	15	3	15	8
-------	----	----	---	----	---

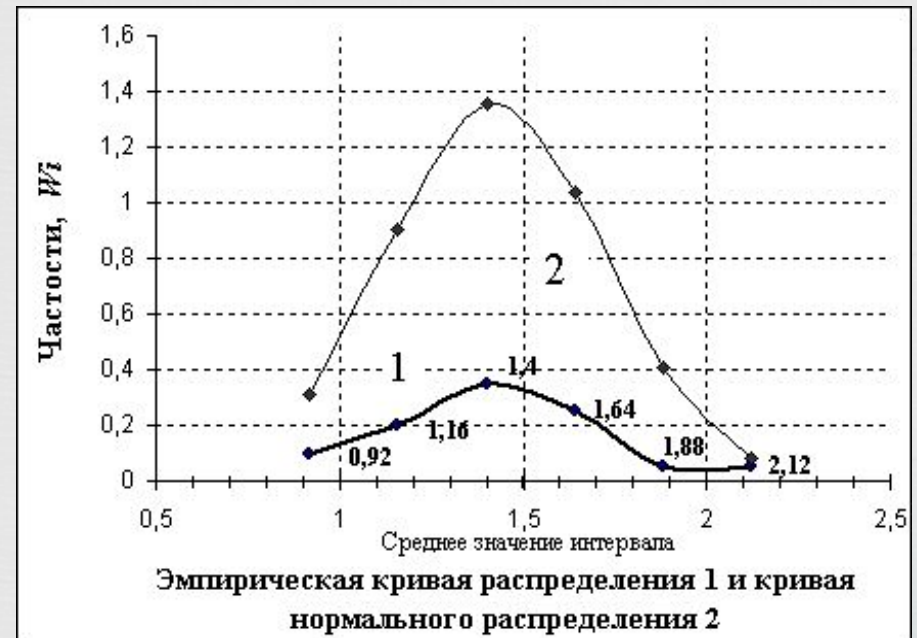
Ассиметрия – это свойство распределения выборки, которое характеризует несимметричность распределения

$$A = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^3 / n}{\sigma^3}$$



☞ **Эксцесс** – это мера крутости кривой распределения

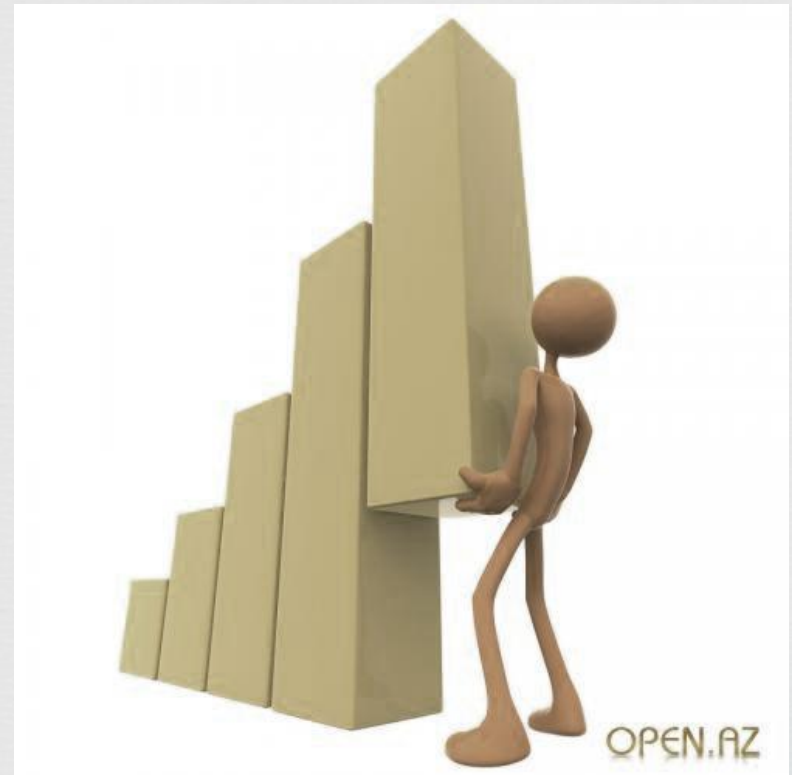
$$E = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^4 / n}{\sigma^4} - 3$$



Понятие нулевой и альтернативной гипотезы



□ **Статистическая гипотеза** – это предположение о свойствах случайных величин или событий, которое мы хотим проверить по имеющимся данным.



Пример



- **Гипотеза 1.** Успеваемость класса стохастически (вероятностно) зависит от уровня обучаемости учащихся.
- **Гипотеза 2.** Усвоение начального курса математики не имеет существенных различий у учащихся, начавших обучение с 6 или 7 лет.
- **Гипотеза 3.** Проблемное обучение в первом классе эффективнее по сравнению с традиционной методикой обучения в отношении общего развития учащихся

- **Нулевая гипотеза** – это основное проверяемое предположение, которое обычно формулируется как отсутствие различий, отсутствие влияния фактора, отсутствие эффекта, равенство нулю значений выборочных характеристик и т.п.
- **Альтернативная гипотеза** – альтернативное проверяемое предположение (не всегда строго противоположное или обратное первому).

Пример



H0: Различие в результатах выполнения двумя группами учащихся одной и той же контрольной работы вызвано лишь случайными причинами

H1: Уровни выполнения работы в двух группах учащихся различны и это различие определяется влиянием неслучайных факторов, например, тех или других методов обучения

Ошибки при проверке гипотез

- — можно отвергнуть нулевую гипотезу, когда она на самом деле верна (так называемая **ошибка первого рода**)
- — можно принять нулевую гипотезу, когда она на самом деле не верна (так называемая **ошибка второго рода**)

Ошибки при проверке гипотез

- — можно отвергнуть нулевую гипотезу, когда она на самом деле верна (так называемая **ошибка первого рода**)
- — можно принять нулевую гипотезу, когда она на самом деле не верна (так называемая **ошибка второго рода**)

Ошибки при проверке гипотез

- **Уровень значимости** – это *вероятность ошибки первого рода при принятии решения (вероятность ошибочного отклонения нулевой гипотезы).*

Ошибки при проверке гипотез

- Допустимая вероятность ошибки первого рода ($P_{кр}$) может быть равна 5% или 1% (0.05 или 0.01).

□ Статистика критерия (T) – некоторая функция от исходных данных, по значению которой проверяется нулевая гипотеза



- **Критическая область** – совокупность значений критерия, при котором нулевую гипотезу отвергают
- **Область принятия нулевой гипотезы** (область допустимых значений) – совокупность значений критерия, при котором нулевую гипотезу принимают



Общие принципы проверки статистических гипотез



Процедура проверки нулевой гипотезы

ГИПОТЕЗЫ

- задается допустимая вероятность ошибки первого рода ($P_{кр} = 0,05$)
- выбирается статистика критерия (T)
- ищется область допустимых значений
- по исходным данным вычисляется значение статистики T
- если T (*статистика критерия*) принадлежит области принятия нулевой гипотезы, то нулевая гипотеза принимается, в противном случае нулевая гипотеза отвергается и принимается альтернативная гипотеза

Параметрические критерии

основываются на предположении о том, что распределение выборок подчиняется нормальному (гауссовому) закону распределения.

Применяются для выборок большого объема ($n \geq 100$; при доказанном нормальном распределении $n \geq 50$)

Непараметрические критерии

базируются на предположении о независимости наблюдений.

Допустимо применение для выборок малого объема ($n \leq 50$)

Критерии различия для независимых выборок

t-тест для независимых выборок
(Критерий Стьюдента)

Критерий χ_2 , критерий серий
Вальда – Вольфовица, Манна –
Уитни, 7-тест и двухвыборочный
критерий Колмогорова –
Смирнова

Критерии различия для зависимых выборок

t-критерий для зависимых
выборок (Критерий Стьюдента)

критерий знаков (G-критерий) и
критерий Вилкоксона
Если рассматриваемые
переменные категориальны, то
подходящим является хи-квадрат
Макнемара.

Оценка степени зависимости между переменными

коэффициент корреляции
Пирсона.

коэффициенты ранговой
корреляции Спирмена R,
статистика Кендалла и

Выбор критерия



Выбор критерия



Алгоритм выбора переменных для анализа количественных данных*

Данные подчиняются закону нормального распределения?

Да

Нет

Группы независимые, связанные или проводится сравнение с заданным значением?

Независимые

Связанные

С заданным значением

Независимые

Связанные

С заданным значением

Сколько групп сравниваем?

2

≥ 3

2

≥ 3

1

2

≥ 3

2

≥ 3

1

T-критерий Стьюдента для независимых выборок, Критерий Крамера-Vэлча (при различиях в дисперсиях)
Однофакторный дисперсионный анализ, t-критерий Стьюдента с поправкой Бонферрони

T-критерий Стьюдента для парных выборок

Дисперсионный анализ для повторных наблюдений

T-критерий Стьюдента для одной выборки

Критерий Манна-Уитни, Q-Критерий Розенбаума

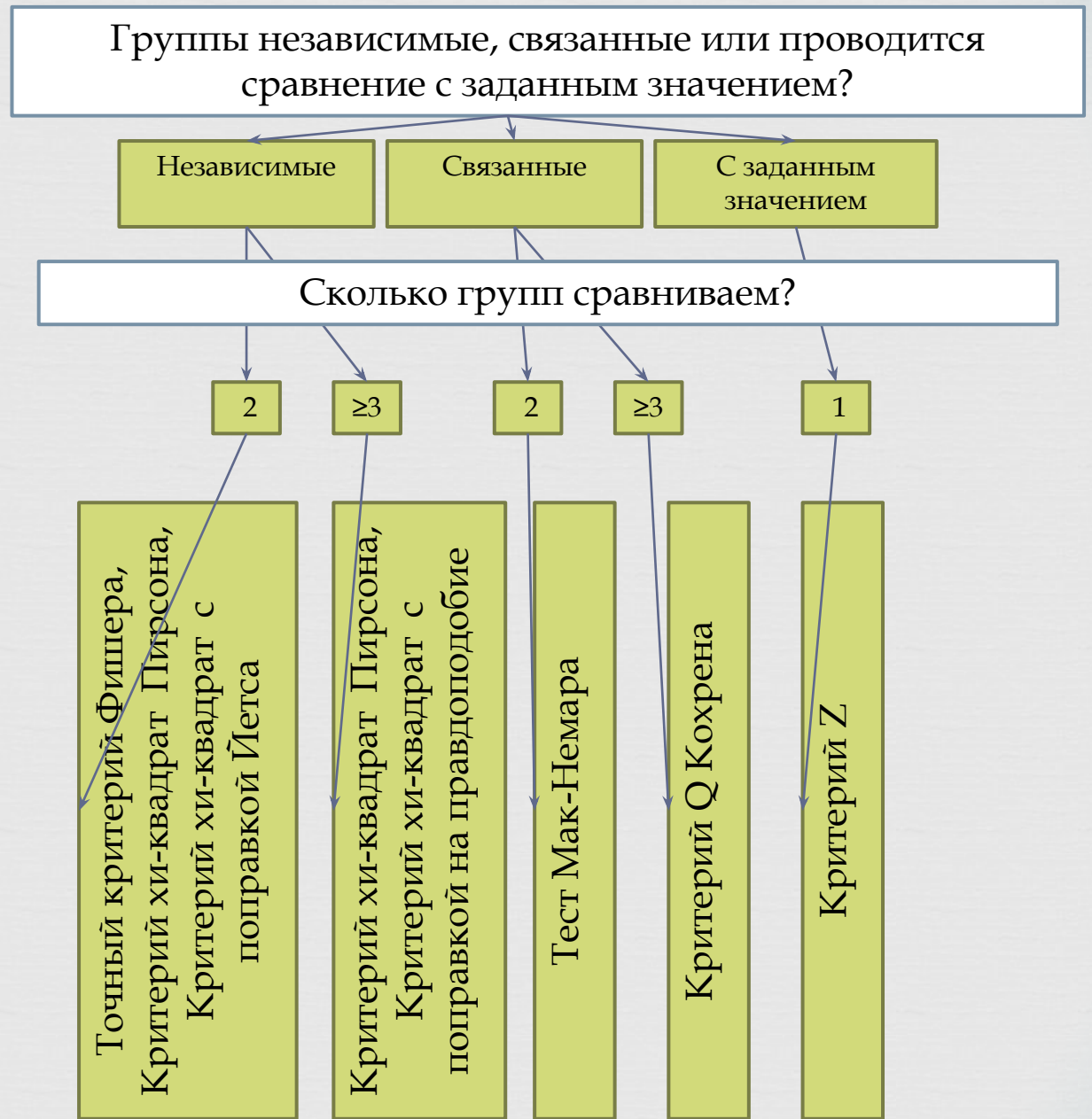
Критерий Краскела-Уоллиса

Критерий Уилкоксона G-Критерий знаков,

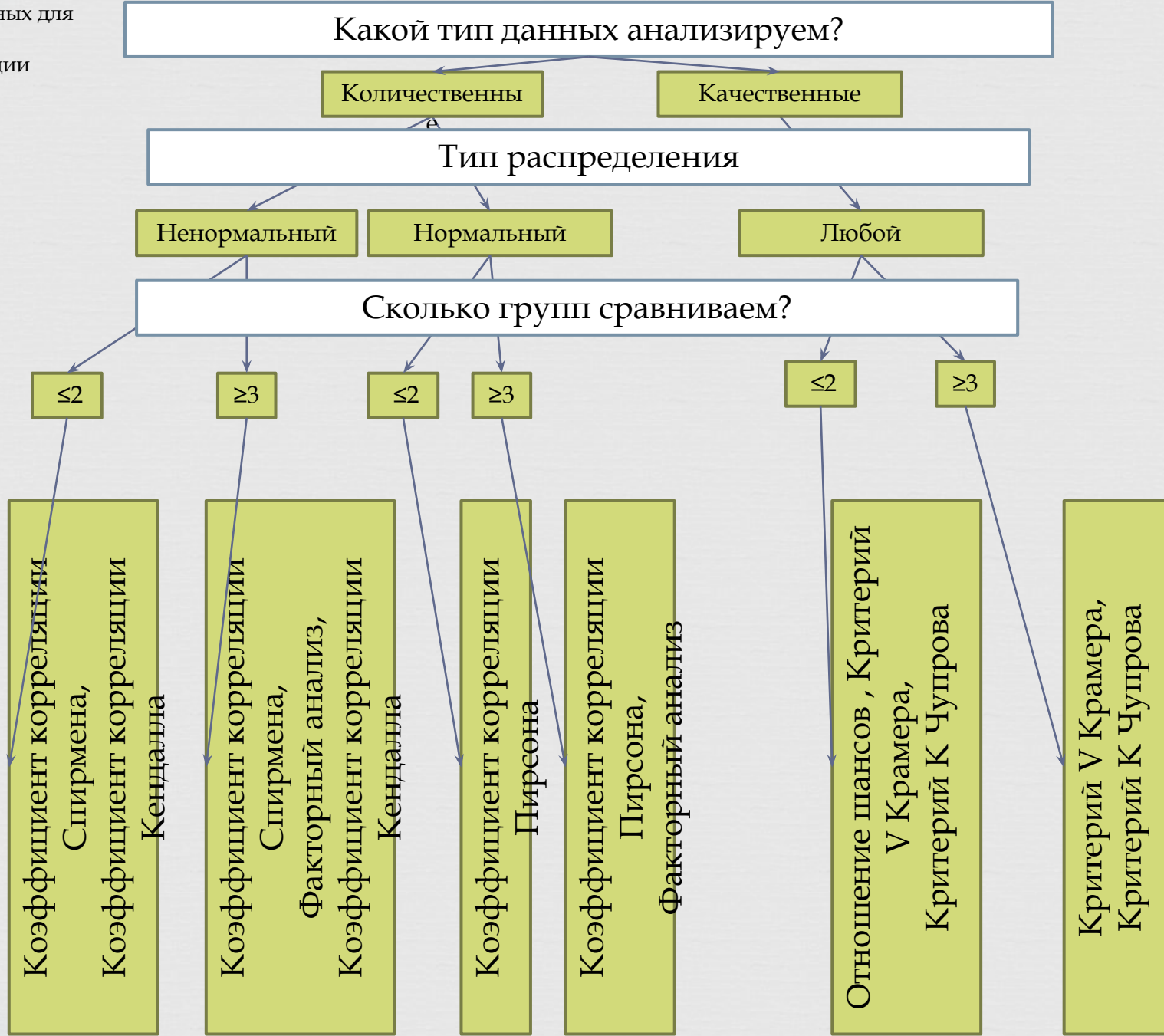
Критерий Фридмана

Критерий Уилкоксона

Алгоритм выбора переменных для анализа качественных данных*



Алгоритм выбора
переменных для
анализа
корреляции



Анализ количественных данных

<p>t-критерий Стьюдента для одной выборки</p>	<p>Параметрический критерий Сравнение количественных показателей одной группы гипотетическими Оперирует среднеарифметическим значением.</p>	<p>Доказанное нормальное распределение признака. Количество элементов не менее 50, желательное – более 100 Одна группа Сравнение данных с математическим ожиданием</p>
<p>T-критерий Стьюдента для парных выборок</p>	<p>Параметрический критерий Сравнение количественных показателей двух несвязанных групп. Оперирует среднеарифметическим значением.</p>	<p>Доказанное нормальное распределение признака. Два среза одной выборки</p>
<p>T-критерий Стьюдента для независимых выборок</p>	<p>Параметрический критерий Сравнение количественных показателей двух несвязанных групп. Оперирует среднеарифметическим значением.</p>	<p>Количество элементов не менее 50, желательное – более 100 Доказанное нормальное распределение признака. Равенство (гомоскедастичность) дисперсий Две несвязанные выборки. При попарном сравнении большого количества групп применяется поправка Бонферони (изменяется критический уровень значимости)</p>

Анализ количественных данных		
Однофакторный дисперсионный анализ	Применяется для оценки влияния определенных факторов на изменяемую величину. Применим в том случае, если мы имеем некий влияющий фактор, который имеет различные уровни или вариации. Оперировать среднеарифметическим значением, основан на сопоставлении сумм квадратов отклонений от средней арифметической	Количество элементов не менее 50, желательное – более 100 Доказанное нормальное распределение признака. Несвязанные выборки
Дисперсионный анализ для повторных наблюдений	Аналогичен однофакторному дисперсионному анализу, но применяется в случае, если мы имеем одну группу, наблюдаемую в разные промежутки времени. Оперировать среднеарифметическим значением, основан на сопоставлении сумм квадратов отклонений от средней арифметической	Количество элементов не менее 50 Доказанное нормальное распределение признака. Связанные выборки
Критерий Крамера-Уэлча	Применяется как замена Т-критерия Стьюдента для независимых выборок. Более прост в расчетах, не требует равенства дисперсий, более чувствителен при работе с группами, имеющими отклонение от нормального распределения или группами сравнительно малого объема Оперировать среднеарифметическим значением	Количество элементов не менее 50 Доказанное нормальное или близкое к нормальному распределение признака. Две несвязанные выборки

Анализ количественных данных		
Критерий Манна Уитни	непараметрический ранговый статистический критерий, используемый для сравнения двух независимых выборок по уровню какого-либо признака, измеренного количественно.	Суммарное значение участников групп – не менее 6-ти (или не менее 3х в каждой, или не менее 2х в одной и не менее 5-ти в другой) Независимые выборки
Критерий Уилкоксона (Вилкоксона)	Непараметрический ранговый статистический критерий, используемый для сравнения двух зависимых выборок по уровню какого-либо признака, измеренного количественно. *Поскольку методики расчета критериев Уилкоксона и Манна-Уитни во многом похожи их иногда рассматривают как один критерий: Вилкоксона-Мана-Уитни	Объем группы не менее 5-ти и не более 50-ти Зависимые выборки
Критерий Краскела-Уоллиса.	Непараметрический ранговый статистический критерий, используемый для сравнения трех и более независимых выборок по уровню какого-либо признака, измеренного количественно. Применяется аналогично критерию Манна-Уитни в тех случаях, когда нужно сравнить 3 и более группы	Суммарное значение участников групп – не менее 6-ти (или не менее 3х в каждой, или не менее 2х в одной и не менее 5-ти в другой) Независимые выборки
Критерий Фридмана	непараметрический аналог дисперсионного анализа повторных измерений. Является обобщением критерия Уилкоксона для 3х и более наблюдений в связанных выборках	Объем группы не менее 5-ти и не более 50-ти Зависимые выборки
G-Критерий знаков	Предназначен для исследования определения направления сдвига в значениях исследуемого признака в двух выборках Определяет направленность сдвига, но не определяет его интенсивность (действительно ли повысилась успеваемость, но нельзя определить, насколько)	Количество человек в обоих замерах должно варьироваться от 5 до 300 Зависимые выборки

Анализ качественных данных

ТОЧНЫЙ КРИТЕРИЙ ФИШЕРА	используется для сравнения двух относительных показателей, характеризующих частоту определенного признака, имеющего два значения	Имеются только два значения (зачтено/незачтено, выполнено/не выполнено и т.д.) Малый объем выборки в т.ч. менее 5 членов в одной группе Независимые выборки
Критерий хи-квадрат Пирсона	метод позволяет оценить статистическую значимость различий двух или нескольких относительных показателей Сравнение происходит через сопоставление фактического распределения с математически ожидаемым	Число элементов в каждой ячейке четырехпольной таблицы не менее 10ти Если значения находятся в диапазоне от 5ти до 10ти – используется критерий Хи-квадрат с поправкой Йетса В случае анализа многопольных таблиц ожидаемое число наблюдений не должно принимать значения менее 5 более чем в 20% ячеек. Независимые выборки

Анализ качественных данных

<p>Тест Мак-Немара</p>	<p>Аналогичен по применению методу Критерий хи-квадрат Пирсона, применяется для изменений типа До-После (в связанных выборках) Этот метод позволяет сравнить долю респондентов, которые не имели некоторой характеристики (0) во время первого обследования (например до воздействия), но стали обладать ею во время повторного обследования (1), с долей тех, кто имел это свойство (1), но перестал иметь его после (0)</p>	<p>Имеются только два значения (зачтено/незачтено, выполнено/не выполнено и т.д.) Четырехпольная таблица (два среза, два возможных значения) Зависимые выборки</p>
<p>Критерий Q Кохрена</p>	<p>Аналогичен методу Мак-Немара для многопольной таблицы (более двух значений и\или более двух измерений) Основан на сопоставлении сумм квадратов отклонений от средней арифметической</p>	<p>Зависимые выборки Воздействие (отклик) является дихотомической переменной (т.е. принимает два значения - 0/1; да/нет)</p>
<p>Критерий Z</p>	<p>вычисляется как отношение разницы между случайной величиной и математическим ожиданием к стандартной ошибке этой случайной величины</p>	<p>Одна группа, сравнение с математическим ожиданием</p>

Критерий Стьюдента (t-критерий)



☞ а) случай независимых выборок

$$t_{\text{ЭМП}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma_{x-y}}$$

где \bar{x} , \bar{y} — средние арифметические в экспериментальной и контрольной группах,

σ_{x-y} - стандартная ошибка разности средних арифметических

Критерий Стьюдента (t-критерий)

☞ а) случай независимых выборок

$$\sigma_{x-y} = \sqrt{\frac{\sum(x_i + \bar{x}) + \sum(y_i + \bar{y})}{n_1 + n_2 - 2} * \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

где n_1 и n_2 соответственно величины первой и второй выборки.

Критерий Стьюдента (t-критерий)



☞ а) случай независимых выборок

Если $n_1 = n_2$, то стандартная ошибка разности средних арифметических будет считаться по формуле:

$$\sigma_{x-y} = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2 + \sum(y_i - \bar{y})^2}{(n-1)*n}} \quad (3)$$

где n величина выборки.

Подсчет **числа степеней свободы** осуществляется по формуле:

$$k = n_1 + n_2 - 2.$$

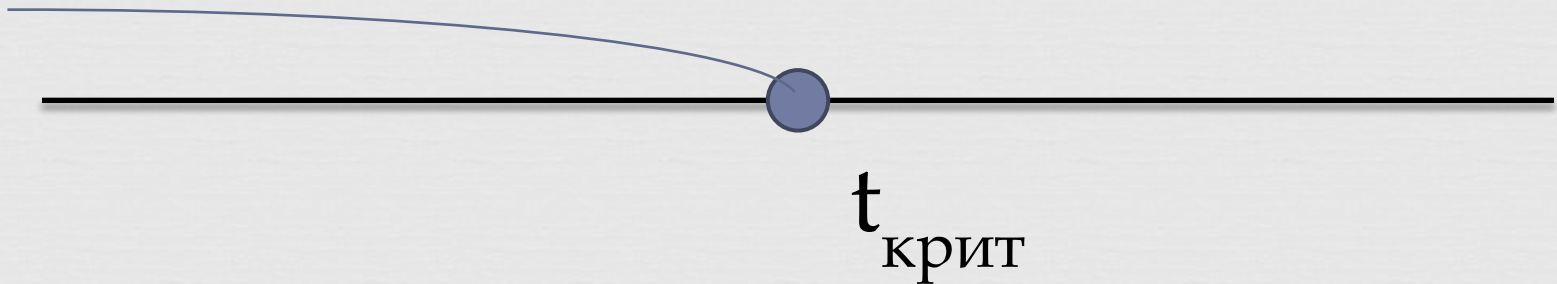
Критерий Стьюдента (t-критерий)

- Нулевая гипотеза принимается, если

$$t_{\text{ЭМП}} < t_{\text{крит}}$$

Область принятия нулевой гипотезы

Критическая область



Критерий Стьюдента (t-критерий)

Первая группа (экспериментальная) $N_1=11$ человек	Вторая группа (контрольная) $N_2=9$ человек
12 14 13 16 11 9 13 15 15 18 14	13 9 11 10 7 6 8 10 11

$$n_1=11, n_2=9$$

$$\bar{X}_{cp}=13,636; \bar{Y}_{cp}=9,444$$

$$\sigma_x=2,346; \sigma_y=2,061$$

Критерий Стьюдента (t-

Группа 1	$x - x_{\text{ср}}$	$(x - x_{\text{ср}})^2$
12	-1,636	2,678
14	0,364	0,132
13	-0,636	0,405
16	2,364	5,587
11	-2,636	6,950
9	-4,636	21,496
13	-0,636	0,405
15	1,364	1,860
15	1,364	1,860
18	4,364	19,041
14	0,364	0,132
Среднее арифметическое		Сумма
13,636		60,545
Дисперсия	5,504	5,504
Отклонение	2,346	2,346

Критерий Стьюдента (t-критерий)

$$\sigma_{x-y} = \sqrt{\frac{60,545+38,222}{11+9-2} * \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{9}\right)} = 1,053$$

$$t_{\text{ЭМП}} = \frac{13.636-9.444}{1,053} = 3,981$$

Критерий Стьюдента (t-критерий)

f	p							
	0.80	0.90	0.95	0.98	0.99	0.995	0.998	0.999
12	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0845	3.4284	3.929	4.178
13	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.1123	3.3725	3.852	4.220
14	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.976	3.3257	3.787	4.140
15	1.3406	1.7530	2.1314	2.6025	2.9467	3.2860	3.732	4.072
16	1.3360	1.7450	2.1190	2.5830	2.9200	3.2520	3.6860	4.0150
17	1.3334	1.7396	2.1098	2.5668	2.8982	3.2224	3.6458	3.965
18	1.3304	1.7341	2.1009	2.5514	2.8784	3.1966	3.6105	3.9216

Критерий Стьюдента (t-критерий)

б) случай связанных (парных) выборок

$$t_{\text{эмп}} = \frac{\bar{d}}{Sd}$$

где $d_i = x_i - y_i$ — разности между соответствующими значениями переменной X и переменной Y , а \bar{d} — среднее этих разностей;

Sd вычисляется по следующей формуле:

$$Sd = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - \frac{(\sum d_i)^2}{n}}{n*(n-1)}}$$

Число степеней свободы k определяется по формуле $k=n-1$.

Если $t_{\text{эмп}} < t_{\text{крит}}$, то нулевая гипотеза принимается, в противном случае принимается альтернативная.

Критерий Фишера



$$\square F_{\text{ЭМП}} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}$$

где σ_x^2, σ_y^2 - дисперсии первой и второй выборки соответственно.

Так как, согласно условию критерия, величина числителя должна быть больше или равна величине знаменателя, то значение $F_{\text{ЭМП}}$ всегда будет больше или равно единице

Критерий Фишера

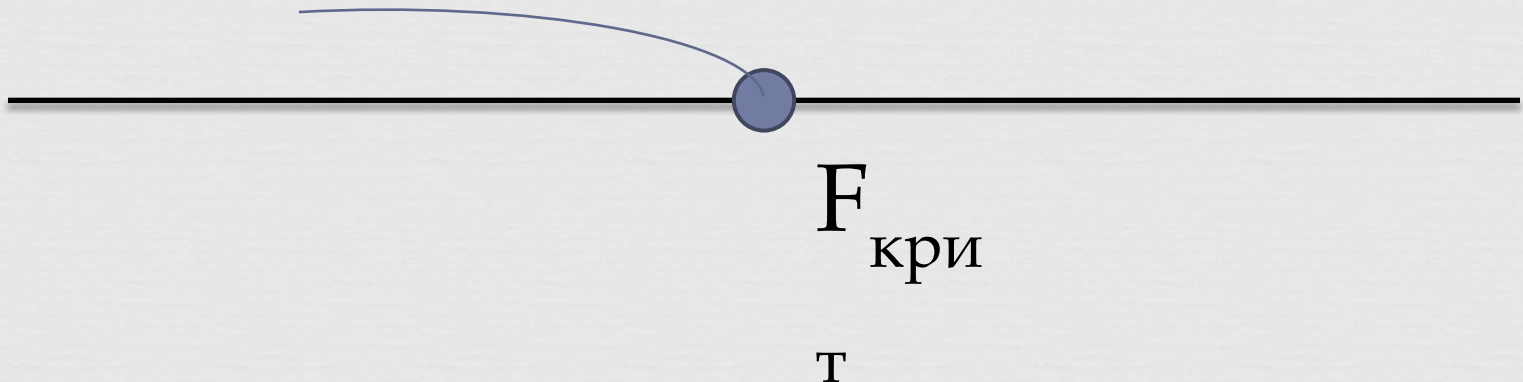


- Нулевая гипотеза принимается, если

$$F_{\text{эмп}} > F_{\text{крит}}$$

Область принятия нулевой гипотезы

Критическая область



Критерий Фишера



Число степеней свободы:

$k_1 = n_1 - 1$ для первой выборки (т.е. для той выборки, величина дисперсии которой больше) и $k_2 = n_2 - 1$ для второй выборки.

$N_1 \backslash N_2$	3	4	5	6	8	12	16	24	50
3	9,28	9,91	9,01	8,94	8,84	8,74	8,69	8,64	8,58
4	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,84	5,77	5,70
5	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,60	4,58	4,44
6	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,92	3,84	3,75
8	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,20	3,12	3,03
12	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,60	2,50	2,40
16	3,24	3,00	2,85	2,74	2,59	2,42	2,33	2,24	2,13
24	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	2,09	1,98	1,86
50	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,85	1,74	1,60

Критерий Фишера



$$F_{\text{ЭМП}} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}$$

где σ_x^2, σ_y^2 - дисперсии первой и второй выборки соответственно.

Так как, согласно условию критерия, величина числителя должна быть больше или равна величине знаменателя, то значение $F_{\text{ЭМП}}$ всегда будет больше или равно единице

Критерий Фишера



№№ учащихся	Первый класс	Второй класс
1	90	41
2	29	49
3	39	56
4	79	64
5	88	72
6	53	65
7	34	63
8	40	87
9	75	77
10	79	62
Суммы	606	636
Среднее	60,6	63,6

Критерий Фишера

Группа 1	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
90	29,400	864,360
29	-31,600	998,560
39	-21,600	466,560
79	18,400	338,560
88	27,400	750,760
53	-7,600	57,760
34	-26,600	707,560
40	-20,600	424,360
75	14,400	207,360
79	18,400	338,560
Среднее арифметическое	Сумма	Сумма
60,600		5154,400
Дисперсия	515,440	515,440
Отклонение	22,703	22,703

Критерий Фишера

$$F_{\text{ЭМП}} = \frac{515,44}{158,156} = 3,25$$

Число степеней свобод: $k=10 - 1 = 9$

Критерий Фишера



	1	2	3	4	5	6	8	12	24	
1	161,5	199,5	215,7	224,6	230,2	233,9	238,9	243,9	249,0	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54

Критерий Фишера

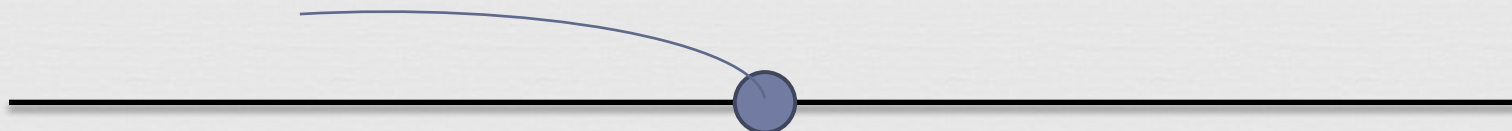


□ $F_{\text{крит}} = 3,23$

□ $F_{\text{эмп}} = 3,25$

Область принятия нулевой гипотезы

Критическая область



$F_{\text{кри}}$

T

Критерий знаков (G-критерий)

- Имеется две серии наблюдений над случайными переменными X и Y , полученные при рассмотрении двух **зависимых выборок**. На их основе составлено N пар вида (x_i, y_i) , где x_i, y_i — результаты двукратного измерения одного и того же свойства у одного и того же объекта.
- Элементы каждой пары x_i, y_i сравниваются между собой по величине, и паре присваивается знак «+», если $x_i < y_i$, знак «-», если $x_i > y_i$ и «0», если $x_i = y_i$.

Критерий знаков (G-критерий)

- Имеется две серии наблюдений над случайными переменными X и Y , полученные при рассмотрении двух **зависимых выборок**. На их основе составлено N пар вида (x_i, y_i) , где x_i, y_i — результаты двукратного измерения одного и того же свойства у одного и того же объекта.
- Элементы каждой пары x_i, y_i сравниваются между собой по величине, и паре присваивается знак «+», если $x_i < y_i$, знак «-», если $x_i > y_i$ и «0», если $x_i = y_i$.

Критерий знаков (G-критерий)

- Статистика критерия (T) определяется следующим образом:
- Допустим, что из N пар (x, y) нашлось несколько пар, в которых значения x_i и y_i равны. Такие пары обозначаются знаком «0» и при подсчете значения величины T не учитываются. Предположим, что за вычетом из числа N числа пар, обозначенных знаком «0», осталось всего n пар. Среди оставшихся n пар подсчитаем число пар, обозначенных знаком «-», т.е, пары, в которых $x_i < y_i$. Аналогично подсчитывается число положительных отклонений. Значение величины T и равно числу пар с менее часто встречающимся знаком.
- Нулевая гипотеза принимается на уровне значимости 0,05, если наблюдаемое значение $T < n - t_a$, где значение $n - t_a$ определяется из статистических таблиц для критерия знаков .

Критерий знаков (G-критерий)



Учащиеся (№)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Первое выполнение	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	2	2	3	3	3
Второе выполнение	2	3	3	4	3	2	3	4	4	3	4	3	2	4	4
Знак разности отметок	0	+	+	+	+	-	0	+	+	0	+	+	-	+	+

Критерий знаков (G-критерий)



Учащиеся (№)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Первое выполнение	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	2	2	3	3	3
Второе выполнение	2	3	3	4	3	2	3	4	4	3	4	3	2	4	4
Знак разности отметок	0	+	+	+	+	-	0	+	+	0	+	+	-	+	+

$$T=10$$

$$N = 12$$

Критерий знаков (G-критерий)

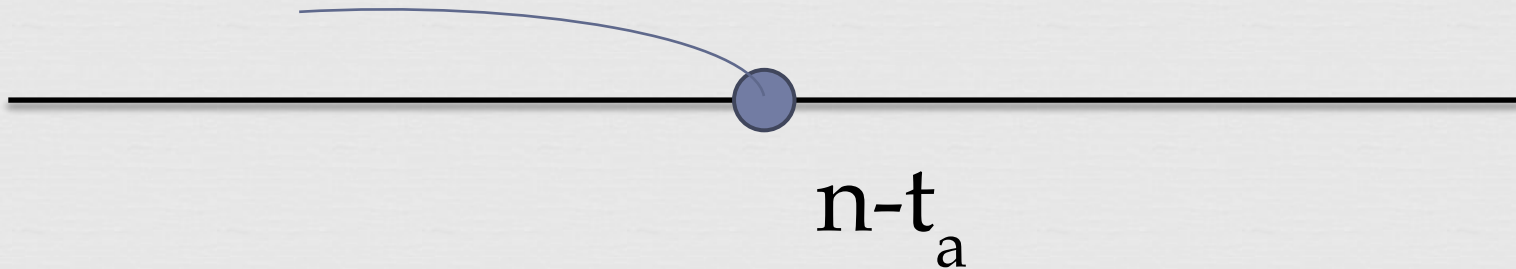
n	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
=0, 05	0	1 α	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	7
=0, 01	0	0	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	5	5	5	6	6
=0, 005	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5

$$n - t_a = 9$$

Критерий знаков (G-критерий)

Область принятия нулевой гипотезы

Критическая область



$$n-t_a = 9$$

$$T=10$$

Критерий χ^2 (хи-квадрат)



- Критерий не рекомендуется использовать, если:
 - 1) сумма объемов двух выборок меньше 20;
 - 2) хотя бы одна из абсолютных частот в таблице 2×2 , составленной на основе экспериментальных данных, меньше 5.

Критерий χ^2 (хи-квадрат)



	Категория 1	Категория 2	
Выборка №1	O_{11}	O_{12}	$O_{11} + O_{12} = n_1$
Выборка №2	O_{21}	O_{22}	$O_{21} + O_{22} = n_2$
	$O_{11} + O_{21}$	$O_{12} + O_{22}$	$n_1 + n_2 = N$

Критерий χ^2 (хи-квадрат)



$$T = \frac{N \left(|O_{11}O_{22} - O_{12}O_{21}| - \frac{N}{2} \right)^2}{n_1 n_2 (O_{11} + O_{21})(O_{12} + O_{22})}$$

где n_1, n_2 — объемы выборок, $N = n_1 + n_2$ — общее число наблюдений

☞ Нулевая гипотеза принимается, если $T_{\text{наблюдаемое}}$ меньше, чем $T_{\text{критическое}}$

Критерий χ^2 (хи-квадрат)



	Да	Нет	
Выборка №1	$O_{11}=15$	$O_{12}=5$	$O_{11}+O_{12}=n_1=20$
Выборка №2	$O_{21}=7$	$O_{22}=8$	$O_{21}+O_{22}=n_2=15$
	$O_{11}+O_{21}=22$	$O_{12}+O_{22}=13$	$n_1+n_2=N=35$

Критерий χ^2 (хи-квадрат)



$$\chi^2 = \frac{N \left(|15*8 - 5*7| - \frac{35}{2} \right)^2}{20*15(15+7)(5+8)} = 1,86$$

Критерий χ^2 (хи-квадрат)

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,10	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0009	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,631	0,564
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,06
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

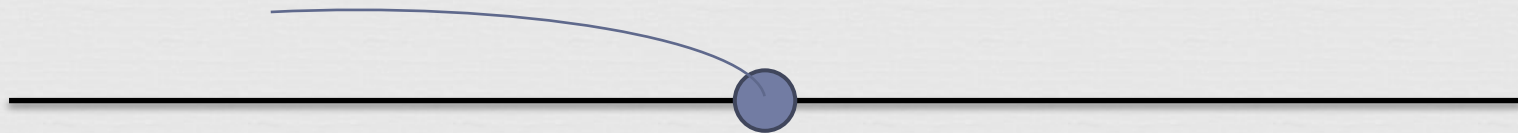
Критерий χ^2 (хи-квадрат)



- $T_{\text{критич}} = 3,84$
- $T = 1,86$

Область принятия нулевой гипотезы

Критическая область



$T_{\text{критич}}$
ч

Критерий χ^2 (хи-квадрат)

	Категория 1	Категория 2	...	Категори яі	...	Категория с	
Выборка №1	O_{11}	O_{12}		O_{1i}		O_{1c}	
Выборка №2	O_{21}	$O_{22}=8$		O_{2i}		O_{2c}	
	$O_{11}+O_{21}$	$O_{12}+O_{22}$		$O_{1i}+O_{2i}$		$O_{1c}+O_{2c}$	$n_1+n_2=N=3$ 5

Критерий χ^2 (хи-квадрат)



$$T = \frac{1}{n_1 * n_2} \sum_{i=1}^C \frac{(n_1 O_{2i} - n_2 O_{1i})^2}{O_{2i} + O_{1i}}$$

$$k=C-1$$

ССЫЛКИ



Гржибовский А. М. Выбор статистического критерия для проверки гипотез // Экология человека. 2008. №11. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/vybor-statisticheskogo-kriteriya-dlya-proverk-i-gipotez> (дата обращения: 16.06.2018).

Сайт Медицинская статистика: <http://medstatistic.ru/index.php>

Учебники



- Новиков Д.А. Статистические методы в педагогических исследованиях (типовые случаи) [Электронный ресурс] : монография / Д.А. Новиков. — Электрон. текстовые данные. — М. : МЗ-Пресс, 2004. — 67 с. — 5-94073-073-6. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/8501.html> (доступно бесплатно
здесь:<http://www.mtas.ru/uploads/pedstat.pdf>)
- Губа В.П. Методы математической обработки результатов спортивно-педагогических исследований [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / В.П. Губа, В.В. Пресняков. — Электрон. текстовые данные. — М. : Человек, 2015. — 288 с. — 978-5-906131-53-9. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/28321.htm>