Двойственный симплекс-метод

$$C(x) = 5x_1 + 7x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 21 \\ \quad x_1 \ge 3 \\ \quad x_2 \ge 2 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Приведем к каноническому виду, введя дополнительные переменные x_3, x_4, $x_5 \ge 0$.

$$C_1(x) = -5x_1 - 7x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 21 \\ x_1 - x_4 = 3 \\ x_2 - x_5 = 2 \\ \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}$$

Умножим второе и третье структурное ограничение на (-1)

$$C_1(x) = -5x_1 - 7x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 21 \\ -x_1 + x_4 = -3 \\ \quad -x_2 + x_5 = -2 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}$$

Векторы A_3, A_4, A_5 образуют единичный базис этой ЗЛП.

Частным решением будет вектор $x^0 = (0; 0; 21; -3; -2)$.

<u>Опр.</u> Решение системы линейных уравнений $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, соответствующее базису $A\sigma$, называется ***псевдопланом*** или ***почти допустимым базисным решением*** (ПДБР), если все двойственные оценки неотрицательны ($\Delta_j \geq 0$, $j = \overline{1,n}$), а среди координат плана существует, по крайней мере, одна отрицательная координата ($x^0_k < 0$, $k \in \sigma$).

Здесь $\sigma = \left\{ i_k : \quad x_{i_k} \neq 0, \quad k = \overline{1,l}, \quad l \leq m \right\}$.

Чаще всего псевдоплан появляется в задачах, в которых:

1. Ограничения имеют вид $Ax \geq b$.
2. Коэффициенты целевой функции $c_j \geq 0$, $j = \overline{1, n}$
   и при этом $C(x) \to \min$.
3. В ЗЛП вводится существенное или активное ограничение, т.е. такое ограничение, которое изменяет оптимальный план в первоначально заданном множестве допустимых планов.

***Теорема*.** Признак оптимальности псевдоплана.

Пусть $x^* = (x^*_1, \ldots, x^*_n)$ – псевдоплан, в котором $x_j^* \geq 0, \quad j = \overline{1, n}$, тогда x^* – оптимальный план.

Доказательство. Так как x^* псевдоплан, то ему соответствует некоторый базис. Поскольку по условию теоремы $x_j^* \geq 0, \quad j = \overline{1, n}$, то x^* – БДП.

Из определения псевдоплана следует, что $\Delta_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}$. При этом попадаем в условия теоремы «Признак оптимальности БДП». Таким образом, x^* – оптимальный план.

Алгоритм двойственного симплекс-метода

$$\begin{cases} (c,x) \to \max \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Мы имеем систему ограничений вида:

$$x_k + \sum_{j \in \omega} a'_{kj} x_j = x_{k0}, \quad k \in \sigma \qquad (2)$$

В (2) все координаты x^0_k не определены по знаку. При этом в ЗЛП (2) все оценки $\Delta_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}$.

<u>Правило 1</u>. *Определение номера вектора, выводимого из базиса.*

Из базиса выводится вектор A_r , у которого номер *r* определяется из соотношения:

$$\min_{k\in\sigma}\left\{x_{k0}\right\} = x_{r0} < 0 \quad \textit{или} \quad \max_{x_{k0}<0}\left\{\left|x_{k0}\right|\right\} = \left|x_{r0}\right|$$

Правило 2. *Определение номера вектора, вводимого в базис.*

Номер вектора *s*, вводимого в базис, выбирается из отношений двойственных оценок к отрицательным элементам *r*-ой строки симплекс-таблицы:

$$\min_{a'_{rj}<0}\left\{\left|\frac{\Delta_j}{a'_{rj}}\right|\right\}=\left|\frac{\Delta_s}{a'_{rs}}\right| \quad \text{или} \quad \max_{a'_{rj}<0}\left\{\frac{\Delta_j}{a'_{rj}}\right\}=\frac{\Delta_s}{a'_{rs}}<0$$

Ведущим элементом будет a'_{rs}.

С помощью фрагмента симплекс-таблицы, запишем формулы пересчета ее элементов.

Таблица.

Фрагмент симплекс-таблицы

c_σ	Базис	$A_0=b$	…	c_j	…	C_s
			…	A_j	…	A_s
…	…	…	…	…	…	…
c_k	A_k	x_{k0}	…	a'_{kj}	…	a'_{ks}
…	…	…	…	…	…	…
c_r	A_r	x_{r0}	…	a'_{rj}	…	a'_{rs}
…	…	…	…	…	…	…
	$C(x)/\Delta_j$	$C(x^0)$	…	Δ_j	…	Δ_s

омпоненты нового псевдоплана определяются согласно (3).

$$x_k^{нов} = \begin{cases} x_{k0} - \dfrac{x_{r0}}{a'_{rs}} a'_{ks}, & k \neq s, \quad k \in \sigma \\ \dfrac{x_{r0}}{a'_{rs}}, & k = s \\ 0, & k \in \omega \end{cases} \tag{3}$$

Другие элементы симплексной таблицы вычисляются по

формулам:

$$\begin{cases} a_{kj}^{нов} = a'_{kj} - \dfrac{a'_{rj}}{a'_{rs}} a'_{ks}, \quad k \neq s, \quad j = \overline{1,n}, \quad j \neq s \\ a_{kj}^{нов} = \dfrac{a'_{rj}}{a'_{rs}}, \qquad k = s, \qquad j = \overline{1,n} \\ a_{rs}^{нов} = \begin{cases} 1, & r = s \\ 0, & r \neq s \end{cases} \end{cases} \tag{4}$$

Двойственные оценки:

$$\Delta_j^{нов} = \Delta_j - \frac{a'_{rj}}{a'_{rs}} \Delta_s \qquad (5)$$

Значение целевой функции на новом псевдоплане:

$$C(x^{нов}) = C(x^0) - \frac{x_{r0}}{a'_{rs}} \Delta_s \qquad (6)$$

***Теорема* 10.**

Применение правил 1 и 2, а также формул (3) ÷ (6) обеспечивает:

1) переход к новому псевдоплану, т. е. гарантируется

а) $\Delta_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}$

б) новый псевдоплан $x^{нов}$ есть базисный план.

2) Значение целевой функции на новом псевдоплане не больше, чем значение целевой функции на предыдущем псевдоплане, т.е. $C(x^{нов}) \leq C(x^0)$.

П р и м е р 15.

$$C(x) = 8x_1 + x_2 + x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 16 \\ \qquad x_2 + 6x_3 \geq 4 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0;\ j = 1, 2, 3.$$

Приведем ЗЛП к каноническому виду

$$C_1(x) = -8x_1 - x_2 - x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \quad = -16 \\ \qquad -x_2 - 6x_3 \ + \ x_5 = -4 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1,5}$$

Базисный план x^0 = (0; 0; 0; -16; -4) есть псевдоплан

Строим симплекс-таблицу и решаем задачу.

			-8	-1	-1	0	0
c_σ	Базис	$A_0=b$	A_1	A_2	$A_3\downarrow$	A_4	A_5
0	$\leftarrow A_4$	-16^*	-4	1	-2	1	0
0	A_5	-4	0	-1	-6	0	1
	$C_1(x)/\Delta_j$	0	8	1	1	0	0
-1	A_3	8	2	-1/2	1	-1/2	0
0	A_5	44	12	-4	0	-3	1
	$C_1(X)/\Delta_j$	-8	6	3/2	0	1/2	0

Получен оптимальный план $x^* = (0; 0; 8; 0; 44)$

Значение целевой функции $C_1(x^*) = -8$

Значение целевой функции исходной задачи $C(x^*) = 8$.

Признак отсутствия допустимых планов

Теорема. *Признак неразрешимости ЗЛП в двойственном симплекс-методе.*

Пусть в ЗЛП (1) имеется псевдоплан $x^* = (x_1^*, \ldots, x_r^*, \ldots, x_n^*)$ такой, что r-я координата меньше нуля, а все элементы r-й строки симплексной таблицы неотрицательны, тогда ЗЛП неразрешима.

Более короткая формулировка теоремы:

Если существует псевдоплан $x^* = (x_1^*, \ldots, x_r^*, \ldots, \underline{x_n^*})$ такой, что $x_r^* < 0$, а элементы $a'_{rj} \geq 0$, $j = \overline{1, n}$, то мн-во $D = \varnothing$.

П р и м е р.

$$C(x) = 5x_1 + x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 4 \\ -x_1 + x_2 \geq 6 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1,2}$$

Выполнив эквивалентные преобразования получаем:

$$C_1(x) = -5x_1 - x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_4 = -6 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1,4}$$

Составим симплексную таблицу:

Таблица.

			-5	-1	0	0
c_σ	Базис	$A_0 = b$	$A_1\downarrow$	A_2	A_3	A_4
0	A_3	- 4	- 1	1	1	0
0	$\leftarrow A_4$	- 6	1	-1	0	1
	$C_1(x)/\Delta_j$	0	5	1	0	0
0	$\leftarrow A_3$	- 10	0	0	1	1
- 1	A_2	6	-1	1	0	- 1
	$C_1(x)/\Delta_j$	- 6	6	0	0	1

Из теоремы следует вывод, что задача не разрешима. Область допустимых планов есть пустое множество ($D = \varnothing$).

Это легко можно проиллюстрировать графически.

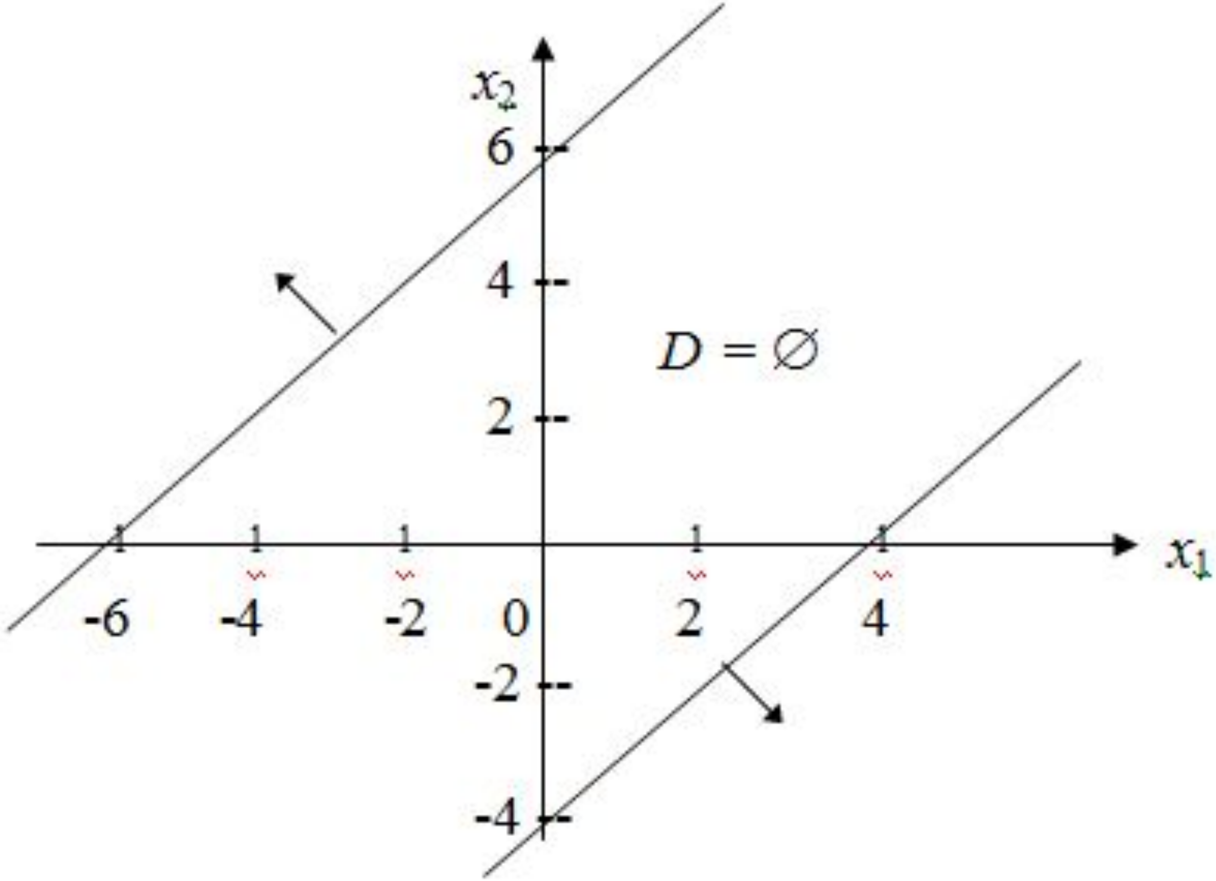

Рис. Графическая иллюстрация отсутствия множества допустимых планов в ЗЛП

Решение ЗЛП с дополнительным активным ограничением

Допустим, что ЗЛП (1) имеет оптимальный план

$$x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$$

Известен носитель оптимального плана

$$\sigma^* = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\} \text{ и } \quad \Delta_j^* \geq 0, \quad j = \overline{1, n}$$

Последней итерации симплексной таблицы соответствует

система уравнений

$$x_k + \sum_{j \in \omega} a'_{kj} x_j = x_{k0}, \quad k \in \sigma^* \qquad (7)$$

Координаты оптимального плана *x**

$$x_k^* = \begin{cases} x_{k0}, & k \in \sigma^* \\ 0, & k \in \omega \end{cases}$$

Добавим к исходной ЗЛП (1) дополнительное активное или, как еще говорят, существенное ограничение вида:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{m+1,j} x_j \le b_{m+1} \qquad (8)$$

Введем в неравенство (8) дополнительную переменную $x_{n+1} \ge 0$.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{m+1,j} x_j + x_{n+1} = b_{m+1} \qquad (9)$$

$$\sum_{k \in \sigma^*} a_{m+1,k} x_k + \sum_{j \in \omega} a_{m+1,j} x_j + x_{n+1} = b_{m+1} \qquad (10)$$

Выразим x_k из (7) и подставим в уравнение (10). Получим уравнение (11).

$$\sum_{k\in\sigma^*} a_{m+1,k}(x_{k0} - \sum_{j\in\omega} a'_{kj} x_j) + \sum_{j\in\omega} a_{m+1,j} x_j + x_{n+1} = b_{m+1} \quad (11)$$

Выделим и сгруппируем свободные переменные, а постоянные члены перенесем в правую часть уравнения (11):

$$x_{n+1} + \sum_{j\in\omega}(a_{m+1,j} - \sum_{k\in\sigma^*} a_{m+1,k}a'_{kj})x_j = b_{m+1} - \sum_{k\in\sigma^*} a_{m+1,k}x_{k0} \qquad (12)$$

Обозначим $x_{m+1,0} = b_{m+1} - \sum_{k\in\sigma^*} a_{m+1,k}x_{k0}$, тогда дополнительная переменная $x_{n+1} = x_{m+1,0}$. Запишем (12) в *(m*+1*)* строку симплекс-таблицы. Появляется новый единичный базисный вектор A_{n+1}.

За счет дополнительного ограничения (12) получили новую ЗЛП, в которой имеется псевдоплан

$$x^{нов} = \begin{pmatrix} x^* \\ x_{m+1,0} \end{pmatrix}$$

Действительно, n новых двойственных оценок равны прежним двойственным оценкам, а оценка $\Delta_{n+1} = 0$, как оценка базисного вектора A_{n+1}. Кроме того, $x_{m+1,0} < 0$, так как

$$b_{m+1} < \sum_{k \in \sigma^*} a_{m+1,k} x_{k0}$$ в силу предположения, что дополнительное ограничение активное.

Имея псевдоплан, можно продолжать решение ЗЛП двойственным симплекс-методом.

П р и м е р 19.

Предприятие изготавливает для постоянного заказчика изделие *A* основной номенклатуры и изделие *B* второстепенной номенклатуры. Издержки на производство одного изделия *A* равны 5 ден. ед., а изделия *B* – 1 ден. ед. Заказчик требует как минимум на четыре единицы больше изделия *A* , чем изделия *B*. Производство одного изделия *A* дает единицу токсичных отходов, а изделия *B* – две единицы отходов. Общее количество токсичных отходов не должно превышать 12 единиц. Необходимо так организовать производство, чтобы минимизировать издержки.

$$C(x) = 5x_1 + x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12 & (l_1) \\ x_1 - x_2 \ge 4 & (l_2) \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2 \ge 0,$$

(l1) и (l2) обозначения прямых линий, ограничивающих соответствующие полуплоскости.

$$C_1(x) = -5x_1 - x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \quad = 12 \\ -x_1 + x_2 \quad + x_4 = -4 \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \ge 0,$$

Решение производственной задачи

			-5	-1	0	0	0
c_σ	Базис	$A_0 = b$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	A_3	12	1	2	1	0	
0	A_4	-4	-1	1	0	1	
	$C_1(x)/\Delta_j$	0	5	1	0	0	
0	A_3	8	0	3	1	1	
-5	A_1	4	1	-1	0	-1	
	$C_1(x)/\Delta_j$	-20	0	6	0	5	
0	A_3	8	0	3	1	1	0
-5	A_1	4	1	-1	0	-1	0
0	A_5	-2	0	-1	0	-1	1
	$C_1(x)/\Delta_j$	-20	0	6	0	5	0
0	A_3	6	0	2	1	0	1
-5	A_1	6	1	0	0	0	-1
0	A_4	2	0	1	0	1	-1
	$C_1(x)/\Delta_j$	-30	0	1	0	0	5

Получен оптимальный план $x^* = (4; 0; 8; 0)$

Издержки составят $C(x^*) = 20$ ден. ед.

Теперь обстоятельства изменились. Заказчик потребовал изготовить не менее 6 штук изделий *A*. Появляется новое активное ограничение $x_1 \geq 6$ (обозначим соответствующую прямую l_3).

Вводим дополнительную переменную $x_5 \geq 0$

$$\begin{cases} 3x_2 + x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - x_2 - x_4 = 4 \\ -x_1 + x_5 = -6 \end{cases}$$

Выразим x_1 из второго уравнения и подставим в третье уравнение. Тогда

$$x_1 = 4 + x_2 + x_4 \quad ,$$
$$-4 - x_2 - x_4 + x_5 = -6 \, ,$$
$$-x_2 - x_4 + x_5 = -2.$$

Применяя алгоритм двойственного симплекс-метода, получаем оптимальный план

$x_1^* = (6; 0; 6; 2; 0)$, $C(x_1^*) = 30$ ден. ед.

Геометрическая иллюстрация решения данной задачи показана на рис.

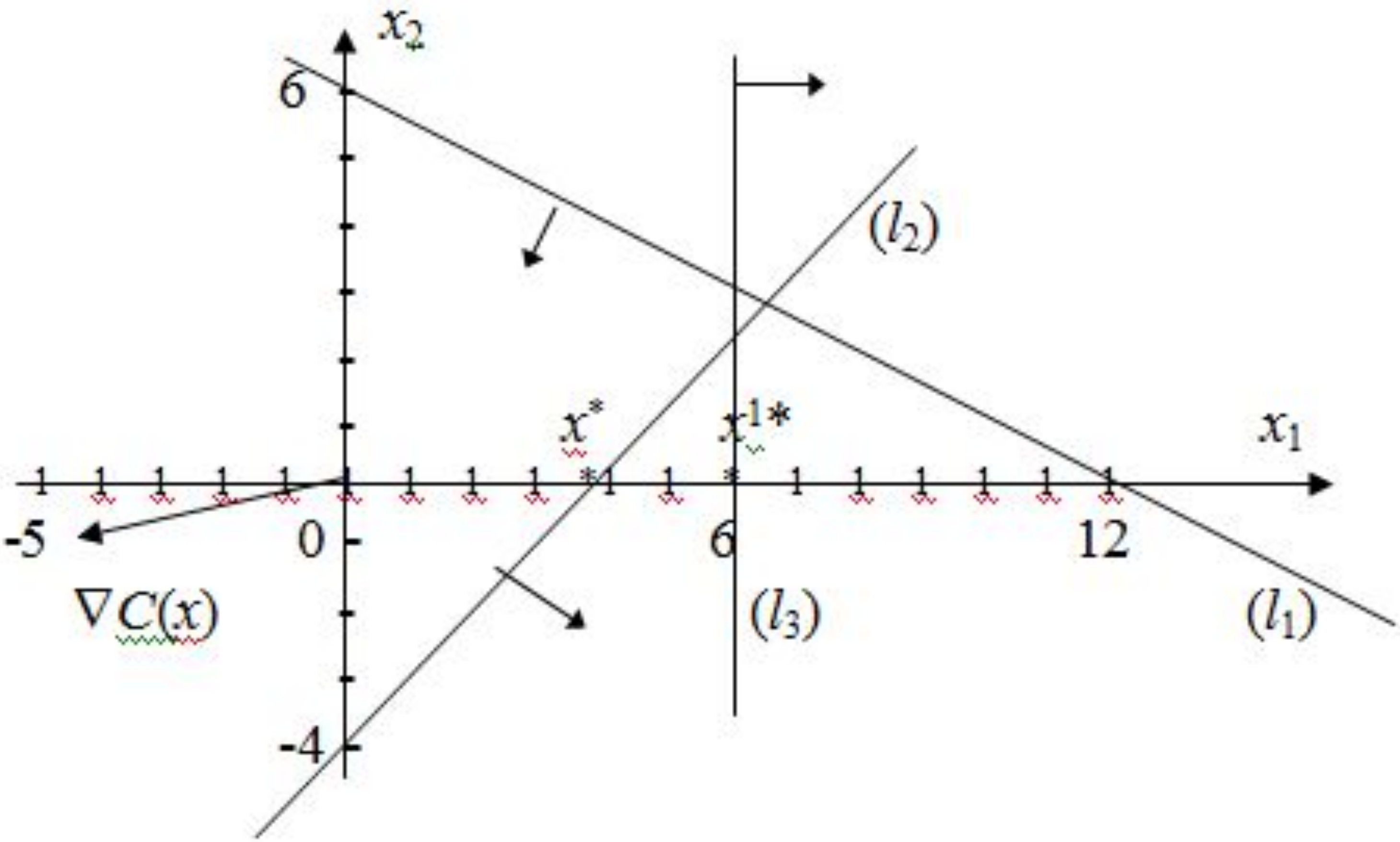

Иллюстрация решения задачи