Лекция 10. Электромагнитная индукция

Вопросы:

- Закон Фарадея. Правило Ленца
- Физическая природа электромагнитной индукции
- Самоиндукция
- Взаимная индукция
- Вихревые токи
- Плотность энергии магнитного поля
- Энергия и силы в магнитном поле. Магнитное давление

Закон Фарадея. Правило Ленца

- Открытие Фарадея

В 1831 г. Майкл Фарадей обнаружил, что в замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного потока (т. е. потока вектора ***B***: $\Phi = B \cdot S$), охватываемого этим контуром, возникает электрический ток – последний назвали **индукционным током** (I_i). Само это явление было названо **электромагнитной индукцией**.

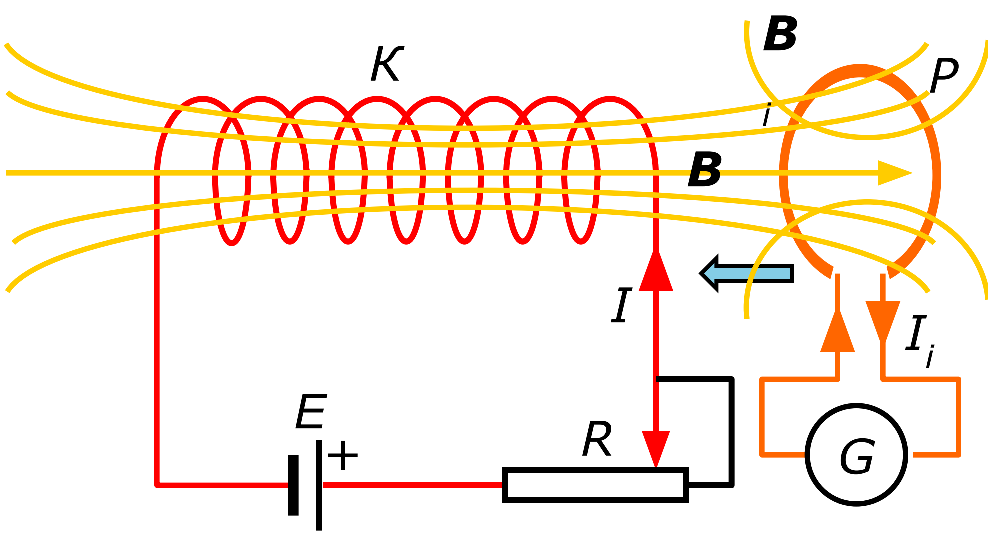
Появление индукционного тока означало, что при изменении магнитного потока – в контуре возникает **э.д.с. индукции** E_i . При этом было отмечено, что <u>величина э.д.с. совершенно не зависит от того, каким образом произошло изменение потока Ф, и определяется лишь скоростью его изменения, т. е. величиной</u> $d\Phi/dt$, и, соответственно, закон Фарадея получил аналитическое выражение:

$$E_i = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad (1)$$

Закон Фарадея. Правило Ленца

- Открытие Фарадея

Фарадей обнаружил, что индукционный ток (см. рис.) можно вызвать двумя различными способами:
1) перемещением рамки *P* (или ее отдельных частей – деформация рамки) в постоянном магнитном поле ***B*** неподвижной катушки *K*;
2) изменением магнитного поля ***B*** (за счет движения катушки *K*, или вследствие изменения тока *I* в ней, или в результате того и другого вместе) при неподвижной рамки *P*.



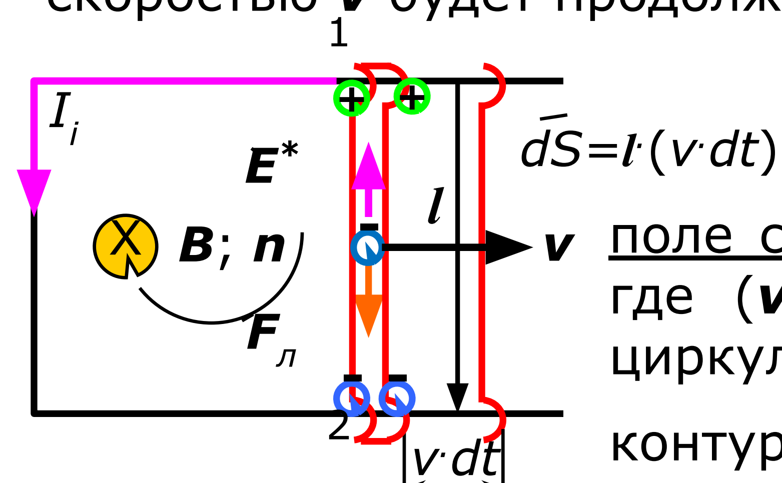
B*i* – магнитное поле индукционного тока противодействует полю ***B***.

- Правило Э.Х. Ленца

Правило устанавливает направление индукционного тока (а, следовательно, и знак E_i). Оно гласит: <u>индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей</u>.

Физическая природа электромагнитной индукции

Рассмотрим контур с подвижной перемычкой длины l, который находится в однородном постоянном магнитном поле $\boldsymbol{B}$, перпендикулярном плоскости контура и направленном за плоскость рисунка. Начнем двигать перемычку вправо со скоростью $\boldsymbol{v}$; с этой же скоростью будут двигаться и носители тока в перемычке – электроны. Тогда на каждый электрон начнет действовать вдоль перемычки магнитная сила Лоренца, направленная вниз: $\boldsymbol{F}_л = -e\cdot(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$. Произойдет перераспределение носителей в перемычке (внизу накопятся электроны, а вверху образуется избыток положительных ионов); в контуре появится ток – индукционный ток, направленный «вверх» - против часовой стрелки. И, если движение перемычки со скоростью $\boldsymbol{v}$ будет продолжаться, то и индукционный ток будет поддерживаться в контуре. Следовательно, сила $\boldsymbol{F}_л$ здесь играет роль сторонней силы, и ей соответствует

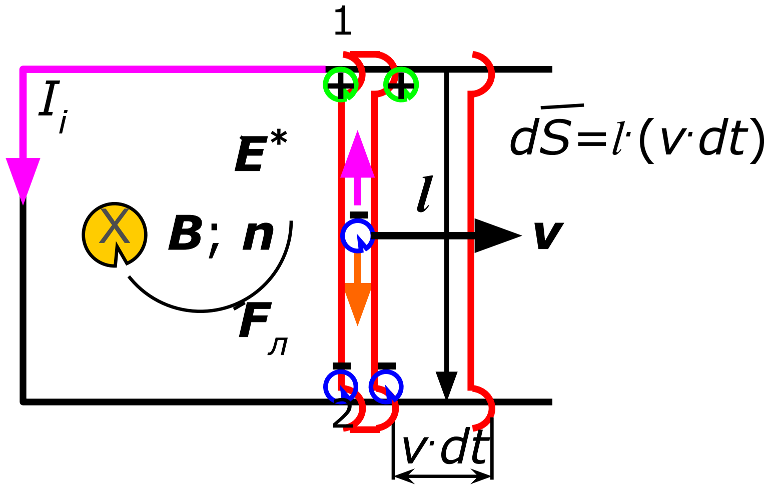


<u>поле сторонних сил</u>: $\boldsymbol{E}^* = \boldsymbol{F}_л / -e = (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$, где $(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ постоянный вектор. Так как циркуляция вектора $\boldsymbol{E}^*$ определяет э.д.с. в контуре, то здесь имеем $E_i = \int_1^2 (\vec{\upsilon} \times \vec{B})d\vec{l} = (\vec{\upsilon} \times \vec{B}) \cdot \int_1^2 d\vec{l}$

Физическая природа электромагнитной индукции

Получаем $E_i = (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})\cdot \boldsymbol{l}$; произведем циклическую перестановку для смешанного произведения трех векторов в последнем выражении для э.д.с.: $E_i = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{v})$. Умножим и разделим последнее на промежуток времени dt, т. е. имеем

$E_i = \dfrac{\vec{B}\cdot(\vec{l}\times\vec{\upsilon}\cdot dt)}{dt}$, где $(\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{v}\cdot dt) = -\,\boldsymbol{n}\cdot dS$. В результате получаем доказываемое выражение $E_i = -\dfrac{\vec{B}\cdot\vec{n}\cdot dS}{dt} = -\dfrac{\overline{B}\cdot d\vec{S}}{dt} = -\dfrac{d\Phi}{dt}$.



При данном выборе направления $\boldsymbol{n}$ (по магнитному полю) знак $d\Phi/dt$ – положительный, а знак E_i – отрица-тельный (индукционный ток I_i также отрицательный).

Замечание: Идея схемы, представленной на рисунке, лежит в основе действия всех индукционных генераторов тока (динамо-машины).

Самоиндукция

Возникновение э.д.с. индукции в контуре, по которому течет изменяющийся во времени ток, называется явлением **самоиндукции**.

Это также объясняется с позиций закона Фарадея… Электрический ток, текущий в любом контуре, создает пронизывающий этот же контур магнитный поток $\Phi = B{\cdot}S$, который, как видно из экспериментов, будет пропорционален самому току, т. е.

$$\Phi = L{\cdot}I \tag{2}$$

где L – коэффициент пропорциональности, называемый **индуктивностью** контура.

В соответствии с правилом знаков для магнитного потока Ф и силы тока I, эти величины всегда имеют одинаковые знаки, а, следовательно, индуктивность L – величина положительная. <u>Индуктивность зависит от формы и размеров контура, а также от магнитных свойств окружающей среды (μ)</u>. Если контур жесткий и поблизости нет ферромагнетиков, то L=const и не зависит от тока. Размерность в СИ для L - [Гн].

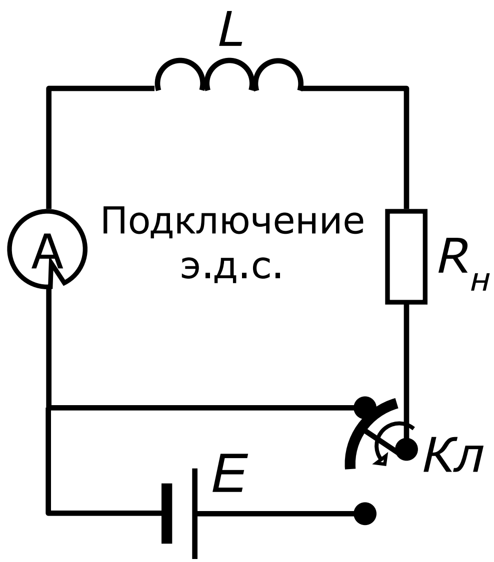
Таким образом, при изменении тока I в контуре согласно (1) возникает **э.д.с. самоиндукции**:

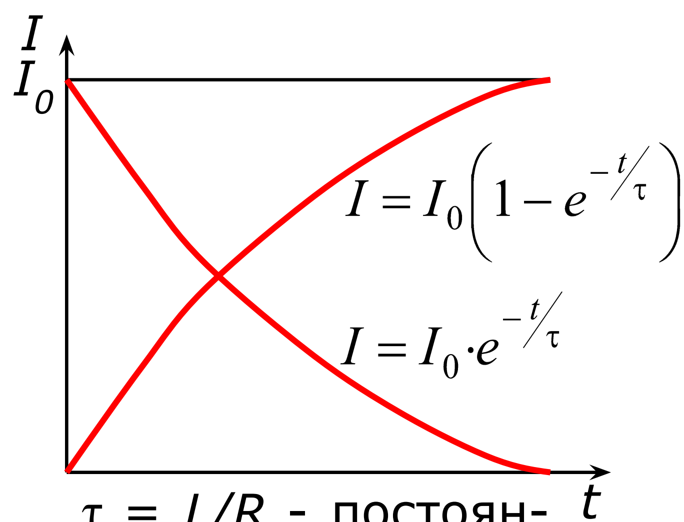
$$E_S = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(L\cdot I)}{dt} = -L\cdot\frac{dI}{dt} \tag{3}$$

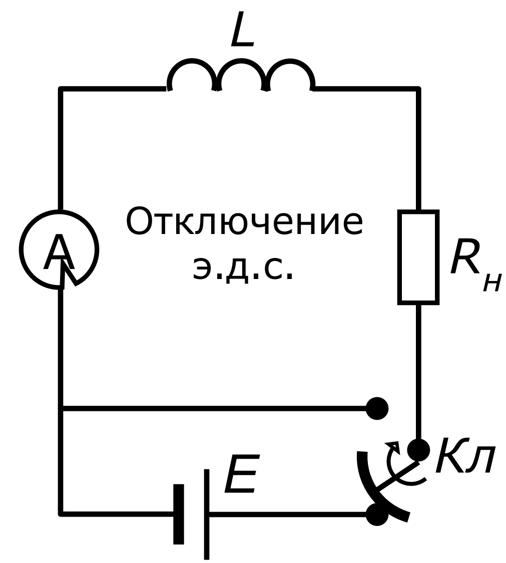
где L = const.

Самоиндукция

Характерные процессы самоиндукции наблюдаются при замыкании и размыкании электрических цепей, содержащих индуктивность L и сопротивление $R_н$. Так установление тока в реальных цепях происходит после соответствующей коммутации – не мгновенно, а за определенный промежуток времени (см. график).







$\tau = L/R_н$ - постоянная времени цепи

Пример: Возникновение электрических дуг между контактами выключателя в цепях с большими реактивными нагрузками (обмотки электромагнитов).

Самоиндукция

- Расчет индуктивности реальных контуров

Для расчета индуктивности катушки с сердечником из материала с заданной проницаемостью μ определяется потокосцепление с этим контуром, т. е. $\Psi = N\cdot(B\cdot S)$, где N – число витков в катушке, S - площадь контура (по его среднему сечению). А затем определяется индуктивность по формуле: $L = \Psi/I$.

Пример: Расчет индуктивности длинного соленоида с сердечником (μ).

1) Определяем индукцию магнитного поля в соленоиде: $B = \mu\cdot\mu_0\cdot H$, где напряженность поля соленоида $H = n\cdot I = N/l\cdot I$ (N – полное число витков, l - длина соленоида). Таким образом, $B = \mu\cdot\mu_0\cdot(N/l)\cdot I$;
2) Определяем потокосцепление с соленоидом: $\Psi = N\cdot(\mu\cdot\mu_0\cdot N/l\cdot I)\cdot S$, а с учетом, что объем соленоида $V=S\cdot l$, получаем $\Psi = \mu\cdot\mu_0\cdot N^2/l^2\cdot V\cdot I = \mu\cdot\mu_0\cdot n^2\cdot V\cdot I$;
3) Рассчитываем индуктивность: $L = \Psi/I = \mu\cdot\mu_0\cdot n^2\cdot V$.

Взаимная индукция

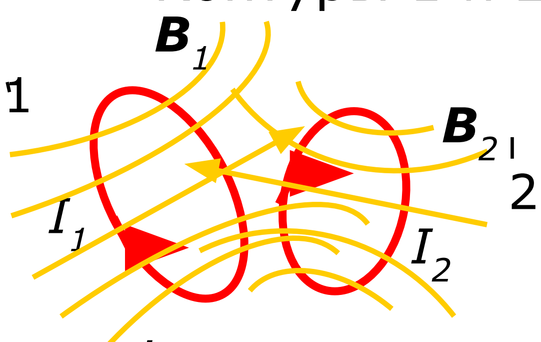
Рассмотрим два неподвижных контура 1 и 2, расположенных достаточно близко друг от друга. Если в контуре 1 течет ток I_1, то он создает через контур 2 полный магнитный поток (в случае отсутствия ферромагнетиков) $Ф_2 = L_{21} \cdot I_1$. При изменении тока I_1 во времени в контуре 2 наводится э.д.с. индукции:

$$E_{i2} = - L_{21} \cdot dI_1/dt \tag{4}$$

Аналогично, при протекании тока I_2 в контуре 2 возникает сцепленный с контуром 1 магнитный поток $Ф_1 = L_{12} \cdot I_2$, а при изменениях тока I_2 в контуре 1 индуцируется э.д.с.:

$$E_{i1} = - L_{12} \cdot dI_2/dt \tag{5}$$

Контуры 1 и 2 в этом случае называются **связанными**.



Явление возникновения э.д.с. в одном из связанных контуров при изменениях силы тока в другом контуре называется **взаимной индукцией**.

Коэффициенты пропорциональности L_{12} и L_{21} называются **взаимной индуктивностью контуров**. Соответствующий расчет дает, что в отсутствии ферромагнетиков эти коэффициенты всегда равны: $L_{12} = L_{21}$.

Взаимная индукция

Часто последнее свойство взаимной индуктивности называют теоремой взаимности. Смысл равенства $L_{12} = L_{21}$ состоит в том, что в любом случае поток $Ф_1$ сквозь контур 1, созданный током I в контуре 2, равен потоку $Ф_2$ сквозь контур 2, созданному таким же током I в контуре 1.

Замечание: В отличие от собственной индуктивности контура L, которая всегда положительная величина, взаимная индуктивность L_{12} – величина алгебраическая (в частности, может равняться нулю). Это связано с тем, что поток $Ф_1$ и ток I_2 относятся к разным контурам и их знаки зависят от выбора нормали $\boldsymbol{n}_1$ к контуру 1 и направления обхода контура 2, которые в свою очередь должны вместе с обходом контура 1 и нормалью к контуру 2 – образовывать правовинтовые системы.

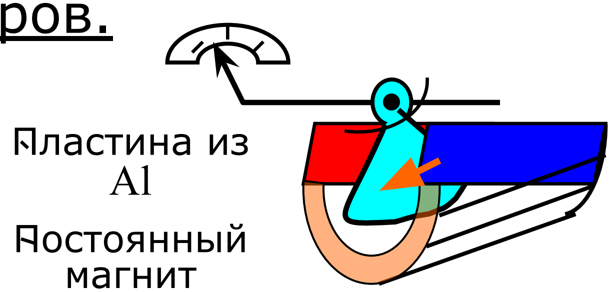
Вихревые токи

Вихревые токи (или **токи Фуко**) – это индукционные токи, которые возбуждаются в сплошных массивных проводниках.

Электросопротивление массивного проводника – мало, поэтому токи Фуко могут достигать очень больших величин. В соответствии с правилом Ленца токи Фуко выбирают внутри проводника такие направления, чтобы своим действием возможно сильнее противиться причине, которая их вызывает.

- Применения токов Фуко в технике

Пример 1: Движущиеся в сильном магнитном поле хорошие проводники вследствие вихревых токов испытывают сильное торможение. Этим пользуются <u>для демпфирования (успокоения) подвижных частей приборов.</u>



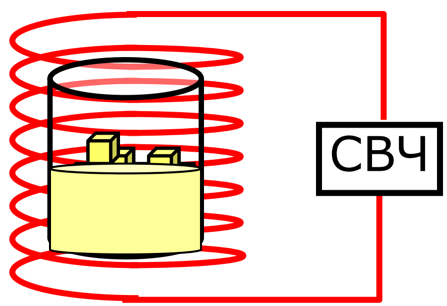
При вращении пластины на оси прибора в поле постоянного магнита возникают токи Фуко, которые тормозят всю подвижную систему прибора.

Вихревые токи

- Применения токов Фуко в технике

Пример 2: <u>Для плавки металлов</u> в индукционных высоко-частотных печах.

Здесь в массивную катушку (индуктор), питаемую высоко-частотным током большой величины (сотни ампер), помещают керамический тигель с кусками переплав-ляемого металла. При включении установки куски металла достаточно быстро разогреваются интенсивными вихревыми токами до состояния плавления.

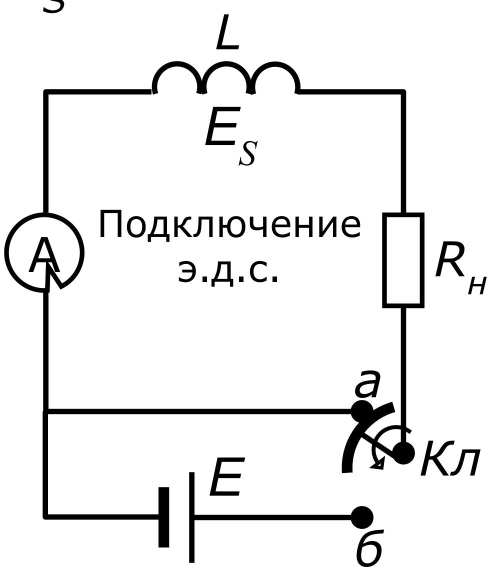


Пример 3: <u>Борьба с паразитными токами Фуко</u> в трансформаторных сердечниках.

Для уменьшения нагрева сердечников последние выпол-няют наборными из тонких пластин с изолирующим покрытием для увеличения сопротивления в возможных местах появления вихревых токов.

Плотность энергии магнитного поля

Рассмотрим электрическую цепь, содержащую индуктивность L и сопротивление $R_н$, которую с помощью быстродействующего коммутатора *Кл* подключим (из *а* в *б*) к источнику питания E. В таком замкнутом контуре начнет возрастать ток, а это приведет к появлению э.д.с. самоиндукции E_S. Тогда согласно закону Ома имеем $R\cdot I = E + E_S$ или $E = R\cdot I - E_S$.



Найдем элементарную работу $\delta A_{стор}$, которую совершают сторонние силы источника E за время dt, для этого умножим последнее уравнение на ($I\cdot dt$):

$$E\cdot I\cdot dt = R\cdot I^{2}\cdot dt - E_S\cdot I\cdot dt \qquad (6)$$

С учетом смысла каждого слагаемого в уравнении (6) и закона Фарадея $E_S = -d\Phi/dt$, представим (6) как $\delta A_{стор} = \delta Q + I\cdot d\Phi$, где δQ – джоулево тепловыделение, а слагаемое $I\cdot d\Phi$ (так называемая дополнительная работа $\delta A_{доп}$) определяет работу источника против э.д.с. самоиндукции. Далее будем считать, что вблизи контура нет ферромагнетиков, следовательно, $d\Phi = L\cdot dI$ и получаем $\delta A_{доп} = I\cdot d\Phi = L\cdot I\cdot dI$.

Плотность энергии магнитного поля

Проинтегрировав последнее выражение, получаем:

$$A_{доп} = \int \delta A_{доп} = (L \cdot I^2)/2 \qquad (7)$$

Таким образом, часть работы источника питания ($A_{доп}$) идет на «создание» магнитного поля, т.е. превращается в энергию магнитного поля, обусловленного протеканием тока в катушке с индуктивностью L. Иначе говоря, <u>в отсутствии ферромагнетиков контур с L, по которому течет ток I, обладает энергией</u>:

$$W = (L \cdot I^2)/2 = (I \cdot \Phi)/2 = \Phi^2/(2L) \qquad (8)$$

Эту энергию называют *магнитной энергией тока* или *собственной энергией контура с током*. Она может быть целиком превращена во внутреннюю энергию проводников (нагрев R_H), если отключить источник E, быстро повернув ключ *Кл* в положение *а*.

<u>Для длинного соленоида</u>: индуктивность $L = \mu\mu_0 n^2 V$, где n – число витков на единицу длины, V – объем соленоида; имеем $W = (L \cdot I^2)/2 = \mu\mu_0 n^2 \cdot I^2 \cdot V/2$, а с учетом, что $n \cdot I = H = B/(\mu\mu_0)$, получаем $W = \mu\mu_0 H^2/2 \cdot V = B^2/(2\mu\mu_0) \cdot V = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H})/2 \cdot V$.

Выражения $w = \mu\mu_0 H^2/2 = B^2/(2\mu\mu_0) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H})/2$ (9)

определяют *объемную плотность энергии магнитного поля*.

Плотность энергии магнитного поля

Зная плотность энергии магнитного поля в каждой точке, можно определить энергию поля, заключенную в любом объеме V:

$$W = \int(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H})/2\cdot dV \qquad (10)$$

Замечание: Часто приходится использовать «энергетический» метод при нахождении индуктивности контура (когда вычисление магнитного потока через контур затруднительно), т. е.

$$L = 1/I^2\cdot\int B^2/(\mu\mu_0)\cdot dV \qquad (11)$$

В случае наличия N - связанных контуров с токами I_1, $I_2,\ldots,I_N$ можно показать, что энергия магнитного поля такой системы токов (в отсутствии ферромагнетиков) определяется:

$$W = 1\Big/2\sum_{i,k=1}^{N} L_{ik}\cdot I_i\cdot I_k \qquad (12)$$

где $L_{ik}= L_{ki}$ – взаимная индуктивность i-го и k-го контуров, $L_{ii}=L_i$ – собственная индуктивность i-го контура.

Энергия и силы в магнитном поле. Магнитное давление

Наиболее общим методом определения сил в магнитном поле является энергетический, при этом используют выражение (12) для энергии магнитного поля.

Для случая двух контуров с токами I_1 и I_2 магнитную энергию можно представить как:

$$W = 1/2(I_1 \cdot \Phi_1 + I_2 \cdot \Phi_2) \qquad (13)$$

где $\Phi_1 = L_1 \cdot I_1 + L_{12} \cdot I_2$, $\Phi_2 = L_2 \cdot I_2 + L_{21} \cdot I_1$ – полные магнитные потоки через контура *1* и *2* соответственно.

Согласно закону сохранения энергии элементарная работа δA^*, которую совершают источники тока, включенные в эти контура, идет: на теплоту δQ, на приращение магнитной энергии системы dW (в ходе движения контуров или при изменении токов в них), на механическую работу $\delta A_{мех}$(при перемещении или деформации контуров), т. е.

$$\delta A^* = \delta Q + dW + \delta A_{мех}$$

Нас интересует только работа источников против э.д.с. индукции и самоиндукции в каждом контуре, т. е. дополнительная работа: $\delta A_{доп} = -(E_{i1} + E_{S1}) \cdot I_1 \cdot dt - (E_{i2} + E_{S2}) \cdot I_2 \cdot dt$, а с учетом, что $(E_i + E_S) = -d\Phi/dt$, получаем $\delta A_{доп} = I_1 \cdot d\Phi_1 + I_2 \cdot d\Phi_2$.

Энергия и силы в магнитном поле. Магнитное давление

Именно дополнительная работа источников идет на приращение магнитной энергии и на механическую работу, таким образом имеем:

$$I_1 \cdot d\Phi_1 + I_2 \cdot d\Phi_2 = dW + \delta A_{мех} \qquad (14)$$

Формула (14) является основной для расчета $\delta A_{мех}$, а затем и сил в магнитном поле, используя определение работы $\delta A=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{dl}$.

В итоге сила в магнитном поле определяется производными:

$$F = - dW_{\Phi}/dl = dW_I/dl \qquad (15)$$

где dW_{Φ}- приращение магнитной энергии в случае $\Phi_{1;2}$= const, а dW_I- приращение магнитной энергии в случае $I_{1;2}$= const.

Замечание: Так из формулы (13) для случая постоянных токов в контурах: $dW_I = ½(I_1 \cdot d\Phi_1 + I_2 \cdot d\Phi_2)$.

Энергия и силы в магнитном поле. Магнитное давление

Магнитное давление

Если представить, что радиус сечения соленоида, по обмотке которого течет постоянный ток I, увеличился на dr, то в этом случае силы Ампера совершили работу:

$$\delta A_{мех} = dW_I = p \cdot S \cdot dr,$$

где p – давление, S – боковая поверхность соленоида.

С другой стороны, при $\mu = 1$ имеем приращение энергии магнитного поля $dW_I = d(B^2/2\mu_0 \cdot V) = B^2/2\mu_0 \cdot S \cdot dr$, где $B = \text{const}$, так как $I = \text{const}$.

Сопоставляя первое и второе выражения для dW_I, заключаем, что *магнитное давление* можно определить как:

$$p = B^2/2\mu_0 \qquad (16)$$

Выражение (16) можно обобщить на случай, когда по разные стороны от поверхности с током (током проводимости или током намагничивания) магнитное поле разное $\boldsymbol{B}_1$ и $\boldsymbol{B}_2$:

$$p = \left| \frac{\vec{B}_1 \cdot \vec{H}_1}{2} - \frac{\vec{B}_2 \cdot H_2}{2} \right| \qquad (17)$$